Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

SEMINAR 14

Funcţii de mai multe variabile (continuare)

1. Să se arate că funcţia $z\left(x,y\right)$ definită implicit de ecuaţia $f(\dfrac{x}{y}, y-\dfrac{z}{x})=0$ verifică relaţia $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$

Rezolvare:

Ecuaţia dată defineşte în mod implicit pe z ca funcţie de x şi y deoarece este de tipul $F\left(x,y,z\right)=0$ (vezi Seminarul 12, exerciţiul 5). În acest caz ecuaţia devine

$$f\left(\tfrac{x}{y}, y-\tfrac{z(x,y)}{x}\right)=0$$

Expresia care apare depinde doar de x şi y. Să o derivăm parţial în raport cu x şi y. Pentru aceasta **vom deriva f ca pe o funcţie compusă**. Să notăm mai întâi

$$\alpha\left(x,y\right)=\tfrac{x}{y}\ ,\ \beta\left(x,y\right)=y-\tfrac{z(x,y)}{x}$$

Avem deci ecuaţia

$$f\left(\alpha\left(x,y\right),\beta\left(x,y\right)\right)=0$$

Au loc următoarele **reguli de derivare a funcţiilor compuse**:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y}\end{cases}$$

În cazul nostru avem

$$\begin{cases}\frac{\partial \alpha}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}\right)_x^{'}=\frac{1}{y}\\ \frac{\partial \alpha}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}\right)_y^{'}=x\left(\frac{1}{y}\right)_y^{'}=\frac{-x}{y^2}\end{cases}$$

şi

$$\begin{cases}\frac{\partial \beta}{\partial x}=\left(y-\frac{z(x,y)}{x}\right)_x^{'}=0-\left(\frac{z(x,y)}{x}\right)_x^{'}\\ \qquad=-\dfrac{z_x^{'}\left(x,y\right)x-z\left(x,y\right)x_x^{'}}{x^2}=\dfrac{z\left(x,y\right)-xz_x^{'}\left(x,y\right)}{x^2}\\ \frac{\partial \beta}{\partial y}=\left(y-\frac{z(x,y)}{x}\right)_y^{'}=1-\left(\frac{z(x,y)}{x}\right)_y^{'}=1-\frac{1}{x}\left(z\left(x,y\right)\right)_y^{'}=1-\frac{z_y^{'}(x,y)}{x}\end{cases}$$

deci dacă derivăm parţial ecuaţia $f\left(\alpha\left(x,y\right),\beta\left(x,y\right)\right)=0$ obţinem

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\dfrac{1}{y}+\dfrac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\dfrac{z\left(x,y\right)-xz_x^{'}\left(x,y\right)}{x^2}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\dfrac{-x}{y^2}+\dfrac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\left(1-\dfrac{z_y^{'}\left(x,y\right)}{x}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z(x,y)-xz_x^{'}(x,y)}{x^2} = \frac{-\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial \beta}} \\ 1-\frac{z_y^{'}(x,y)}{x} = \frac{\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial \beta}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot z_x^{'}(x,y) = z(x,y) + \frac{x^2}{y}\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial \beta}} \\ z_y^{'}(x,y) = x\left(1-\frac{x}{y^2}\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial \beta}}\right) \end{cases}$$

Atunci expresia de calculat este

$$xz_x^{'}(x,y)+yz_y^{'}(x,y) = z(x,y)+\frac{x^2}{y}\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial \beta}} + xy\left(1-\frac{x}{y^2}\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial \beta}}\right) =$$
$$= z(x,y)+\frac{x^2}{y}\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial \beta}} + xy - xy\frac{x}{y^2}\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial \beta}} = z(x,y)+xy$$

2. Să se determine **punctele de extrem ale funcţiei** $y(x)$ **definită implicit de ecuaţia**:
   $a)$ $y^2+2x^2y-4x-3=0$,
   $b)$ $x^2-2xy+5y^2-2x+4y+1=0$ (temă)

