Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

SEMINARUL 3.

Cap. II_Serii de numere reale

1. Sa se calculeze **suma seriilor**:
$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, $b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{16n^2-8n-3}$,
$c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$

Rezolvare:

Aplicăm *Definiţia: Se numeşte **serie de numere reale** o sumă infinită de numere* $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$. *Vom nota aceasta prin* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. *Numărul* u_n *se numeşte **termenul general al seriei*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. *Şirul* $(S_n)_n$ *dat de* $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ *se numeşte **şirul sumelor parţiale**.*

şi

Definiţia: Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *spunem că este **convergentă** dacă şirul* $(S_n)_n$*al sumelor parţiale este convergent. Dacă* $S_n \to S$ *atunci* S *se numeşte **suma seriei** şi se va scrie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$. *Dacă şirul* (S_n) *este divergent atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este **divergentă**.*

$a)$ Vom calcula şirul sumelor parţiale $(S_n)_n$ asociat seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ unde
$u_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \tfrac{1}{1\cdot 4} + \tfrac{1}{4\cdot 7} + \tfrac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \tfrac{1}{(3n-5)(3n-2)} + \tfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

Pentru a calcula această sumă vom rescrie fiecare termen u_n ca o diferenţă de 2 fracţii (adică vom *descompune fracţia* u_n *în fracţii simple*).

$$u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{a}{3n-2} - \frac{b}{3n+1}$$

unde a, b trebuie determinaţi. Vom avea $a = 1/3$, $b = 1/3$ deci

$$u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

Obţinem

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{7}\right) \\ &+ \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{10}\right) + \cdots + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3n-5} - \tfrac{1}{3n-2}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3n-2} - \tfrac{1}{3n+1}\right) = \\ &= (\text{sumă telescopică}) = \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{3n+1}\right) \to \tfrac{1}{3}(1-0) = \tfrac{1}{3},\ n \to \infty \end{aligned}$$

Deci seria este convergentă şi are suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

b) Avem $u_n = \dfrac{1}{16n^2 - 8n - 3}$ iar $16n^2 - 8n - 3 = 0$ are rădăcinile $(\Delta = 256)$ $n_1 = \dfrac{8+\sqrt{256}}{32} = \dfrac{3}{4}$, $n_2 = \dfrac{8-\sqrt{256}}{32} = -\dfrac{1}{4}$. Deci

$$\begin{aligned} u_n &= \tfrac{1}{16n^2-8n-3} = \tfrac{1}{16(n-3/4)(n+1/4)} \\ &= \tfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4n-3} - \tfrac{1}{4n+1}\right) \end{aligned}$$

Obţinem

$$\begin{aligned} &S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \tfrac{1}{1\cdot 5} + \tfrac{1}{5\cdot 9} + \tfrac{1}{9\cdot 13} + \cdots \\ &+ \tfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{5}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{9}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{13}\right) \\ &+ \cdots + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4n-7} - \tfrac{1}{4n-3}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4n-3} - \tfrac{1}{4n+1}\right) = \\ &= \text{(sumă telescopică)} = \tfrac{1}{4}\left(1 - \tfrac{1}{4n+1}\right) \to \tfrac{1}{4}(1-0). \end{aligned}$$

Deci seria este convergentă şi are suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{4}$$

c) $u_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Deci

$$\begin{aligned} &S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \\ &+ \left(\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right) \\ &+ \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = -2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{n+1} \\ &+ \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \\ &= 1 - \sqrt{2} + \frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = 1 - \sqrt{2} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \to 1 - \sqrt{2} + 0,\ n \to \infty \end{aligned}$$

Deci seria este convergentă şi are suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 - \sqrt{2}$$

Observaţie: Am folosit următoarele:

Dacă avem ecuaţia

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cu rădăcinile x_1, x_2 atunci are loc descompunerea

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

2. Să se stabilească natura seriilor verificând dacă este îndeplinită **condiţia necesară de convergenţă**:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$, $b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+3n^2+1}-n^2\right)$,

$c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$, $d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n}$

Rezolvare:

Aplicăm *Proprietatea: Dacă termenul general al seriei nu tinde la* 0 *atunci seria este divergentă.*

$a)$ Vom arăta deci că termenul general u_n nu tinde la 0. În cazul nostru

$$u_n = \tfrac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n} = \tfrac{n^n n^{1/n}}{(n(1+1/n^2))^n} = \tfrac{n^n n^{1/n}}{n^n(1+1/n^2)^n} =$$
$$= \tfrac{n^{1/n}}{(1+1/n^2)^n} = \tfrac{\sqrt[n]{n}}{(1+1/n^2)^n}$$

Iar acum avem o limită importantă

$$\sqrt[n]{n} \to 1, n \to \infty$$

şi pentru $\left(1+1/n^2\right)^n$ folosim limita fundamentală cu e (avem nedeterminarea 1^∞). Deci

$$\left(1+1/n^2\right)^n = \left[\left(1+1/n^2\right)^{n^2}\right]^{1/n} \to e^{\lim\limits_{n\mapsto\infty} 1/n} = e^0 = 1$$

Avem

$$u_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+1/n^2\right)^n} \to 1 \neq 0$$

deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

$b)$

$$u_n = \sqrt{n^4+3n^2+1} - n^2 = \tfrac{\left(n^4+3n^2+1\right)-n^4}{\sqrt{n^4+3n^2+1}+n^2}$$
$$= \tfrac{3n^2+1}{\sqrt{n^4+3n^2+1}+n^2} = \tfrac{n^2\left(3+1/n^2\right)}{n^2\left(\sqrt{1+3/n^2+1/n^4}+1\right)}$$
$$= \tfrac{3+1/n^2}{\sqrt{1+3/n^2+1/n^4}+1} \to \tfrac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \tfrac{3}{2} \neq 0$$

deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

$c)$ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$ Pentru a calcula limita pentru $\sqrt[n]{n+1}$ aplic criteriul raportului al lui Cauchy-D'Alembert pentru şiruri*:*

$$\lim_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$

Avem

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \to \frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

$d)$ $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n}$ Pentru calculul limitei aplic *Lema lui Stolz:*

$$\lim_{n\mapsto\infty} \tfrac{\ln(n!)}{n} = \lim_{n\mapsto\infty} \tfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\mapsto\infty} \tfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} =$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty} \tfrac{\ln(n+1)!-\ln n!}{(n+1)-1} = \lim_{n\mapsto\infty} \tfrac{\ln[n!(n+1)]-\ln n!}{1} =$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty} \left(\ln n! + \ln(n+1) - \ln n!\right) = \lim_{n\mapsto\infty} \ln(n+1) = \ln(\infty) = \infty$$

deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Observaţie: Am folosit limitele

$$\lim_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$
$$\lim_{n\mapsto\infty} (1+x_n)^{1/x_n} = e, \quad \text{unde } x_n \to 0$$

3. Folosind **criteriul lui Leibniz**, să se studieze convergenţa seriilor:

$a)$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$, $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, tg\frac{x}{n\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}^*$ fixat.

Rezolvare:

Aplicăm *Teorema: Fie seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *a.î.* (a_n) *este şir descrescător la* 0. *Atunci seria alternată* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *este convergentă.*

$a)$ Avem $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ unde $a_n = \frac{\ln n}{n}$. Din exerciţiul 4., $b)$, avem că şirul $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_n$ descreşte şi $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ deci seria alternată $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ este convergentă.

$b)$ Avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, tg\frac{x}{n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ unde $a_n = tg\frac{x}{n\sqrt{n}}$.

Funcţia tangentă este o funcţie crescătoare deci

$$a_n = tg\frac{x}{n\sqrt{n}} > tg\frac{x}{(n+1)\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$$

adică (a_n) descreşte şi $\lim\limits_{n\mapsto\infty} tg\frac{x}{n\sqrt{n}} = tg\frac{x}{\infty} = tg0 = 0$. deci seria alternată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, tg\frac{x}{n\sqrt{n}}$ este convergentă. ■

4. Folosind **criteriul I de comparaţie**, să se studieze natura seriilor:

$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$, $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10\sqrt[3]{n}-7}$.

