Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului
Analiza Matematică II, Semestrul II
Conf. dr. Lucian MATICIUC

SEMINAR 14

Capitolul VII. Ecuaţii diferenţiale

1. Să se integreze ecuaţia diferenţială cu variabile separabile (E.V.S.)

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{y+1}=0,\ (x,y)\in(-1,1)\times(-1,\infty)$$

Indicaţie:

$$\boxed{\text{funcţia necunoscută este } y=y(x)}$$

deci au loc formulele

$$\boxed{dy=y'(x)\,dx \ \Leftrightarrow\ \frac{dy}{dx}=y'(x)}$$

Scoatem mai întâi $y'(x)$ din ecuaţia dată (împărţind ecuaţia prin dx) şi obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{y(x)+1}y'(x)=0\Leftrightarrow y'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(y(x)+1)$$

deci avem o ecuaţie cu variabile separabile (E.V.S.) de tipul

$$y'(x)=f(x)\cdot g(y(x))$$

Vom separa efectiv variabilele, lăsând $y'(x)$ la numărător

$$\frac{1}{y(x)+1}y'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

rescriu variabila de integrare în t şi apoi integrez de la x_0 la x:

$$\frac{1}{y(t)+1}y'(t)=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

deci

$$\int_{x_0}^{x}\frac{1}{y(t)+1}y'(t)\,dt=-\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Facem $\boxed{\text{schimbarea de variabilă } y(t)=u}$ deci $\boxed{du=y'(t)\,dt}$ şi obţinem

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)}\frac{1}{u+1}du=-\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\Leftrightarrow \ln(u+1)\big|_{y(x_0)}^{y(x)}=-\arcsin t\big|_{x_0}^{x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(y(x)+1)-\ln(y(x_0)+1)=-\arcsin x+\arcsin x_0$$

$$\Leftrightarrow \ln(y(x)+1)+\arcsin x=C\quad(=\ln(y(x_0)+1)+\arcsin x_0)$$

Deci soluţia s-a obţinut sub formă implicită este dată de

$$\ln(y(x)+1)+\arcsin x=C,\ C\in\mathbb{R}$$

2. Să se determine soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile (E.V.S.)
$$3e^x \mathrm{tg} y\, dx + (1+e^x)\,\frac{1}{\cos^2 y}\, dy = 0$$
şi apoi să se determine soluţia al cărei grafic trece prin punctul $(0, \pi/4)$.
Indicaţie:

Avem că $\boxed{\text{funcţia necunoscută este } y = y(x)}$, deci au loc formulele $\boxed{dy = y'(x)\, dx \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = y'(x)\,.}$

Scoatem $y'(x)$ din ecuaţia dată (împărţind ecuaţia prin dx) şi obţinem
$$3e^x \mathrm{tg} y + (1+e^x)\sec^2 y\; y'(x) = 0 \Leftrightarrow y'(x) = -\frac{3e^x \mathrm{tg} y}{(1+e^x)\sec^2 y}$$
$$\Leftrightarrow y'(x) = -\frac{3e^x}{(1+e^x)} \cdot \mathrm{tg} y(x) \cdot \cos^2 y(x) = -\frac{3e^x}{(1+e^x)} \cdot \sin y(x) \cos y(x)$$
deci avem o (E.V.S.).

