Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului
Analiza Matematică II, Semestrul II
Conf. dr. Lucian MATICIUC

CURS XI – XII

Capitolul VII: Ecuaţii diferenţiale

1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi rezolvabile prin cuadraturi

Definiţia 1 *Fie* $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)$ *o funcţie reală, având drept argumente variabila reală* $x \in [a, b]$ *şi funcţia reală* y *împreună cu derivatele ei* $y', y'', ..., y^{(n)}$*. Relaţia*

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

se numeşte ecuaţie diferenţială de ordinul n*, în necunoscuta* $y = y(x)$ *definită pe intervalul* $[a, b]$*, având derivate până la ordinul* n *inclusiv, în orice punct al intervalului* $[a, b]$ *astfel încât să avem*

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0\ ,\ \forall x \in [a, b]$$

Definiţia 2 *Dacă* $n = 1$ *atunci ecuaţia se numeşte de ordinul întâi şi poate avea fie forma implicită*

$$F\left(x, y, y'\right) = 0$$

fie forma explicită

$$y' = f(x, y)$$

Fie în continuare ecuaţia diferenţială

$$y' = f(x, y)$$

cu f continuă pe domeniul plan D. **Se poate arăta ca, în ipoteza că f este continuă, există o unică soluţie a acestei ecuaţii al cărei grafic trece printr-un punct dat în prealabil $M(x_0, y_0) \in D$.**

Definiţia 3 *Problema determinării soluţiei* $y = y(x)$ *a problemei cu condiţie iniţială*

$$(PC)\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

se numeşte ***problema Cauchy****.*

1.1 Ecuaţii cu variabile separabile (EVS)

Sunt ecuaţii de forma

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{1}$$

unde $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue iar y este funcţia necunoscută. Presupunem $g \neq 0$ pe $\mathbb{J}$.

Teorema 4 *Fie $\mathbb{I}, \mathbb{J}$ două intervale din $\mathbb{R}$ şi fie $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu $g \neq 0$ pe $\mathbb{J}$. Soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile (1) este dată de*

$$y(x) = G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\right),$$

pentru orice x din domeniul funcţiei y (Dom(y)), unde x_0 este un punct fixat din $\mathbb{I}$ şi $G : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ este dată de

$$G(z) = \int_{\xi}^{z} \frac{du}{g(u)}, z \in \mathbb{J}, \ \xi \text{ fixat în } \mathbb{J} \tag{2}$$

Demonstraţie. Deoarece g este continuă pe pe $\mathbb{J}$ şi nenulă pe $\mathbb{J}$ rezultă că păstrează semn constant pe $\mathbb{J}$. Vom presupune, fără a restrânge generalitatea (f.r.g.) că $g(y) > 0, \forall y \in \mathbb{J}$. Deci funcţia G este bine definită şi crescătoare pe $\mathbb{J}$. Plecând de la ecuaţia (1) obţin că soluţia $y(x)$ trebuie să verifice ecuaţia

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \Leftrightarrow \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Rescriu egalitatea în punctul u şi integrez pe $[x_0, x]$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt, \ x \in \text{Dom}(y)$$

Deci echivalent, notând $y(t) = u \Rightarrow du = y'(t)\, dt$, deci

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{du}{g(u)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \Leftrightarrow G(y(x)) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt, \ x \in \text{Dom}(y),$$

unde G este definită de (2) cu $\xi = y(x_0)$. Având în vedere că G este strict crescătoare pe $\mathbb{J}$ avem că există inversa lui G deci obţinem

$$y(x) = G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\right), \ x \in \text{Dom}(y)$$

■

Exerciţiul 5 *Să se determine soluţia generală a următoarei EVS:*

$$\left(x^2 + a^2\right)\left(y^2 + b^2\right) dx + \left(x^2 - a^2\right)\left(y^2 - b^2\right) dy = 0$$

Avem că $\boxed{\textit{funcţia necunoscută este } y = y(x)}$*, deci au loc formulele*

$$\boxed{dy = y'(x)\, dx \ \Leftrightarrow \ \frac{dy}{dx} = y'(x).}$$

Determinăm $y'(x)$ din ecuaţia dată (împărţind ecuaţia prin dx) şi obţinem

$$\begin{aligned}&\left(x^2+a^2\right)\left(y^2+b^2\right)+\left(x^2-a^2\right)\left(y^2-b^2\right)y'(x)=0\\ \Leftrightarrow\ &y'(x)=-\frac{\left(x^2+a^2\right)\left(y^2(x)+b^2\right)}{\left(x^2-a^2\right)\left(y^2(x)-b^2\right)}=-\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{y^2(x)+b^2}{y^2(x)-b^2}\end{aligned}$$

deci avem o EVS.