Rezolvare:

Aplicăm ***Criteriul I de comparaţie***: *Fie seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *a.î.* $u_n, v_n > 0$. *Presupunem că* $u_n \le v_n$, $\forall n \ge N$. *Avem*

a) dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este convergentă atunci şi seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

b) dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă atunci şi seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este divergentă.*

$a)$ Notăm $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$. Avem imediat

$$n^3 + n > n^3 \Leftrightarrow \sqrt{n^3+n} > \sqrt{n^3}$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

Să notăm cu $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Ştim că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ este convergentă deoarece este **seria armonică generalizată** cu $p = 3/2 > 1$. Deci şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ este convergentă.

$b)$ Notăm $u_n = \dfrac{1}{10\sqrt[3]{n}-7}$. Avem imediat

$$10\sqrt[3]{n} - 7 < 10\sqrt[3]{n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{10\sqrt[3]{n}-7} > \frac{1}{10\sqrt[3]{n}}$$

Să notăm cu $v_n = \dfrac{1}{10\sqrt[3]{n}} = \dfrac{1}{10n^{1/3}}$. Ştim că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1/3}}$ este divergentă deoarece este **seria armonică generalizată** cu $p = 1/3 \leq 1$. Avem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{10n^{1/3}} = \dfrac{1}{10}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1/3}}$ este divergentă deci şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{10\sqrt[3]{n}-7}$.

Observaţie: Am folosit **seria armonică generalizată**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{convergentă}, & \text{dacă } p > 1 \\ \text{divergentă}, & \text{dacă } p \leq 1 \end{cases}$$

5. Folosind **criteriul II de comparaţie**, să se studieze natura seriilor:

$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{20n+1}$, $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+7n}}$.

Rezolvare:

Aplicăm ***Criteriul II de comparaţie****: Fie seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *a.î.* $u_n, v_n > 0$. *Presupunem ca* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, $\forall n \geq N$. *Avem*

a) daca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este convergentă atunci şi seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

b) daca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă atunci şi seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este divergentă.*

Vom compara seriile din exemplele noastre cu seria armonică generalizată

$a)$ Notăm $u_n = \dfrac{1}{n}$ şi luăm $v_n = \dfrac{1}{20n+1}$. Atunci avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

şi

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{20(n+1)+1}}{\frac{1}{20n+1}} = \frac{20n+1}{20n+21}$$

Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \Leftrightarrow \tfrac{n}{n+1} \leq \tfrac{20n+1}{20n+21} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n(20n+21) \leq (20n+1)(n+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20n^2 + 21n \leq 20n^2 + 21n + 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 \text{ (Adevărat)}$$

Deci $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ şi ştim că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă (seria armonică cu $p = 1$) de unde rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{20n+1}$ este divergentă.

b) Notăm $u_n = \frac{1}{n}$ şi luăm $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+7n}}$. Atunci avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

şi

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+7(n+1)}}}{\frac{1}{\sqrt{n^2+7n}}} = \frac{\sqrt{n^2+7n}}{\sqrt{(n+1)^2+7(n+1)}}$$

Avem

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \Leftrightarrow \tfrac{n}{n+1} \leq \tfrac{\sqrt{n^2+7n}}{\sqrt{(n+1)^2+7(n+1)}} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \tfrac{n^2}{(n+1)^2} \leq \tfrac{n^2+7n}{(n+1)^2+7(n+1)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow n^2\left((n+1)^2+7(n+1)\right) \leq \left(n^2+7n\right)(n+1)^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow n^2\left(n^2+2n+1+7n+7\right) \leq \left(n^2+7n\right)\left(n^2+2n+1\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow n^4+9n^3+7n^2 \leq n^4+2n^3+n^2+7n^3+14n^2+7n \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 7n^2 \leq 15n^2+7n \Leftrightarrow 0 \leq 8n^2+7n \text{ (Adevărat)}
\end{aligned}$$

Deci $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ şi ştim că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă (seria armonică cu $p = 1$) de unde rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+7n}}$ este divergentă.