Vom separa efectiv variabilele, lăsând $y'(x)$ la numărător
$$\frac{1}{\sin y(x) \cos y(x)} y'(x) = -\frac{3e^x}{(1+e^x)},$$
rescriu variabila de integrare în t şi apoi integrez de la x_0 la x:
$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sin y(t) \cos y(t)} y'(t)\, dt = -\int_{x_0}^{x} \frac{3e^t}{(1+e^t)} dt$$
Facem $\boxed{\text{schimbarea de variabilă } y(t) = u}$ deci $\boxed{du = y'(t)\, dt}$ şi obţinem
$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{\sin u \cos u} du = -\int_{x_0}^{x} \frac{3e^t}{(1+e^t)} dt \Leftrightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{2}{\sin 2u} du = -\int_{x_0}^{x} \frac{3\left(1+e^t\right)'}{(1+e^t)} dt$$
$$\Leftrightarrow 2\,\frac{1}{2} \ln \mathrm{tg} \frac{2u}{2}\Big|_{y(x_0)}^{y(x)} = -3 \ln\left(1+e^t\right)\Big|_{x_0}^{x}$$
$$\Leftrightarrow \ln \mathrm{tg}\, y(x) - \ln \mathrm{tg}\, y(x_0) = -3\ln(1+e^x) + 3\ln(1+e^{x_0})$$
$$\Leftrightarrow \ln \tfrac{\mathrm{tg}\, y(x)}{\mathrm{tg}\, y(x_0)} = -3 \ln \tfrac{1+e^x}{1+e^{x_0}} \Leftrightarrow \ln \tfrac{\mathrm{tg}\, y(x)}{\mathrm{tg}\, y(x_0)} = \ln\left(\tfrac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right)^{-3}$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{\mathrm{tg}\, y(x)}{\mathrm{tg}\, y(x_0)} = \left(\tfrac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right)^{-3} \Leftrightarrow \mathrm{tg}\, y(x) = \tfrac{C}{(1+e^x)^3}, \quad \text{unde } C = \mathrm{tg}\, y(x_0)\,(1+e^{x_0})^3$$
Deci soluţia s-a obţinut sub formă explicită şi este dată de
$$y(x) = \mathrm{arctg}\, \frac{C}{(1+e^x)^3}$$
Impunând condiţia ca graficul soluţiei să treacă prin punctul $(0, \pi/4)$ obţinem
$$y(0) = \pi/4$$
deci
$$\pi/4 = \mathrm{arctg}\, \frac{C}{(1+e^0)^3} \Leftrightarrow \pi/4 = \mathrm{arctg}\, \frac{C}{8} \Leftrightarrow \frac{C}{8} = \mathrm{tg}\, \pi/4 \Leftrightarrow C = 8$$

3. Să se determine soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile (E.V.S.)

$$\left(x^2+a^2\right)\left(y^2+b^2\right)dx+\left(x^2-a^2\right)\left(y^2-b^2\right)dy=0$$

Indicaţie: Avem că $\boxed{\text{funcţia necunoscută este } y=y\left(x\right)}$, deci au loc formulele

$$\boxed{dy=y'\left(x\right)dx \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx}=y'\left(x\right).}$$

Scoatem $y'\left(x\right)$ din ecuaţia dată (împărţind ecuaţia prin dx) şi obţinem

$$\left(x^2+a^2\right)\left(y^2+b^2\right)+\left(x^2-a^2\right)\left(y^2-b^2\right)y'\left(x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y'\left(x\right)=-\frac{\left(x^2+a^2\right)\left(y^2\left(x\right)+b^2\right)}{\left(x^2-a^2\right)\left(y^2\left(x\right)-b^2\right)}=-\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{y^2\left(x\right)+b^2}{y^2\left(x\right)-b^2}$$

deci avem o (E.V.S.).

Vom separa efectiv variabilele, lăsând $y'\left(x\right)$ la numărător

$$\frac{y^2\left(x\right)-b^2}{y^2\left(x\right)+b^2}y'\left(x\right)=-\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2},$$

rescriu variabila de integrare în t şi apoi integrez de la x_0 la x:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{y^2\left(t\right)-b^2}{y^2\left(t\right)+b^2}y'\left(t\right)dt=-\int_{x_0}^{x}\frac{t^2+a^2}{t^2-a^2}dt$$

Facem $\boxed{\text{schimbarea de variabilă } y\left(t\right)=u}$ deci $\boxed{du=y'\left(t\right)dt}$ şi obţinem

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)}\frac{u^2-b^2}{u^2+b^2}du=-\int_{x_0}^{x}\frac{t^2+a^2}{t^2-a^2}dt,$$

asică integrale din funcţii raţionale; observăm că gradul numărătorului este $\geq$ decât gradul numitorului deci mai întâi trebuie împărţite polinoamele

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)}\frac{u^2-b^2}{u^2+b^2}du=-\int_{x_0}^{x}\frac{t^2+a^2}{t^2-a^2}dt\Leftrightarrow\int_{y(x_0)}^{y(x)}\frac{\left(u^2+b^2\right)-2b^2}{u^2+b^2}du=-\int_{x_0}^{x}\frac{\left(t^2-a^2\right)+2a^2}{t^2-a^2}dt$$

$$\Leftrightarrow\int_{y(x_0)}^{y(x)}\left(1-2b^2\frac{1}{u^2+b^2}\right)du=-\int_{x_0}^{x}\left(1+2a^2\frac{1}{t^2-a^2}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow\left(u-2b^2\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{u}{b}\right)\Big|_{y(x_0)}^{y(x)}=-\left(t+2a^2\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|\right)\Big|_{x_0}^{x}$$

$$\Leftrightarrow y\left(x\right)-2b\operatorname{arctg}\frac{y\left(x\right)}{b}-y\left(x_0\right)+2b\operatorname{arctg}\frac{y\left(x_0\right)}{b}=-x-a\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+x_0+a\ln\left|\frac{x_0-a}{x_0+a}\right|$$

$$\Leftrightarrow y\left(x\right)-2b\operatorname{arctg}\frac{y\left(x\right)}{b}+x+a\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|=C\quad\left(=y\left(x_0\right)-2b\operatorname{arctg}\frac{y\left(x_0\right)}{b}+x_0+a\ln\left|\frac{x_0-a}{x_0+a}\right|\right)$$