Vom separa efectiv variabilele, lăsând $y'(x)$ la numărător

$$\frac{y^2(x)-b^2}{y^2(x)+b^2}y'(x)=-\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2},$$

rescriu variabila de integrare în t şi apoi integrez de la x_0 la x:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{y^2(t)-b^2}{y^2(t)+b^2}y'(t)\,dt=-\int_{x_0}^{x}\frac{t^2+a^2}{t^2-a^2}dt$$

Facem $\boxed{\textit{schimbarea de variabilă } y(t)=u}$ *deci* $\boxed{du=y'(t)\,dt}$ *şi obţinem*

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)}\frac{u^2-b^2}{u^2+b^2}du=-\int_{x_0}^{x}\frac{t^2+a^2}{t^2-a^2}dt,$$

asică integrale din funcţii raţionale; observăm că gradul numărătorului este $\geq$ decât gradul numitorului deci mai întâi trebuie împărţite polinoamele

$$\begin{aligned}&\int_{y(x_0)}^{y(x)}\frac{u^2-b^2}{u^2+b^2}du=-\int_{x_0}^{x}\frac{t^2+a^2}{t^2-a^2}dt\Leftrightarrow\int_{y(x_0)}^{y(x)}\frac{\left(u^2+b^2\right)-2b^2}{u^2+b^2}du=-\int_{x_0}^{x}\frac{\left(t^2-a^2\right)+2a^2}{t^2-a^2}dt\\ \Leftrightarrow\ &\int_{y(x_0)}^{y(x)}\left(1-2b^2\frac{1}{u^2+b^2}\right)du=-\int_{x_0}^{x}\left(1+2a^2\frac{1}{t^2-a^2}\right)dt\\ \Leftrightarrow\ &\left(u-2b^2\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{u}{b}\right)\Bigg|_{y(x_0)}^{y(x)}=-\left(t+2a^2\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|\right)\Bigg|_{x_0}^{x}\\ \Leftrightarrow\ &y(x)-2b\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{b}-y(x_0)+2b\operatorname{arctg}\frac{y(x_0)}{b}=-x-a\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+x_0+a\ln\left|\frac{x_0-a}{x_0+a}\right|\\ \Leftrightarrow\ &y(x)-2b\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{b}+x+a\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|=C\left(=y(x_0)-2b\operatorname{arctg}\frac{y(x_0)}{b}+x_0+a\ln\left|\frac{x_0-a}{x_0+a}\right|\right)\end{aligned}$$

Deci soluţia s-a obţinut sub formă implicită şi este dată de

$$y(x)-2b\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{b}+x+a\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|=C,\ C\in\mathbb{R}$$

1.2 Ecuaţii liniare (EL)

Sunt ecuaţii de forma

$$y'=a(x)\cdot y+b(x), \tag{3}$$

unde $a,b:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ sunt două funcţii continue pe $\mathbb{I}$.

Teorema 6 *Dacă a, b sunt continue pe $\mathbb{I}$ atunci soluţia generală a ecuaţiei (3) este dată de aşa numita* ***formulă a variaţiei constantelor***

$$y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right)\xi + \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{t}^{x} a(s)\,ds\right) b(t)\,dt, \tag{4}$$

pentru orice $x \in$Dom(y), unde $x_0 \in$Dom(y) fixat, $\xi \in \mathbb{R}$ şi $\exp u \overset{def}{=} e^u$.

Demonstraţie. Fie $y : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ o soluţie a ecuaţiei (3). Fixăm x_0 şi rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă asociată (luând $b(x) \equiv 0$). Ecuaţia (3) devine $y' = a(x)\,y$ care este o EVS deci obţinem

$$\frac{1}{y(x)}y'(x) = a(x) \Rightarrow \frac{1}{y(s)}y'(t) = a(s)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y(s)}y'(s)\,dt = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds \Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{u}du = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \ln y(x) - \ln y(x_0) = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds \Leftrightarrow \ln\frac{y(x)}{y(x_0)} = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds \Leftrightarrow y(x) = y(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right)$$