   Rezolvare:

   $a)$ Ecuaţia dată este de tipul $F(x,y)=0$ care defineşte pe y ca funcţie de x. Deci dacă privim $y=y(x)$ atunci ecuaţia devine

$$y^2(x)+2x^2y(x)-4x-3=0$$

   Expresia care apare este funcţie doar de x. Să derivăm în raport cu x:

$$\left(y^2(x)+2x^2y(x)-4x-3\right)^{'} = 0 \Leftrightarrow 2y(x)\,y^{'}(x)+4xy(x)+2x^2y^{'}(x)-4=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^{'}(x) = \frac{2(1-xy(x))}{x^2+y(x)}$$

   Deci am calculat derivata funcţiei $y(x)$, iar acum vom aplica teoria de la **extreme de funcţii de o singură variabilă (**teorie făcută în liceu**).** Amintim că în Seminarul 13 am studiat extreme de funcţii de două şi trei variabile.

   Deci determinăm punctele staţionare, date ca soluţia ecuaţiei

$$y^{'}(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2(1-xy(x))}{x^2+y(x)} = 0 \Leftrightarrow xy(x)=1 \Leftrightarrow y(x)=1/x$$

   Acum dacă introducem acest y în ecuaţia iniţială obţinem

$$(1/x)^2+2x^2\cdot 1/x-4x-3=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+2x-4x-3=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-1=0 \qquad (1)$$

   Eventualele soluţii întregi ale ecuaţiei de mai sus se găsesc printre divizorii termenului liber. Facem proba şi găsim că -1 este soluţie. Deci polinomul se împarte la $(x+1)$,deci avem

$$2x^3+3x^2-1=(x+1)\left(2x^2+x-1\right)$$

   Acum $\Delta = 1-4\cdot 2\cdot(-1)=9$, şi rădăcinile sunt -1 şi $1/2$, deci, folosind

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

   obţinem

$$\begin{aligned} 2x^3+3x^2-1 &= (x+1)\left(2x^2+x-1\right) = 2(x+1)(x+1)(x-1/2) \\ &= (x+1)^2(2x-1) \end{aligned}$$

Deci soluţiile ecuaţiei (1) sunt $x_1 = 1/2$ şi $x_2 = -1$. Dar în punctul $x_2 = -1$ cu $y(-1) = -1$ observăm că nu există $y^{'}(-1) = \frac{2(1-(-1)(-1))}{(-1)^2+(-1)} = \frac{0}{0}$!. Deci singurul punct staţionar rămâne $x_1 = 1/2$. Acum studiem dacă acest punct este sau nu de extrem.

Vom calcula derivata secundă în acest punct

$$\begin{aligned} y^{''}(x) &= \left(\tfrac{2(1-xy(x))}{x^2+y(x)}\right)^{'} = 2\tfrac{(1-xy(x))^{'}\left(x^2+y(x)\right)-(1-xy(x))\left(x^2+y(x)\right)^{'}}{(x^2+y(x))^2} = \\ &= 2\tfrac{\left(0-y(x)-xy^{'}(x)\right)\left(x^2+y(x)\right)-(1-xy(x))\left(2x+y^{'}(x)\right)}{(x^2+y(x))^2} \end{aligned}$$

deci, folosind că $y^{'}(1/2) = 0$

$$\begin{aligned} y^{''}(1/2) &= 2\tfrac{\left(-y(1/2)-1/2\cdot y^{'}(1/2)\right)(1/4+y(1/2))-(1-1/2\cdot y(1/2))\left(1+y^{'}(1/2)\right)}{(1/4+y(1/2))^2} \\ &= 2\tfrac{-y(1/2)(1/4+y(1/2))-(1-1/2\cdot y(1/2))}{(1/4+y(1/2))^2} \end{aligned}$$