Deci soluţia s-a obţinut sub formă implicită şi este dată de

$$y\left(x\right)-2b\operatorname{arctg}\frac{y\left(x\right)}{b}+x+a\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|=C,\ C\in\mathbb{R}$$

4. Să se integreze ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi (E.L.)

$$y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 6x$$

şi apoi să se determine soluţia care satisface condiţia $y(0) = 1/3$.

Indicaţie: Avem că $\boxed{\text{funcţia necunoscută este } y = y(x)}$. Scoatem $y'(x)$ din ecuaţia dată şi obţinem

$$y'(x) = -3 \operatorname{tg} 3x \cdot y(x) + \sin 6x$$

Deci ecuaţia este liniară (E.L.). $\boxed{\text{Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă asociată (luând } b(x) \equiv 0)}$

$$y'(x) = -3 \operatorname{tg} 3x \cdot y(x),$$

care este o (E.V.S.), deci

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{y(x)} y'(x) = -3 \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow \frac{1}{y(t)} y'(t) = -3 \operatorname{tg} 3t \\
&\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y(t)} y'(t)\, dt = -3 \int_{x_0}^{x} \operatorname{tg} 3t dt \Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{u} du = -3 \int_{x_0}^{x} \operatorname{tg} 3t dt \\
&\Rightarrow \ln y(x) - \ln y(x_0) = -3 \left(-\tfrac{1}{3} \ln \cos 3x + \tfrac{1}{3} \ln \cos 3x_0\right) \\
&\Leftrightarrow \ln \tfrac{y(x)}{y(x_0)} = \ln \tfrac{\cos 3x}{\cos 3x_0} \Leftrightarrow y(x) = C \cdot \cos 3x, \ \ \text{unde } C = \tfrac{y(x_0)}{\cos 3x_0}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Soluţia ecuaţiei omogene ne sugerează forma soluţiei ecuaţiei liniare propuse}}$; impunem deci ca funcţia

$$y(x) = C(x) \cdot \cos 3x$$

să fie soluţie pentru E.L. Avem

$$y'(x) = C'(x) \cos 3x + C(x) (\cos 3x)' = C'(x) \cos x + 3C(x)(-\sin 3x)$$

Deci trebuie să impunem

$$\begin{aligned}
&C'(x) \cos 3x + 3C(x)(-\sin 3x) = -3 \operatorname{tg} 3x \cdot C(x) \cos 3x + \sin 6x \\
&\Leftrightarrow C'(x) \cos 3x + 3C(x)(-\sin 3x) = -3C(x) \sin 3x + \sin 6x \text{ (întotdeauna se vor simplifica doi termeni)} \\
&\Leftrightarrow C'(x) = \frac{\sin 6x}{\cos 3x} = \frac{2 \sin 3x \cos 3x}{\cos 3x} \Rightarrow C(x) = 2 \int \sin 3x dx = \frac{2}{3}(-\cos 3x) + C, \ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

deci soluţia E.L. propuse este dată explicit de

$$y(x) = \cos 3x \left(C - \frac{2}{3} \cos 3x\right), \ C \in \mathbb{R}$$

Impunem ca soluţia să satisfacă condiţia $y(0) = 1/3$ deci

$$1/3 = \cos 0 \left(C - \frac{2}{3} \cos 0\right) \Leftrightarrow 1/3 = C - \frac{2}{3} \Leftrightarrow C = 1$$

Soluţia E.L. propuse este

$$y(x) = \cos 3x \left(1 - \frac{2}{3} \cos 3x\right)$$

5. Să se integreze ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi (E.L.)

$$y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$$

şi apoi să se determine soluţia care satisface condiţia $y(\pi/4) = 1$.

