Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

SEMINARUL 5.

Cap. III_Limite de funcţii. Continuitate

1. Folosind **definiţia cu** ε **şi** δ să se arate că $\lim\limits_{x\mapsto 5/2}(2x+1)=6$.

   Rezolvare:

   Aplicăm *Definiţia: Funcţia $f : E \to R$ are limita $l \in R$ în punctul $x_0 \in R$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. oricare ar fi $x \in E$, $x \neq x_0$ cu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ să rezulte $|f(x) - l| < \varepsilon$.*

   Deci vom lua $\varepsilon > 0$ oarecare. Alegem, de exemplu, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$. Fie acum $x \in \mathbb{R}$ a.î. $|x - 5/2| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$. Avem atunci

   $$|f(x) - l| = |(2x+1) - 6| = |2x - 5| = 2|x - 5/2| < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$$

   adică ceea ce trebuia demonstrat.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$. Să se arate că f nu are limită în punctul $x_0 = 0$.

   Rezolvare:

   Aplicăm *Definiţia:*
   *1) Numărul l_s este **limita la stânga** a funcţiei f în punctul x_0 adică avem*

   $$l_s = \lim_{x\nearrow x_0} f(x) \quad \text{sau} \quad l_s = f(x_0 - 0)$$

   dacă şi numai dacă pentru orice şir $x_n \to x_0$ cu $x_n < x_0$ avem $f(x_n) \to l_s$.
   *2) Numărul l_d este **limita la dreapta** a funcţiei f în punctul x_0 adică avem*

   $$l_d = \lim_{x\searrow x_0} f(x) \quad \text{sau} \quad l_d = f(x_0 + 0)$$

   dacă şi numai dacă pentru orice şir $x_n \to x_0$ cu $x_n > x_0$ avem $f(x_n) \to l_d$
   *3) (**Teorema de caracterizare a limitei cu ajutorul limitelor laterale**) Funcţia f are limită în x_0 dacă şi numai dacă are în x_0 limite laterale egale. În acest caz avem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$*

   Vom alege (ştim că există în mod evident) şirurile x_n, y_n a.î. x_n,$y_n \to 0$ cu $x_n < 0$ şi $y_n > 0$. Avem

   $$f(x_n) = \frac{|x_n|}{x_n} = \frac{-x_n}{x_n} = -1 \to -1,$$

   pentru $x_n \to 0$ iar

   $$f(y_n) = \frac{|y_n|}{y_n} = \frac{y_n}{y_n} = 1 \to 1,$$

   pentru $y_n \to 0$ deci $l_s = f(x_0 - 0) = -1$ şi $l_d = f(x_0 + 0) = 1$ adică funcţia f nu are limită în punctul $x_0 = 0$.

3. Să se determine constanta $\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. funcţia următoare **să aibă limită** în punctul $a = 1$:
$f : (1/e^2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x \ln(xe) + x^2}, & x \in (1/e^2, 1) \\ \alpha + x/2, & x \in [1, 2] \end{cases}$.

   Rezolvare:

   Aplicăm *Definiţiile:*
   *1) Numărul l_s spunem că este **limita la stânga** a funcţiei f în punctul x_0 dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. oricare ar fi $x \in E$, $x \neq x_0$ cu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ şi $x < x_0$ să rezulte $|f(x) - l| < \varepsilon$. Vom nota cu $l_s = f(x_0 - 0) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$.*
   *2) Numărul l_d spunem că este **limita la dreapta** a funcţiei f în punctul x_0 dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. oricare ar fi $x \in E$, $x \neq x_0$ cu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ şi $x > x_0$ să rezulte $|f(x) - l| < \varepsilon$. Vom nota cu $l_d = f(x_0 + 0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$.*
   3) ***(Teorema de caracterizare a limitei cu ajutorul limitelor laterale)*** *Funcţia f are limită în x_0 dacă şi numai dacă are în x_0 limite laterale egale. În acest caz avem $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$*

   Vom calcula limitele laterale $l_s = f(a - 0)$ şi respectiv $l_d = f(a + 0)$ pentru $a = 1$.

$$f(1-0) = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} \left(\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x \ln(xe) + x^2} \right)$$
$$= \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha \ln(e) + 1} = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 1} = \sqrt{(\alpha - 1)^2} = |\alpha - 1|$$

   Pe de altă parte
$$f(1+0) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} (\alpha + x/2) = \alpha + 1/2.$$

   Deci funcţia are limită în punctul $a = 1$ dacă
$$f(1-0) = f(1+0) \Leftrightarrow |\alpha - 1| = \alpha + 1/2.$$

   Acum dacă $\alpha > 1$ atunci avem $\alpha - 1 = \alpha + 1/2$, contradicţie. Dacă $\alpha < 1$ atunci avem $1 - \alpha = \alpha + 1/2 \Leftrightarrow 1/2 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1/4$.