Acum dacă punem $x = 1/2$ în ecuaţia iniţială obţinem

$$y^2(1/2) + 2(1/2)^2 y(1/2) - 4(1/2) - 3 = 0 \Leftrightarrow y^2(1/2) + 1/2\cdot y(1/2) - 5 = 0$$

deci

$$\begin{aligned} y^{''}(1/2) &= 2\tfrac{-y(1/2)(1/4+y(1/2))-(1-1/2\cdot y(1/2))}{(1/4+y(1/2))^2} = \\ &= 2\tfrac{-\frac{y(1/2)}{4}-y^2(1/2)-1+\frac{y(1/2)}{2}}{(1/4+y(1/2))^2} = 2\tfrac{-y^2(1/2)+\frac{y(1/2)}{4}-1}{(1/4+y(1/2))^2} \end{aligned}$$

Acum dacă se introduc soluţiile de mai sus ($y(1/2) = \frac{-1\pm\sqrt{24}}{4}$), vom onţine că

$$y^{''}(1/2) < 0$$

ceea ce înseamnă că punctul $1/2$ este punct de maxim.

$b)$ Avem $x^2 - 2xy(x) + 5y^2(x) - 2x + 4y(x) + 1 = 0$ deci

$$\begin{aligned} &2x - 2y(x) - 2xy^{'}(x) + 10y(x)y^{'}(x) - 2 + 4y^{'}(x) = 0 \\ &\Rightarrow y^{'}(x) = \tfrac{x-5y(x)-2}{x-y(x)-1} \end{aligned}$$

Acum pct. staţionare date de

$$y^{'}(x) = \frac{x-5y(x)-2}{x-y(x)-1} = 0 \Leftrightarrow y(x) = (x-2)/5$$

pe care îl introduc în ecuaţia iniţială şi voi determina soluţiile x ......

3. Să se determine **punctele de extrem ale funcţiei** $z(x,y)$ **definită implicit de ecuaţia**:
$a)$ $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z + 2 = 0$,
$b)$ $x^4 + y^4 + z^4 = 2a^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ (temă)

Rezolvare:

$a)$ Ecuaţia este de tipul $F(x,y,z) = 0$ şi defineşte pe z ca funcţie de x şi y. Deci dacă privim $z = z(x,y)$ atunci ecuaţia devine

$$x^2 + y^2 + z^2(x,y) - xz(x,y) - yz(x,y) + 2x + 2y + 2z(x,y) + 2 = 0$$

Expresia care apare este funcţie de x şi y. Să derivăm parţial în raport cu x.

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+y^2+z^2(x,y)-xz(x,y)-yz(x,y)+2x+2y+2z(x,y)+2\right)_x^{'}=0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow 2x+0+2z(x,y)\,z_x^{'}(x,y)-z(x,y)-xz_x^{'}(x,y)-yz_x^{'}(x,y)+2+0+2z_x^{'}(x,y)+0=0\\
&\Leftrightarrow (2x-z(x,y)+2)+(2z(x,y)-x-y+2)\,z_x^{'}(x,y)=0\\
&\Leftrightarrow z_x^{'}(x,y)=\frac{z(x,y)-2x-2}{2z(x,y)-x-y+2}
\end{aligned}$$

Să derivăm parţial în raport cu y.

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+y^2+z^2(x,y)-xz(x,y)-yz(x,y)+2x+2y+2z(x,y)+2\right)_y^{'}=0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow 0+2y+2z(x,y)\,z_y^{'}(x,y)-xz_y^{'}(x,y)-z(x,y)-yz_y^{'}(x,y)+0+2+2z_y^{'}(x,y)+0=0\\
&\Leftrightarrow (2y-z(x,y)+2)+(2z(x,y)-x-y+2)\,z_y^{'}(x,y)=0\\
&\Leftrightarrow z_y^{'}(x,y)=\frac{z(x,y)-2y-2}{2z(x,y)-x-y+2}
\end{aligned}$$