Indicaţie:

$$y'(x) = \frac{\operatorname{tg} x - y(x)}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\cos^2 x} y(x) + \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

Deci ecuaţia este liniară (E.L.). $\boxed{\text{Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă asociată (luând } b(x) \equiv 0)}$

$$y'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x} \cdot y(x),$$

care este o (E.V.S.), deci

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{y(x)} y'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{y(t)} y'(t) = -\frac{1}{\cos^2 t} \\
&\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y(t)} y'(t)\, dt = -\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\cos^2 t} dt \Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{u} du = -\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\cos^2 t} dt \\
&\Rightarrow \ln y(x) - \ln y(x_0) = -(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0) \Leftrightarrow \ln y(x) = C - \operatorname{tg} x \\
&\Leftrightarrow y(x) = e^{C - \operatorname{tg} x} = e^{C} e^{-\operatorname{tg} x} \Rightarrow y(x) = C \cdot e^{-\operatorname{tg} x}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Soluţia ecuaţiei omogene ne sugerează forma soluţiei ecuaţiei liniare propuse}}$; impunem deci ca funcţia

$$y(x) = C(x) \cdot e^{-\operatorname{tg} x}$$

să fie soluţie pentru E.L. Avem

$$\begin{aligned}
&y'(x) = C'(x) \cdot e^{-\operatorname{tg} x} + C(x) \left(e^{-\operatorname{tg} x}\right)' = C'(x) \cdot e^{-\operatorname{tg} x} + C(x) e^{-\operatorname{tg} x} (-\operatorname{tg} x)' \\
&\Leftrightarrow y'(x) = C'(x) \cdot e^{-\operatorname{tg} x} + C(x) e^{-\operatorname{tg} x} \tfrac{-1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

Deci trebuie să impunem

$$C'(x) \cdot e^{-\operatorname{tg} x} + C(x) e^{-\operatorname{tg} x} \tfrac{-1}{\cos^2 x} = \tfrac{-1}{\cos^2 x} C(x) \cdot e^{-\operatorname{tg} x} + \tfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

(întotdeauna se vor simplifica doi termeni)

$$\Leftrightarrow C'(x) = e^{\operatorname{tg} x} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \Rightarrow C(x) = \int e^{\operatorname{tg} x} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg} x\, e^{\operatorname{tg} x} (\operatorname{tg} x)'\, dx$$

$$\Rightarrow C(x) = \int t\, e^{t} dt = \text{(int. prin părţi)} = (t-1) e^{t} + C = (\operatorname{tg} x - 1) e^{\operatorname{tg} x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

deci soluţia E.L. propuse este dată explicit de

$$y(x) = \left((\operatorname{tg} x - 1) e^{\operatorname{tg} x} + C\right) e^{-\operatorname{tg} x}, \ C \in \mathbb{R}$$

Impunem ca soluţia să satisfacă condiţia $y(\pi/4) = 1$ deci

$$1 = \left((\operatorname{tg} \pi/4 - 1) e^{\operatorname{tg} \pi/4} + C\right) e^{-\operatorname{tg} \pi/4} \Leftrightarrow 1 = \left((1-1) e^{1} + C\right) e^{-1} \Leftrightarrow C = e$$

Soluţia E.L. propuse este

$$y(x) = (\operatorname{tg} x - 1) + e^{1 - \operatorname{tg} x}$$

6. Să se integreze ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi (E.L.)

$$y' + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

Indicaţie:

Avem că $\boxed{\text{funcţia necunoscută este } y = y(x)}$. Scoatem $y'(x)$ din ecuaţia dată şi obţinem

$$y'(x) = -\operatorname{tg} x \cdot y(x) + \frac{1}{\cos x}$$

Deci ecuaţia este liniară (E.L.), adică ecuaţia este de forma

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$$

Pentru a găsi soluţia generală trebuie să $\boxed{\text{rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă asociată (luând } b(x) \equiv 0)}$

$$y'(x) = -\operatorname{tg} x \cdot y(x)\,,$$

care este o (E.V.S.), deci

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{y(x)} y'(x) = -\operatorname{tg} x \Leftrightarrow \frac{1}{y(t)} y'(t) = -\operatorname{tg} t \\
&\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y(t)} y'(t)\, dt = -\int_{x_0}^{x} \operatorname{tg} t dt \Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{u} du = -\int_{x_0}^{x} \operatorname{tg} t dt \\
&\Rightarrow \ln y(x) - \ln y(x_0) = -(-\ln\cos x + \ln\cos x_0) \\
&\Leftrightarrow \ln \tfrac{y(x)}{y(x_0)} = \ln \tfrac{\cos x}{\cos x_0} \Leftrightarrow y(x) = C \cdot \cos x, \quad \text{unde } C = \tfrac{y(x_0)}{\cos x_0}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Soluţia ecuaţiei omogene ne sugerează forma soluţiei ecuaţiei liniare propuse}}$; impunem deci ca funcţia