6. Folosind **criteriul III de comparaţie**, să se studieze natura seriilor:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$, *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[n]{n}}$

   Rezolvare:

   Aplicăm **Criteriul III de comparaţie**: *Fie seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *a.î.* $u_n, v_n > 0$. *Presupunem că* $\exists \lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda$. *Atunci*

   a) dacă $\lambda \in (0,\infty)$ *atunci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *(seriile au aceeaşi natură).*

   b) dacă $\lambda = 0$ *atunci* b_1*) dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n \quad (C) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \quad (C)$

   b_2*) dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \quad (D) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n \quad (D)$

$a)$ Notăm $u_n = n^2 e^{-n}$ şi luăm $v_n = \dfrac{1}{n^p}$. Atunci avem

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{v_n} &= \frac{n^2 e^{-n}}{1/n^p} = n^{p+2} e^{-n} \\ &= \frac{n^{p+2}}{e^n} \to 0\ ,\ \ n \to \infty,\ \ \forall\ (p+2) > 0 \end{aligned}$$

Acum aleg $p > 1$, de exemplu $p = 2$, a.î. seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă.

Avem şi $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0 = \lambda$ deci şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$ este convergentă.

$b)$ Notăm $u_n = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ şi luăm $v_n = \dfrac{1}{\ln n}$. Atunci avem

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}}{\dfrac{1}{\ln n}} = \sqrt[n]{n} \to 1\ ,\ n \to \infty$$

Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ este divergentă (vezi **Criteriul condensării**, seminarul 4.) adică şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ este divergentă.

$c)$ Notăm $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{n}}$ şi luăm $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Atunci avem

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1\ ,\ n \to \infty$$

Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă (este seria armonică cu $p = 1/2 < 1$) adică şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{n}}$ este divergentă.

Observaţie: Am folosit

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{e^n}{n^p} = \infty\ ,\ \text{pentru orice } p > 0$$

7. Folosind **criteriul lui Dirichlet**, să se determine natura seriilor:
$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$c)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$
Rezolvare:
Aplicăm ***Criteriul lui Dirichlet****: Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este o serie care are şirul sumelor parţiale mărginit, şi dacă* (b_n) *este un şir descrescător convergent la* 0 *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *este convergentă.*

$a)$ Avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot \dfrac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ unde $a_n = \sin nx$, $b_n = \dfrac{1}{n}$. Evident $b_n = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = b_{n+1}$ adica $(b_n)_n$ şir descrescător şi $\lim\limits_{n\mapsto\infty} b_n = 0$. Pe de altă parte avem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ are şirul sumelor parţiale asociat ei dat de

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx$$

Aceasta suma o vom calcula astfel:

$$\begin{aligned}
&S_n\ \sin\frac{x}{2} = \sin x \sin\frac{x}{2} + \sin 2x \sin\frac{x}{2} + \cdots + \sin nx \sin\frac{x}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\Big[\cos\Big(x - \frac{x}{2}\Big) - \cos\Big(x + \frac{x}{2}\Big) + \cos\Big(2x - \frac{x}{2}\Big) - \cos\Big(2x + \frac{x}{2}\Big) + \\
&+ \cdots + \cos\Big(nx - \frac{x}{2}\Big) - \cos\Big(nx + \frac{x}{2}\Big)\Big] = \\
&= \frac{1}{2}\Big[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \cdots + \\
&+ \cos\frac{(2n-1)\,x}{2} - \cos\frac{(2n+1)\,x}{2}\Big] = \frac{1}{2}\Big[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)\,x}{2}\Big]
\end{aligned}$$

Deci

$$S_n = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{(2n+1)\,x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\ ,\ \forall\ \frac{x}{2} \neq k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$$

Avem

$$\begin{aligned}
|S_n| &= \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{(2n+1)x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \\
&\leq \frac{\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{(2n+1)x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1+1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\ , \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

deci $(S_n)_n$ mărginit (deoarece marginea $\dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ nu depinde de $n \in \mathbb{N}$).