Deci punctele staţioanare sunt date de $\begin{cases} z_x^{'}(x,y)=0\\ z_y^{'}(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z(x,y)-2x-2}{2z(x,y)-x-y+2}=0\\ \dfrac{z(x,y)-2y-2}{2z(x,y)-x-y+2}=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} z(x,y)=2x+2\\ z(x,y)=2y+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow z(x,y)=2x+2=2y+2$ deci $z(x,y)=2x+2$ şi $x=y$

Introducem în ecuaţia iniţială şi obţinem

$$\begin{aligned}
&x^2+x^2+(2x+2)^2-x(2x+2)-x(2x+2)+2x+2x+2(2x+2)+2=0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow 2x^2+(2x+2)^2-2x(2x+2)+4x+2(2x+2)+2=0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow 2x^2+4x^2+8x+4-4x^2-4x+4x+4x+4+2=0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow 2\left(x^2+6x+5\right)=0
\end{aligned}$$

care are soluţiile $x_1=-1$ şi $x_2=-5$. Deci punctele staţionare sunt perechile

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1=-1\\
x_2 &= y_2=-5
\end{aligned}$$

în care

$$\begin{aligned}
z(x_1,y_1) &= 0\\
z(x_2,y_2) &= -8
\end{aligned}$$

Studiem dacă punctele sunt sau nu de extrem. Aplicăm Seminarul 13, exerciţiul 2.
Se vor calcula deci

$$z_{xx}^{''}(x,y)=\left(\frac{z(x,y)-2x-2}{2z(x,y)-x-y+2}\right)_x^{'}=\frac{(z(x,y)-2x-2)_x^{'}(2z(x,y)-x-y+2)-(z(x,y)-2x-2)(2z(x,y)-x-y+2)_x^{'}}{(2z(x,y)-x-y+2)^2}$$

$$=\frac{\left(z_x^{'}(x,y)-2-0\right)(2z(x,y)-x-y+2)-(z(x,y)-2x-2)\left(2z_x^{'}(x,y)-1-0+0\right)}{(2z(x,y)-x-y+2)^2}$$

$$z''_{xy}(x,y)=\left(\frac{z(x,y)-2x-2}{2z(x,y)-x-y+2}\right)'_y=\frac{(z(x,y)-2x-2)'_y(2z(x,y)-x-y+2)-(z(x,y)-2x-2)(2z(x,y)-x-y+2)'_y}{(2z(x,y)-x-y+2)^2}$$

$$=\frac{\left(z'_y(x,y)-0-0\right)(2z(x,y)-x-y+2)-(z(x,y)-2x-2)\left(2z'_y(x,y)-0-1+0\right)}{(2z(x,y)-x-y+2)^2}$$

$$z''_{yy}(x,y)=\left(\frac{z(x,y)-2y-2}{2z(x,y)-x-y+2}\right)'_y=\frac{(z(x,y)-2y-2)'_y(2z(x,y)-x-y+2)-(z(x,y)-2y-2)(2z(x,y)-x-y+2)'_y}{(2z(x,y)-x-y+2)^2}$$

$$=\frac{\left(z'_y(x,y)-2-0\right)(2z(x,y)-x-y+2)-(z(x,y)-2y-2)\left(2z'_y(x,y)-0-1+0\right)}{(2z(x,y)-x-y+2)^2}$$

Studiem dacă $(-1,-1)$ este de extrem sau nu. Se calculează $A=z''_{xx}(-1,-1)=\cdots$
$B=z''_{xy}(-1,-1)=\cdots$, $C=z''_{yy}(-1,-1)=\cdots$ şi se va studia semnul lui $B^2-AC=\cdots$
Analog acelaşi calcul pentru punctul staţionar $(-5,-5)$...