$$y(x) = C(x) \cdot \cos x$$

să fie soluţie pentru E.L. Avem

$$y'(x) = C'(x)\cos x + C(x)(\cos x)' = C'(x)\cos x + C(x)(-\sin x)$$

Deci trebuie să impunem

$$\begin{aligned}
&C'(x)\cos x + C(x)(-\sin x) = -\operatorname{tg} x \cdot C(x)\cos x + \frac{1}{\cos x} \\
&\Leftrightarrow C'(x)\cos x + C(x)(-\sin x) = -C(x)\sin x + \frac{1}{\cos x}
\end{aligned}$$

(întotdeauna se vor simplifica doi termeni)

$$\Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow C(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

deci soluţia E.L. propuse este

$$y(x) = (\operatorname{tg} x + C) \cdot \cos x = \sin x + C\ \cos x,\ C \in \mathbb{R}$$

7. Să se integreze ecuaţia diferenţială omogenă (E.O.)

$$xyy' = y^2 + 2x^2$$

Indicaţie: Avem că $\boxed{\text{funcţia necunoscută este } y = y(x)}$. Scoatem $y'(x)$ din ecuaţia dată şi obţinem

$$y'(x) = \frac{1}{xy}\left(y^2 + 2x^2\right) = \frac{y}{x} + \frac{2x}{y} = \frac{y}{x} + \frac{2}{\frac{y}{x}}$$

deci ecuaţie este omogenă (E.O.) de tipul

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

$\boxed{\text{Pentru a o rezolva trebuie să notăm } z(x) \overset{def}{=} \frac{y(x)}{x}}$ Deci

$$y(x) = x \cdot z(x) \Rightarrow y'(x) = z(x) + xz'(x)$$

Ecuaţia devine

$$z(x) + xz'(x) = z(x) + \tfrac{2}{z(x)} \Rightarrow z'(x) = \tfrac{2}{x}\tfrac{1}{z(x)} \text{ (E.V.S.)} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} z(t)\, z'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \frac{2}{t} dt \Leftrightarrow \int_{z(x_0)}^{z(x)} u du = \int_{x_0}^{x} \frac{2}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(z^2(x) - z^2(x_0)\right) = 2\ln x - 2\ln x_0 \Leftrightarrow z^2(x) = 4\ln x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Revenind la substituţia iniţială obţinem

$$y^2(x) = x^2 \cdot z^2(x) \Rightarrow y^2(x) = x^2 \cdot (4\ln x + C),\ C \in \mathbb{R}$$

8. Să se integreze ecuaţia diferenţială omogenă (E.O.)

$$xy' \ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$$

Indicaţie: Avem că $\boxed{\text{funcţia necunoscută este } y = y(x)}$. Scoatem $y'(x)$ din ecuaţia dată şi obţinem

$$y'(x) = \frac{x + y\ln\frac{y}{x}}{x\ln\frac{y}{x}} = \frac{1}{\ln\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

deci ecuaţie este omogenă (E.O.). $\boxed{\text{Pentru a o rezolva trebuie să notăm } z(x) \overset{def}{=} \frac{y(x)}{x}}$ Deci

$$y(x) = x \cdot z(x) \Rightarrow y'(x) = z(x) + xz'(x)$$

Ecuaţia devine

$$z(x) + xz'(x) = \tfrac{1}{\ln z(x)} + z(x) \Leftrightarrow z'(x) = \tfrac{1}{x\ln z(x)} \text{ (E.V.S.)} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \ln z(t) \cdot z'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t} dt \Leftrightarrow \int_{z(x_0)}^{z(x)} \ln u \cdot du = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow u(\ln u - 1)\Big|_{z(x_0)}^{z(x)} = \ln x - \ln x_0 \Leftrightarrow z(x)(\ln z(x) - 1) = \ln x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Revenind la definiţia $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ obţinem soluţia $y(x)$ sub formă implicită dată de

$$\frac{y(x)}{x}\left(\ln\frac{y(x)}{x} - 1\right) = \ln x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

9. (Temă) Să se integreze următoarele E.O.

$$a)\ y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}\ , \qquad b)\ xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