Deci soluţia ecuaţiei omogene asociate este

$$y(x) = C\cdot\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right)$$

Soluţia ecuaţiei omogene ne sugerează forma soluţiei ecuaţiei liniare propuse; impunem deci ca funcţia

$$y(x) = C(x)\cdot\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) \tag{5}$$

să fie soluţie pentru (3). Obţinem

$$C'(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) + C(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right)a(x) = a(x)\,C(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) + b(x)$$

$$\Leftrightarrow C'(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) = b(x) \Leftrightarrow C'(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right)b(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} C'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds\right)b(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow C(x) = \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds\right)b(t)\,dt + C(x_0) = \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds\right)b(t)\,dt + y(x_0)$$

Deci soluţia dată de (5) este

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds\right)b(t)\,dt + y(x_0)\right)\cdot\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) = \\ &= \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds\right)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right)b(t)\,dt + y(x_0)\cdot\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) = \\ &= \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{t}^{x} a(s)\,ds\right)b(t)\,dt + y(x_0)\cdot\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) \end{aligned}$$

■

Exerciţiul 7 *Să se integreze EL*

$$y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 6x,$$

şi apoi să se determine soluţia care satisface condiţia $y(0) = 1/3$.

Scoatem $y'(x)$ din ecuaţia dată şi obţinem

$$y'(x) = -3 \operatorname{tg} 3x \cdot y(x) + \sin 6x$$

Deci ecuaţia este liniară. *Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă asociată (luând $b(x) \equiv 0$)*

$$y'(x) = -3 \operatorname{tg} 3x \cdot y(x),$$

care este o EVS, deci

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{y(x)} y'(x) = -3 \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow \frac{1}{y(t)} y'(t) = -3 \operatorname{tg} 3t \\
&\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y(t)} y'(t)\, dt = -3 \int_{x_0}^{x} \operatorname{tg} 3t dt \Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{u} du = -3 \int_{x_0}^{x} \operatorname{tg} 3t dt \\
&\Rightarrow \ln y(x) - \ln y(x_0) = -3 \left(-\tfrac{1}{3} \ln \cos 3x + \tfrac{1}{3} \ln \cos 3x_0\right) \\
&\Leftrightarrow \ln \tfrac{y(x)}{y(x_0)} = \ln \tfrac{\cos 3x}{\cos 3x_0} \Leftrightarrow y(x) = C \cdot \cos 3x, \ \textit{ unde } C = \tfrac{y(x_0)}{\cos 3x_0}
\end{aligned}$$

Soluţia ecuaţiei omogene ne sugerează forma soluţiei ecuaţiei liniare propuse; *impunem deci ca funcţia*

$$y(x) = C(x) \cdot \cos 3x$$

să fie soluţie pentru EL Avem

$$y'(x) = C'(x) \cos 3x + C(x) (\cos 3x)' = C'(x) \cos x + 3C(x)(-\sin 3x)$$

Deci trebuie să impunem

$$\begin{aligned}
&C'(x) \cos 3x + 3C(x)(-\sin 3x) = -3 \operatorname{tg} 3x \cdot C(x) \cos 3x + \sin 6x \\
&\Leftrightarrow C'(x) \cos 3x + 3C(x)(-\sin 3x) = -3C(x) \sin 3x + \sin 6x \ \textit{(întot. se vor simplifica doi termeni)} \\
&\Leftrightarrow C'(x) = \frac{\sin 6x}{\cos 3x} = \frac{2 \sin 3x \cos 3x}{\cos 3x} \Rightarrow C(x) = 2 \int \sin 3x dx = \frac{2}{3}(-\cos 3x) + C, \ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

deci soluţia EL propuse este dată explicit de

$$y(x) = \cos 3x \left(C - \frac{2}{3} \cos 3x\right), \ C \in \mathbb{R}$$

Impunem ca soluţia să satisfacă condiţia $y(0) = 1/3$ deci

$$1/3 = \cos 0 \left(C - \frac{2}{3} \cos 0\right) \Leftrightarrow 1/3 = C - \frac{2}{3} \Leftrightarrow C = 1$$

Soluţia EL propuse este

$$y(x) = \cos 3x \left(1 - \frac{2}{3} \cos 3x\right)$$

1.3 Ecuaţii omogene (EO)

Sunt ecuaţii de forma
$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right), \tag{6}$$
unde $h : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este funcţie continuă pe $\mathbb{I}$ şi $h(r) \neq r$, $r \in \mathbb{I}$.