4. Să se calculeze $\lim_{x \to \infty} (2 + \sin x) \ln x$.

   Rezolvare:

   Aplicăm ***criteriul majorării la infinit****: Fie două funcţii f, g a.î. $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Presupunem că avem inegalitatea $f(x) \geq g(x)$. Atunci obţinem că $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$*

   Ştim că
$$|\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq 1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$
   deci
$$(2 + \sin x) \ln x \geq (2 - 1) \ln x = \ln x \ , \ \forall x > 1$$
   de unde, trecând la limită, obţinem că $\lim_{x \to \infty} (2 + \sin x) \ln x \geq \lim_{x \to \infty} \ln x$ deci $\lim_{x \to \infty} (2 + \sin x) \ln x = \infty$

   Observaţie: am folosit următoarele limite
$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \ , \ \lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$$

5. Să se studieze **continuitatea** funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\dfrac{1}{x-2}}, & x\neq 2 \\ 0, & x=2 \end{cases}$$ în punctul $a=2$.

Rezolvare:

Aplicăm *Definiţiile:*

1) Funcţia f este continuă la stânga în punctul x_0 dacă există limita laterală $f(x_0-0)$ în acel punct şi ea este egală cu valoarea funcţiei în punct (adică $f(x_0-0)=f(x_0)$).

2) Funcţia f este continuă la dreapta în punctul x_0 dacă există limita laterală $f(x_0+0)$ în acel punct şi ea este egală cu valoarea funcţiei în punct (adică $f(x_0+0)=f(x_0)$).

3) Funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă şi numai dacă este continuă la stânga şi la dreapta în x_0 (adică avem $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$).

Vom calcula limitele laterale $l_s=f(a-0)$ şi respectiv $l_d=f(a+0)$ pentru $a=2$.

$$f(2-0)=\lim_{x\nearrow 2}f(x)=\lim_{x\nearrow 2}e^{-\frac{1}{x-2}}$$

Dar $\lim\limits_{x\nearrow 2}(x-2)=0$ şi $(x-2)<0$ deci $\frac{1}{x-2}\to\frac{1}{0_-}=-\infty$ deci

$$f(2-0)=\lim_{x\nearrow 2}f(x)=e^{-\lim\limits_{x\nearrow 2}\frac{1}{x-2}}=e^{\infty}=\infty$$

Pe de altă parte

$$f(2+0)=\lim_{x\searrow 2}f(x)=\lim_{x\searrow 2}e^{-\frac{1}{x-2}}$$

Dar $\lim\limits_{x\searrow 2}(x-2)=0$ şi $(x-2)>0$ deci $\frac{1}{x-2}\to\frac{1}{0_+}=\infty$ deci

$$f(2+0)=\lim_{x\searrow 2}f(x)=e^{-\lim\limits_{x\searrow 2}\frac{1}{x-2}}=e^{-\infty}=0$$

adică $f(2-0)=\infty$, $f(2+0)=0$, $f(2)=0$ deci, evident, funcţia nu este continuă în punctul $a=2$ (ea nici măcar nu are limită în punctul 2).

Observaţie: am folosit limitele

1) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0, u(x)>0$ atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{u(x)}=\frac{1}{0_+}=\infty$

2) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0, u(x)<0$ atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{u(x)}=\frac{1}{0_-}=-\infty$

3) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\infty$ atunci

$$\lim_{x\to x_0}e^{u(x)}=\infty\ ,\quad \lim_{x\to x_0}e^{-u(x)}=0$$

6. Să se determine constanta $\alpha\in\mathbb{R}$ a.î. funcţiile următoare să fie **continue** în punctele indicate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha\sin(x+1)}{x+1}, & x>-1\\ 2\alpha x+1, & x\leq -1\end{cases}$, $a=-1$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ x+e, & x\leq 0\end{cases}$, $a=0$

Rezolvare:

$a)$

$$f(-1-0) = \lim_{x\nearrow -1} f(x) = \lim_{x\nearrow -1} \frac{\alpha \sin(x+1)}{x+1} = \alpha$$

Pe de altă parte

$$f(-1+0) = \lim_{x\searrow -1} f(x) = \lim_{x\searrow -1} (2\alpha x + 1) = -2\alpha + 1$$

adică $f(-1-0) = \alpha$, $f(-1+0) = -2\alpha + 1$, $f(-1) = -2\alpha + 1$ deci, dacă vrem ca funcţia să fie continuă în punctul $a = -1$, atunci trebuie ca $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ adică $\alpha = -2\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha = 1/3$.