4. Să se determine **punctele de extrem ale funcţiei** $f(x,y)=x+y$ **condiţionate de ecuaţia** $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}$

Rezolvare:

Vom aplica **metoda multiplicatorilor Lagrange** (Observaţia 135, pag. 220).
Astfel **Pasul I**: asociem **funcţia lui Lagrange**

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda F(x,y)$$

unde $f(x,y)$ este funcţia care este studiată şi $F(x,y)=0$ este ecuaţia de legătură care este impusă, în cazul nostru

$$F(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2}$$

deci

$$L(x,y,\lambda)=(x+y)+\lambda\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2}\right)$$

Pasul II: Se rezolvă acum sistemul, în necunoscutele (x,y,λ)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}$$

adică
$$\begin{cases}1+0+\lambda\left(\left(x^{-2}\right)'_x+0-0\right)=0\\ 0+1+\lambda\left(0+\left(y^{-2}\right)'_y-0\right)=0\\ 0+\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+\lambda(-2)x^{-3}=0\\ 1+\lambda(-2)y^{-3}=0\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{a^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=2\lambda\\ y^3=2\lambda\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}\end{cases}$$

deci avem $x^3=y^3=2\lambda$ adică $x=y$ şi atunci

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}\Leftrightarrow\frac{2}{x^2}=\frac{1}{a^2}\Leftrightarrow x^2=2a^2\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm a\sqrt{2}$$

Avem soluţiile

$$x_1=a\sqrt{2}=y_1\ ,\ \ \lambda_1=\left(a\sqrt{2}\right)^3/2=a^3\sqrt{2}$$

şi

$$x_2 = -a\sqrt{2} = y_2 \ , \ \lambda_2 = \left(-a\sqrt{2}\right)^3 /2 = -a^3\sqrt{2}$$

Pasul III: Se ia mai întâi $\lambda_1 = a^3\sqrt{2}$. În acest caz funcţia lui Lagrange devine

$$L(x,y) = (x+y) + a^3\sqrt{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

Se calculează diferenţiala de ordinul al doilea în punctul $(x_1, y_1) = \left(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}\right)$

$$d^2L(x_1,y_1) = L''_{xx}(x_1,y_1)\,dx^2 + 2L''_{xy}(x_1,y_1)\,dxdy + L''_{yy}(x_1,y_1)\,dy^2$$

Avem

$$\begin{aligned}
L''_{xx} &= \left(1 + a^3\sqrt{2}(-2)\,x^{-3}\right)'_x = -2a^3\sqrt{2}(-3)\,x^{-4} = 6a^3\sqrt{2}x^{-4}\\
L''_{xy} &= \left(1 + a^3\sqrt{2}(-2)\,x^{-3}\right)'_y = 0\\
L''_{yy} &= \left(1 + a^3\sqrt{2}(-2)\,y^{-3}\right)'_y = -2a^3\sqrt{2}(-3)\,y^{-4} = 6a^3\sqrt{2}y^{-4}
\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}
d^2L(x_1,y_1) &= 6a^3\sqrt{2}\left(a\sqrt{2}\right)^{-4}dx^2 + 0\cdot dxdy + 6a^3\sqrt{2}\left(a\sqrt{2}\right)^{-4}dy^2\\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2a}\left(dx^2+dy^2\right) > 0
\end{aligned}$$

adică forma pătratică $d^2L(x_1,y_1)$ este pozitiv definită deci punctul $\left(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}\right)$ este punct de minim

Analog se ia $\lambda_2 = -a^3\sqrt{2}$. În acest caz funcţia lui Lagrange devine

$$L(x,y) = (x+y) - a^3\sqrt{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

Se calculează diferenţiala de ordinul al doilea în punctul $(x_2, y_2) = \left(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}\right)$.

$$d^2L(x_2,y_2) = L''_{xx}(x_2,y_2)\,dx^2 + 2L''_{xy}(x_2,y_2)\,dxdy + L''_{yy}(x_2,y_2)\,dy^2$$