Teorema 8 *Dacă h este continuă pe $\mathbb{I}$ şi $h(r) \neq r, \forall\, r \in \mathbb{I}$, atunci soluţia generală a ecuaţiei (6) este dată de*
$$y(x) = x\,u(x)$$
pentru orice $x \neq 0$, unde u este soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile
$$u' = \frac{1}{x}\left(h(u) - u\right)$$

Demonstraţie. Fie $y : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ o soluţie a ecuaţiei (6). Vom nota
$$\frac{y(x)}{x} = u(x) \Leftrightarrow y(x) = x \cdot u(x)$$
Deci ecuaţia (6) devine
$$u(x) + xu'(x) = h(u(x)) \Leftrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}\left(h(u(x)) - u(x)\right) \tag{7}$$
care este o EVS care se va rezolva conform secţiunii precedente. Revenind la notaţie avem
$$y(x) = x \cdot u(x)$$
unde u este soluţia generală a EVS (7). ■

Exerciţiul 9 *Să se integreze EO*
$$xy' \ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$$
Avem că $\boxed{\text{\textit{funcţia necunoscută este} } y = y(x)}$*. Scoatem $y'(x)$ din ecuaţia dată şi obţinem*
$$y'(x) = \frac{x + y\ln\frac{y}{x}}{x\ln\frac{y}{x}} = \frac{1}{\ln\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$
deci ecuaţie este omogenă. $\boxed{\text{\textit{Pentru a o rezolva trebuie să notăm} } z(x) \overset{def}{=} \dfrac{y(x)}{x}}$ *Deci*
$$y(x) = x \cdot z(x) \Rightarrow y'(x) = z(x) + xz'(x)$$
Ecuaţia devine
$$z(x) + xz'(x) = \tfrac{1}{\ln z(x)} + z(x) \Leftrightarrow z'(x) = \tfrac{1}{x\ln z(x)} \text{ (E.V.S.)} \Leftrightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \ln z(t) \cdot z'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow \int_{z(x_0)}^{z(x)} \ln u \cdot du = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}dt$$
$$\Leftrightarrow u(\ln u - 1)\Big|_{z(x_0)}^{z(x)} = \ln x - \ln x_0 \Leftrightarrow z(x)(\ln z(x) - 1) = \ln x + C,\ C \in \mathbb{R}$$
Revenind la definiţia $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ obţinem soluţia $y(x)$ sub formă implicită dată de
$$\frac{y(x)}{x}\left(\ln\frac{y(x)}{x} - 1\right) = \ln x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

1.4 Ecuaţii Bernoulli (EB)

Sunt ecuaţii de forma

$$y' = a(x)\, y + b(x)\, y^{\alpha}, \tag{8}$$

unde $a, b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue, neidentic nule şi care nu sunt proporţionale pe $\mathbb{I}$, iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Remarca 10 *Restricţiile sunt explicate de faptul că: dacă luăm $a \equiv 0$ sau $b \equiv 0$ sau $a \equiv \lambda\, b$ atunci ecuaţia (8) devine o EVS; dacă luăm $\alpha = 0$ atunci ecuaţia (8) devine o EL; dacă luăm $\alpha = 1$ atunci ecuaţia (8) devine o EVS.*

Teorema 11 *Dacă a, b sunt două funcţii continue, neidentic nule şi care nu sunt proporţionale pe $\mathbb{I}$, iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ atunci y este soluţia generală a ecuaţiei (8) dacă şi numai dacă funcţia definită de*

$$z(x) \overset{def}{=} y^{1-\alpha}(x)\ ,\ x \in Dom\,(y)$$

este soluţie pentru ecuaţia liniară

$$z' = (1 - \alpha)\, a(x)\, z + (1 - \alpha)\, b(x) \tag{9}$$

Demonstraţie. Fie $y : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ o soluţie a ecuaţiei (8). Împart ecuaţia prin y^{α} şi obţin

$$y'(x)\, y^{-\alpha}(x) = a(x)\, y^{1-\alpha}(x) + b(x)$$

Notand cu $z(x) = y^{1-\alpha}(x) \Rightarrow z'(x) = (1 - \alpha)\, y^{-\alpha}(x)\ y'(x)$ şi ecuaţia devine

$$\frac{1}{1-\alpha}\, z'(x) = a(x)\, z(x) + b(x) \Leftrightarrow z'(x) = (1 - \alpha)\, a(x)\, z(x) + (1 - \alpha)\, b(x)$$

care este o EL. Revenind la notaţie avem

$$y(x) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}(x)$$

■

1.5 Ecuaţii diferenţiale totale exacte (EDTE)

Fie ecuaţia

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0, \tag{10}$$

unde P, Q sunt două funcţii de clasă C^1 pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$.