$b)$

$$f(0-0) = \lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0} (x+e) = e$$

Pe de altă parte

$$f(0+0) = \lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\searrow 0} \left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^{\alpha} = e^{\alpha}$$

adică $f(0-0) = e$, $f(0+0) = e^{\alpha}$, $f(0) = e$ deci, dacă vrem ca funcţia să fie continuă în punctul $a = 0$, atunci trebuie ca $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ adică $\alpha = 1$.

Observaţie: am folosit limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

pentru $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$

7. Să se studieze **continuitatea laterală** pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{x-1}-1}{x-1}, & x < 1 \\ \ln(1+x), & x \geq 1 \end{cases} \text{ în punctul } a = 1.$$

Rezolvare:

(pentru teorie vezi exerciţiul 7.)

Deci

$$f(1-0) = \lim_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\nearrow 1} \frac{2^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{y\nearrow 1} \frac{2^y - 1}{y} = \ln 2$$

Pe de altă parte

$$f(1+0) = \lim_{x\searrow 1} f(x) = \lim_{x\searrow 1} \ln(1+x) = \ln 2$$

adică $f(1-0) = \ln 2$, $f(1+0) = \ln 2$, $f(1) = \ln 2$ deci funcţia este continuă în punctul $a = 1$.

8. Să se calculeze limitele:

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\dfrac{1}{\sin x}}$, $b)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\sin 3x)^{\dfrac{1}{9x}}$

$c)$ $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\ln(1+tg(x+1))}{\ln(1+\sin(x+1))}$, $d)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{\sin 3(x-1)} - 1}{2(x-1)}$, $d)$ $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} x \ln x$, $e)$ $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} x^x$.

Rezolvare:

$a)$ Suntem în cazul de nedeterminare 1^∞ deoarece $a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x \to 1 + 1 + \cdots + 1 = n$. Vom folosi limita fundamentală cu e.

$$\left(\tfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \left[1+\left(\tfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$= \left\{\left[1+\tfrac{(a_1^x-1)+(a_2^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n}\right]^{\frac{n}{(a_1^x-1)+(a_2^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}}\right\}^{\frac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n\sin x}}$$

Deci

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\dfrac{1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n\sin x}}$$

Dar

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\tfrac{a_1^x-1}{x}+\tfrac{a_2^x-1}{x}+\cdots+\tfrac{a_n^x-1}{x}\right)\tfrac{x}{n\sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\tfrac{a_1^x-1}{x}+\tfrac{a_2^x-1}{x}+\cdots+\tfrac{a_n^x-1}{x}\right)\lim_{x\to 0}\tfrac{x}{n\sin x}$$
$$= (\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)\,\tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n}\ln(a_1\cdots a_n) = \ln\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

Deci

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\dfrac{1}{\sin x}} = e^{\ln\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}} = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

$b)$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{9x}} = (\text{nedeterminarea } 1^\infty) = \lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{9x}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x}}\right]^{\frac{\sin 3x}{9x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{9x}} = e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}} = e^{\frac{1}{3}}$$

$c)$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\ln(1+tg\,(x+1))}{\ln(1+\sin(x+1))} = \lim_{x\to -1}\frac{\ln(1+tg\,(x+1))}{1+tg\,(x+1)}\cdot$$
$$\cdot\frac{1+\sin(x+1)}{\ln(1+\sin(x+1))}\cdot\frac{1+tg\,(x+1)}{1+\sin(x+1)} = 1\cdot 1\cdot\frac{1+tg0}{1+\sin 0} = 1$$

$d)$ Facem schimbarea $x = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$ deci

$$x \searrow 0 \Leftrightarrow y \to \frac{1}{0_+} = \infty$$

Deci

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\ln\frac{1}{y} = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}(-\ln y) = -\lim_{y\to\infty}\frac{\ln y}{y} = 0$$

$e)$

$$\lim_{x\searrow 0} x^x = \lim_{x\searrow 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x\searrow 0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x} = e^0 = 1$$

Observaţie: am folosit limitele fundamentale

$$\lim_{x\to x_0}(1+u(x))^{\dfrac{1}{u(x)}} = e\ , \quad \lim_{x\to x_0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)} = \ln a$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1$$

pentru $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$

şi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty\ ,\ n \in \mathbb{N}$$