Avem

$$\begin{aligned}
L''_{xx} &= \left(1 - a^3\sqrt{2}(-2)\,x^{-3}\right)'_x = 2a^3\sqrt{2}(-3)\,x^{-4} = -6a^3\sqrt{2}x^{-4}\\
L''_{xy} &= \left(1 - a^3\sqrt{2}(-2)\,x^{-3}\right)'_y = 0\\
L''_{yy} &= \left(1 - a^3\sqrt{2}(-2)\,y^{-3}\right)'_y = 2a^3\sqrt{2}(-3)\,y^{-4} = -6a^3\sqrt{2}y^{-4}
\end{aligned}$$

Avem ca mai sus că

$$\begin{aligned}
d^2L(x_2,y_2) &= -6a^3\sqrt{2}\left(-a\sqrt{2}\right)^{-4}dx^2 + 0\cdot dxdy - 6a^3\sqrt{2}\left(-a\sqrt{2}\right)^{-4}dy^2\\
&= -\frac{3\sqrt{2}}{2a}\left(dx^2+dy^2\right) < 0
\end{aligned}$$

adică forma pătratică $d^2L(x_2,y_2)$ este negativ definită deci punctul $\left(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}\right)$ este punct de maxim.

5. Să se determine **punctele de extrem ale funcţiei** f **condiţionate de ecuaţia** respectivă:
   $a)$ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, cu legătura $x + y + z = 3$,
   $b)$ $f(x,y,z) = xyz$, cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ (temă)

   Rezolvare:
   Vom aplica **metoda multiplicatorilor Lagrange**
   Notăm
   $$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda F(x,y,z)$$
   unde $F(x,y,z) = 0$ este ecuaţia de legătură adică $F(x,y,z) = x + y + z - 3$.
   $$L(x,y,z,\lambda) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \lambda(x + y + z - 3)$$
   Se rezolvă acum sistemul, în necunoscutele (x,y,z,λ)
   $$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 0 + 0 + \lambda(1 + 0 + 0 - 0) = 0 \\ 0 + 2y + 0 + \lambda(0 + 1 + 0 - 0) = 0 \\ 0 + 0 + 2z + \lambda(0 + 0 + 1 - 0) = 0 \\ 0 + (x + y + z - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ 2z + \lambda = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$
   deci
   $$\lambda = -2x = -2y = -2z \Rightarrow x = y = z$$
   şi din ultima obţinem că
   $$3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
   Deci soluţia este
   $$x_1 = y_1 = z_1 = 1\ ,\ \lambda_1 = -2$$
   Pentru $\lambda_1 = -2$ funcţia lui Lagrange devine
   $$L(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2(x + y + z - 3)$$
   şi acum se va calcula
   $$d^2L(x_1,y_1,z_1) = L''_{xx}(x_1,y_1,z_1)\,dx^2 + L''_{yy}(x_1,y_1,z_1)\,dy^2 + L''_{zz}(x_1,y_1,z_1)\,dz^2 + \\ +2L''_{xy}(x_1,y_1,z_1)\,dxdy + 2L''_{xz}(x_1,y_1,z_1)\,dxdz + 2L''_{yz}(x_1,y_1,z_1)\,dydz$$
   iar
   $$L''_{xx} = (2x-2)'_x = 2\ ,\ L''_{yy} = (2y-2)'_y = 2\ ,\ L''_{zz} = (2z-2)'_z = 2$$
   $$L''_{xy} = (2x-2)'_y = 0\ ,\ L''_{xz} = (2x-2)'_z = 0\ ,\ L''_{yz} = (2y-2)'_z = 0$$
   deci
   $$\begin{aligned} d^2L(1,1,1) &= 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 0dxdy + 0dxdz + 0dydz \\ &= 2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) > 0 \end{aligned}$$

adică forma pătratică $d^2L\,(1,1,1)$ este pozitiv definită deci punctul $(1,1,1)$ este punct de minim