Obţinem din criteriului lui Dirichlet că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx\ \dfrac{1}{n}$ este convergentă.

$b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ unde $a_n = \cos nx$, $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. În mod analog ca mai sus (înmulţind $S_n = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$ cu $\sin\dfrac{x}{2}$) obţinem că

$$S_n = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\ ,\ \ \forall\frac{x}{2} \neq k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$$

de unde obţinem că

$$|S_n| \leq \frac{1+1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\ , \forall n \in \mathbb{N}$$

adică şirul (S_n) este mărginit.

Pe de altă parte mai trebuie studiată monotonia şirului $b_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

Să notăm cu

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow f^{'}(x)=\frac{(\ln x)^{'}\sqrt{x}-\ln x\left(\sqrt{x}\right)^{'}}{\left(\sqrt{x}\right)^{2}}= \\ =\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\ln x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Dar pentru x suficient de mare, mai precis pentru $x>e^2$ avem $\ln x>\ln e^2=2$ deci $f^{'}(x)=\dfrac{2-\ln x}{x\sqrt{x}}<0 \Rightarrow f$ descrescătoare pe domeniul $\left(e^2,\infty\right)$ deci şirul $\left(\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)_n$ este descrescător.

Avem şi limita

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=\frac{\ln n}{n^{1/2}}\to 0\ ,\ \ n\to\infty$$

deci (b_n) este descrescător la 0. Atunci din criteriului lui Dirichlet avem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx\dfrac{\ln x}{\sqrt{n}}$ este convergentă.

$c)$ Temă.

Observaţie: Am folosit următoarele

$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\tfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2},$$
$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{\ln n}{n^p}=0,\ \text{pentru orice } p>0$$

8. Folosind **criteriul lui Abel**, să se studieze convergenţa seriilor:
$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n}\ln\dfrac{n+1}{n}$, $b)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{\ln n}$.

Rezolvare:

Aplicăm ***Criteriul lui Abel***: *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *este o serie convergentă, şi dacă* (b_n) *este un şir monoton şi mărginit atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ *este convergentă.*

$a)$ Avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n}\ln\dfrac{n+1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ unde $a_n=\dfrac{\cos n}{n}$, $b_n=\ln\dfrac{n+1}{n}$.

Avem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n}$ este convergentă conform criteriului lui Dirichlet (vezi exerciţiul 3, c)).

Pe de altă parte, deoarece funcţia $\ln x$ este crescătoare,

$$b_n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ >\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\ln\frac{n+2}{n+1}=b_{n+1}$$

deci (b_n) este şir descrescător şi $\lim\limits_{n\mapsto\infty}b_n=\ln(1+0)=\ln 1=0$ deci, din convergenţă, avem că şirul este şi mărginit. Suntem atunci în condiţiile Criteriului lui Abel deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n}\ln\dfrac{n+1}{n}$ este convergentă.

$b)$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n b_n$ unde $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$, $b_n = \sqrt[n]{n}$.

Seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ este convergentă conform **criteriului lui Leibniz** (vezi exerciţiul 5).

Pe de altă parte avem că $b_n = \sqrt[n]{n} = e^{\ln \sqrt[n]{n}} = e^{\dfrac{\ln n}{n}}$. Iar funcţia

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\ln x)' x - \ln x\, x'}{x^2} = \\ = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Dar pentru $x > e$ avem $\ln x > \ln e = 1$ deci $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \Rightarrow f$ descrescătoare pe domeniul (e, ∞) deci şirul $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_n$ este descrescător, iar funcţia e^x este crescătoare, deci $e^{\dfrac{\ln x}{x}}$ este o funcţie descrescătoare adică şirul $\left(e^{\frac{\ln n}{n}}\right)_n$ descreşte.

Deci $(\sqrt[n]{n})$ descreşte şi $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{n} = e^{\lim\limits_{n\mapsto\infty} \dfrac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$ (vezi limita de la sfârşitul exerciţiului 3.) adică e şi mărginit. Din Criteriului lui Abel obţinem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$ este convergentă.