Definiţia 12 *O ecuaţie de forma (10) se numeşte ecuaţie diferenţială totală exactă dacă forma diferenţială $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ este exactă, adică dacă există funcţia $F : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 astfel încât*

$$dF(x, y) = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \end{cases} \tag{11}$$

Remarca 13 *Orice ecuaţie de forma (10) se poate pune sub formă explicită, în ipoteza $Q(x,y) \neq 0$, împărţindu-se prin dx :*

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Teorema 14 *Dacă ecuaţia (10) este exactă atunci soluţia sa generală este dată implicit de ecuaţia*

$$F(x,y) = c,$$

unde F este o primitivă a formei diferenţiale $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, adică verifică sistemul (11).

Demonstraţie. Fie y o soluţie a ecuaţiei (10). Deci are loc

$$P(x, y(x))\,dx + Q(x, y(x))\,dy(x) = 0, \ \forall x \in Dom(y)$$

ceea ce este echivalent, folosind faptul că forma diferenţială de mai sus admite primitive, că

$$dF(x, y(x)) = 0, \ \forall x \in Dom(y)$$

Prin integrare obţinem atunci concluzia teoremei. ∎

Teorema 15 *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca ecuaţia (11) să fie exactă este ca să aibă loc*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\ , \ \forall (x,y) \in D$$

2 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n cu coeficienţi constanţi

În continuare vom descrie o metodă de a obţine un sistem fundamental de soluţii şi apoi soluţia generală a unei ecuaţii liniare de ordin n cu coeficienţi constanţi. Să remarcăm că în cazul general al ecuaţiilor cu coeficienţi variabili nu sunt cunoscute asemenea metode de determinare a soluţiei.

Fie următoarea **ecuaţie liniară de ordin n cu coeficienţi constanţi** şi **omogenă**

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{12}$$

unde $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

Definiţia 16 ***Ecuaţia caracteristică*** *a ecuaţiei (12) este dată de*

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{13}$$

*(polinomul din partea stângă este numit **polinomul caracterisitic**)*

Teorema 17 *Fie $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ rădăcinile ecuaţiei caracteristice (13) cu ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, ..., m_s$. Atunci, un sistem fundamental de soluţii pentru (12) (adică o mulţime de funcţii care să genereze soluţia generală a ecuaţiei) este dat de*

$$\mathcal{F} = \cup_{j=1}^{s} \mathcal{F}_j,$$

unde, dacă λ_j este real cu ordinul de multiplicitate m_j,

$$\mathcal{F}_j = \left\{ e^{\lambda_j x}, xe^{\lambda_j x}, ..., x^{m_j - 1} e^{\lambda_j x} \right\},$$

iar dacă λ_j nu este real (este de forma $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$) atunci

$$\mathcal{F}_j = \mathcal{G}_j \cup \mathcal{H}_j,$$

unde

$$\mathcal{G}_j = \left\{ e^{\alpha_j x} \cos\left(\beta_j x\right), xe^{\alpha_j x} \cos\left(\beta_j x\right), ..., x^{m_j - 1} e^{\alpha_j x} \cos\left(\beta_j x\right) \right\}$$

şi

$$\mathcal{H}_j = \left\{ e^{\alpha_j x} \sin\left(\beta_j x\right), xe^{\alpha_j x} \sin\left(\beta_j x\right), ..., x^{m_j - 1} e^{\alpha_j x} \sin\left(\beta_j x\right) \right\}$$

Remarca 18 *Dacă $y_1, y_2, ..., y_n$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă (12) atunci soluţia generală a ecuaţiei (12) este dată de*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x), \; c_i \in \mathbb{R}, \; i = \overline{1, n}\,.$$

Fie în continuare următoarea **ecuaţie liniară de ordin** n **cu coeficienţi constanţi** şi **neomogenă**

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{14}$$

unde $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ iar f este o funcţie continuă pe un interval.

Teorema 19 (metoda variaţiei constantelor) *Fie $y_1, y_2, ..., y_n$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă ataşată ecuaţiei (14) (obţinută luând $f \equiv 0$). Soluţia generală a ecuaţiei (14) este dată de*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i(x),$$

unde c_i sunt funcţiile de clasă C^1 soluţie a sistemului

$$\begin{cases} c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) + \cdots + c_n'(x)\, y_n(x) = 0 \\ c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) + \cdots + c_n'(x)\, y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)\, y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases} \tag{15}$$

Exerciţiul 20 *Să se determine soluţia ecuaţiei omogene $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ care îndeplineşte condiţiile iniţiale $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$.*