Observaţie: uneori pentru studia semnul lui d^2L este utilă şi diferenţierea legăturii. De exemplu în cazul acesta avem legătura $x+y+z=3$ pe care o diferenţiem şi obţinem

$$dx+dy+dz=0$$

care reprezintă o legătură între diferenţiale, deci

$$dz=-dx-dy$$

6. Să se arate că funcţiile următoare sunt în **dependenţă funcţională**:

$a)$ $f\,(x,y,z)=4x-3y+5z$, $g\,(x,y,z)=3x-2y+4z$, $h\,(x,y,z)=6x-5y+7z$

$b)$ $f\,(x,y,z)=\ln\dfrac{x+y}{x+z}$, $g\,(x,y,z)=\sqrt{\dfrac{y+z}{y+x}}$, $h\,(x,y,z)=\dfrac{x+z}{y+z}$

Rezolvare:

Aplicăm Teorema 186, pag. 213

$a)$ A studia dependenţa funcţională înseamnă a calcula derivatele parţiale şi a calcula determinantul

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 6 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} =$$

$= 4\,(-14-(-20))+3\,(21-24)+5\,(-15-(-12)) = 4\,(-14+20)+3\,(21-24)+5\,(-15+12) =$
$= 4\cdot 6+3\,(-3)+5\,(-3)=24-9-15=0$

Dacă determinantul este 0 atunci inseamnă că cele trei funcţii sunt dependente funcţional.

Rangul matricii $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 6 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ este 2 deoarece $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ deci două funcţii sunt independente şi a treia se exprimă în funcţie de primele două.

$b)$ Trebuie calculate derivatele parţiale

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\ln\frac{x+y}{x+z}\right)'_x = \frac{1}{\frac{x+y}{x+z}}\left(\tfrac{x+y}{x+z}\right)'_x = \tfrac{x+z}{x+y}\,\tfrac{1\cdot(x+z)-(x+y)\cdot 1}{(x+z)^2} = \tfrac{z-y}{(x+y)(x+z)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\ln\frac{x+y}{x+z}\right)'_y = \frac{1}{\frac{x+y}{x+z}}\left(\tfrac{x+y}{x+z}\right)'_y = \tfrac{x+z}{x+y}\,\tfrac{1}{x+z}\,(x+y)'_y = \tfrac{1}{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\ln\frac{x+y}{x+z}\right)'_z = \frac{1}{\frac{x+y}{x+z}}\left(\tfrac{x+y}{x+z}\right)'_z = \tfrac{x+z}{x+y}\,(x+y)\left(\tfrac{1}{x+z}\right)'_z = (x+z)\,\tfrac{-1}{(x+z)^2} = \tfrac{-1}{x+z}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\left(\sqrt{\frac{y+z}{y+x}}\right)_x'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{y+z}{y+x}}}\left(\frac{y+z}{y+x}\right)_x'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y+x}{y+z}}\,(y+z)\left(\frac{1}{y+x}\right)_x'=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y+x}{y+z}}\,(y+z)\,\frac{-1}{(y+x)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\left(\sqrt{\frac{y+z}{y+x}}\right)_y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{y+z}{y+x}}}\left(\frac{y+z}{y+x}\right)_y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y+x}{y+z}}\,\frac{1\cdot(y+x)-(y+z)\cdot 1}{(y+x)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y+x}{y+z}}\,\frac{x-z}{(y+x)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}=\left(\sqrt{\frac{y+z}{y+x}}\right)_z'=\cdots$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\left(\frac{x+z}{y+z}\right)_x'=\cdots,\quad \frac{\partial h}{\partial y}=\left(\frac{x+z}{y+z}\right)_y'=\cdots,\quad \frac{\partial h}{\partial z}=\left(\frac{x+z}{y+z}\right)_z'=\cdots$$

şi se va calcula deteminantul şi se va obţine că $\Delta=0$ deci cele trei funcţii sunt dependente funcţional.