10. Să se integreze ecuaţia diferenţială de tip Bernoulli (E.B.)

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2y^4$$

Indicaţie:

$$y'(x) = -\frac{1}{x}\cdot y(x) + x^2\cdot y^4(x)$$

Deci ecuaţia este Bernoulli (E.B.) de tipul general

$$y'(x) = a(x)\cdot y(x) + b(x)\cdot y^{\alpha}(x)\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

Pentru a o rezolva $\boxed{\text{trebuie să împărţim ecuaţia prin } y^{\alpha}(x)}$ şi obţinem

$$y^{-4}(x)\,y'(x) = -\frac{1}{x}\cdot y^{-3}(x) + x^2$$

$\boxed{\text{În continuare facem substituţia } z(x) \overset{def}{=} y^{1-\alpha}(x) \text{ deci } z'(x) = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}(x)\,y'(x)}$

În cazul nostru

$$z(x) \overset{def}{=} y^{-3}(x) \text{ deci } z'(x) = -3y^{-4}(x)\,y'(x) \Rightarrow y^{-4}(x)\,y'(x) = \frac{1}{-3}z'(x)$$

Ecuaţia devine

$$\frac{1}{-3}z'(x) = -\frac{1}{x}z(x) + x^2 \Leftrightarrow z'(x) = 3\frac{1}{x}\cdot z(x) - 3x^2$$

care este o E.L. Rezolvăm mai întâi

$$z'(x) = 3\frac{1}{x}\cdot z(x)$$

care are soluţia **(calcul temă)**

$$z(x) = C\cdot x^3$$

Soluţia ecuaţiei omogene ne sugerează forma soluţiei ecuaţiei liniare propuse; impunem deci ca funcţia

$$z(x) = C(x)\cdot x^3$$

să fie soluţie pentru E.L. Avem

$$C'(x)\cdot x^3 + C(x)\cdot 3x^2 = 3\frac{1}{x}\cdot C(x)\cdot x^3 - 3x^2 \text{ (întotdeauna se vor simplifica doi termeni)}$$
$$\Leftrightarrow C'(x) = -3x^2/x^3 = -3/x \Rightarrow C(x) = \int -3/x dx = -3\ln x + C,\ C\in\mathbb{R}$$

deci soluţia E.L. este dată explicit de

$$z(x) = \left(C - \ln x^3\right)\cdot x^3,\ C\in\mathbb{R}$$

Revenind la substituţia iniţială obţinem

$$y(x) = z^{\frac{1}{1--\alpha}}(x)$$

deci

$$y(x) = (z(x))^{-1/3} = \left(\left(C - \ln x^3\right)x^3\right)^{-1/3} = x^{-1}\left(C - \ln x^3\right)^{-1/3},\ C\in\mathbb{R}$$

11. (Temă) Să se integreze următoarea E.B.

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 4\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{y}$$

Indicaţie:

$$y'(x) = \frac{2x}{1+x^2}\cdot y(x) + 4\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot y^{1/2}(x)$$

12. Să se integreze ecuaţia diferenţială totală exactă (E.D.T.E.)

$$\left(3x^2y + \sin x\right)dx + \left(x^3 - \cos y\right)dy = 0$$

Indicaţie:

Această ecuaţie este o formă diferenţială care se va studia dacă este exactă (conform Seminarului 7).

Deci ecuaţia este de forma

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

Verificăm

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow 3x^2 = 3x^2 \text{ (adevărat)}$$

deci forma este **diferenţială totală exactă**, adică există primitiva $F(x,y)$ astfel încât

$$dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q \end{cases}$$

deci

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + \sin x \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^3 - \cos y \end{cases}$$

Din prima ecuaţia rezultă

$$F(x,y) = \int \left(3x^2y + \sin x\right) dx = x^3y + (-\cos x) + c(y)$$

şi folosind a doua ecuaţie obţinem

$$\begin{aligned}&\left(x^3y + (-\cos x) + c(y)\right)'_y = x^3 - \cos y \Leftrightarrow x^3 + c'(y) = x^3 - \cos y\\ &\Leftrightarrow c'(y) = -\cos y \Leftrightarrow c(y) = \textstyle\int (-\cos y)\, dy = -\sin y + c\end{aligned}$$

Deci primitiva este

$$F(x,y) = x^3y + (-\cos x) - \sin y + c,\ c \in \mathbb{R}$$

iar ecuaţia iniţială este

$$dF(x,y) = 0 \Rightarrow F(x,y) = C$$

deci soluţia $y(x)$ este dată implicit de ecuaţia

$$x^3y - \cos x - \sin y = C,\ C \in \mathbb{R}$$