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$ deci avem rădăcinile reale $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$, deci sistemul fundamental de soluţii este

$$\left\{ e^{2x}, e^{-2x}, e^{-x} \right\}$$

deci soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-x},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Impunând condiţiile iniţiale, şi folosind $y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x} - c_3 e^{-x}$, $y''(x) = 4c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-x}$, *obţinem sistemul*

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 2c_1 - 2c_2 - c_3 = -1 \\ 4c_1 + 4c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

Soluţia este $c_1 = \frac{-1}{2}$, $c_2 = \frac{-1}{4}$, $c_3 = \frac{4}{3}$, *deci soluţia problemei Cauchy este*

$$y(x) = \frac{-1}{2} e^{2x} + \frac{-1}{4} e^{-2x} + \frac{4}{3} e^{-x}$$

Exerciţiul 21 *Să se determine soluţia ecuaţiei omogene* $y^{(4)} - y = 0$ *care îndeplineşte condiţiile iniţiale* $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = -1$.

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)\left(\lambda^2 + 1\right) = 0$ *deci avem rădăcinile reale* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ *şi rădăcinile complexe* $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$, *deci sistemul fundamental de soluţii este*

$$\left\{e^{x}, e^{-x}, e^{0x}\cos x, e^{0x}\sin x, e^{0x}\cos(-x), e^{0x}\sin(-x)\right\} = \left\{e^{x}, e^{-x}, \cos x, \sin x\right\}$$

deci soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x,\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Impunând condiţiile iniţiale, şi folosind $y'(x) = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} - c_3 \sin x + c_4 \cos x$, $y''(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$, $y'''(x) = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + c_3 \sin x - c_4 \cos x$, *obţinem sistemul*

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 - c_4 = 0 \end{cases}$$

Soluţia este $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{-1}{2}$, $c_4 = \frac{1}{2}$, *deci soluţia problemei Cauchy este*

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{-1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

Exerciţiul 22 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei omogene* $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2y' + y = 0$.

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda^2 + \lambda + 1\right)^2 = 0$ *deci avem rădăcinile complexe duble* $\lambda_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, *deci sistemul fundamental de soluţii este (ţinem cont că* $m_1 = 2$, $m_2 = 2$*) reuniunea mulţimilor*

$$\left\{e^{\frac{-1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), xe^{\frac{-1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), e^{\frac{-1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), xe^{\frac{-1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$$

şi

$$\left\{e^{\frac{-1}{2}x}\cos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}x\right), xe^{\frac{-1}{2}x}\cos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}x\right), e^{\frac{-1}{2}x}\sin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}x\right), xe^{\frac{-1}{2}x}\sin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$$

adică sistemul fundamental de soluţii este

$$\left\{e^{\frac{-1}{2}x}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right), xe^{\frac{-1}{2}x}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right), e^{\frac{-1}{2}x}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right), xe^{\frac{-1}{2}x}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y(x) = c_1 e^{\frac{-1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 x e^{\frac{-1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 e^{\frac{-1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 x e^{\frac{-1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

unde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 23 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei neomogene* $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$, $x \neq \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Se rezolvă mai întâi ecuaţia omogenă asociată

$$y'' + 4y = 0$$

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 + 4 = 0$ *deci avem rădăcinile complexe simple* $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$ *deci sistemul fundamental de soluţii este*

$$\left\{e^{0x}\cos(2x), e^{0x}\sin(2x), e^{0x}\cos(-2x), e^{0x}\sin(-2x)\right\} = \{\cos 2x, \sin 2x\}$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogenă este

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru a determina soluţia generală a ecuaţie neomogene date folosim metoda variaţiei constantelor, adică soluţia generală a ecuaţiei neomogene este dată de

$$y(x) = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x,$$

unde funcţiile $c_1(x)$, $c_2(x)$ *sunt date prin integrare de sistemul (vezi sistemul (15))*

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos 2x + c_2'(x)\sin 2x = 0 \\ -2c_1'(x)\sin 2x + 2c_2'(x)\cos 2x = \frac{1}{\cos 2x} \end{cases}$$

cu soluţia $c_2'(x) = \frac{1}{2}$, $c_1'(x) = \frac{-1}{2}tg(2x)$. *Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este*

$$y(x) = \left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + c_1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x + c_2\right)\sin 2x$$

Exerciţiul 24 *a)* $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
b) $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2+6x+2}{x^2}e^{3x}$
c) $y'' + 4y = 26e^{3x}$
d) $y'' + 4y' + 13y = 29\sin 2x$