Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

SEMINARUL 6 & 7.

Cap. III_Limite de funcţii. Continuitate (continuare)

1. Se dă $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, continuă cu $\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) = 2$. Să se arate că f este mărginită.

   Rezolvare:

   Aplicăm *Teorema lui Weierstrass: O funcţie continuă pe o mulţime compactă este mărginită şi îşi atinge marginile.*

   Observaţie: O submulţime compactă din $\mathbb{R}$ înseamnă o mulţime închisă şi mărginită în $\mathbb{R}$.

   Vom aplica *definiţia cu ε şi δ* pentru a explicita limita $\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) = 2$. În cazul nostru $x \to \infty$ deci definiţia este: pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (în cazul acesta δ trebuie să fie suficient de mare) a.î. oricare ar fi $x > \delta$ să rezulte $|f(x) - 2| < \varepsilon$. Să luăm de exemplu $\varepsilon = 1$ deci există $\delta > 0$ a.î. oricare ar fi $x > \delta$ să rezulte $|f(x) - 2| < 1$.
   Deci pentru $x \in (\delta, \infty)$ avem că

   $$|f(x) - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < f(x) - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < f(x) < 3$$

   adică f este mărginită (inferior de 1şi superior de 3).
   Acum dacă $x \in [0, \delta]$ (care e interval compact), avem că f este mărginită pe intervalul $[0, \delta]$ (am aplicat Teorema lui Weierstrass, deoarece f e continuă).
   Deci f este mărginită pe domeniul $[0, \infty)$ deoarece este mărginită şi pe $[0, \delta]$ (din Teorema lui Weierstrass) şi pe (δ, ∞).

Cap. IV_Derivate şi diferenţiale.

1. Să se studieze **derivabilitatea** următoarei funcţii în punctul indicat:
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$, $x_0 = 1$

   Rezolvare:

   Aplicăm *Definiţia: Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ spunem că este **derivabilă** în punctul x_0 dacă limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există şi este finită. Limita se numeşte derivata funcţiei f în punctul x_0 şi se va nota cu $f'(x_0)$ sau cu $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.*

   *Observaţia: Dacă limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există şi este infinită atunci spunem că funcţia f **are derivată (infinită) dar nu este derivabilă**.*

   *Definiţia: a) Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ spunem că este **derivabilă la stânga** în punctul x_0 dacă limita $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există şi este finită. Limita se numeşte derivata la stânga a funcţiei f în punctul x_0 şi se va nota cu $f_s'(x_0)$.*

b) Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ spunem că este ***derivabilă la dreapta*** *în punctul x_0 dacă limita $\lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există şi este finită. Limita se numeşte derivata la dreapta a funcţiei f în punctul x_0 şi se va nota cu $f_d^{'}(x_0)$.*
Teorema: Funcţia f are derivată în punctul $x = x_0$ dacă şi numai dacă are derivate laterale egale în x_0.

Calculăm limita

$$\lim_{x\to 1} \tfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \tfrac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1} = \lim_{x\to 1} \tfrac{(x-1)^{1/3}}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \tfrac{1}{(x-1)^{1-1/3}} = \lim_{x\to 1} \tfrac{1}{(x-1)^{1-1/3}} = \lim_{x\to 1} \tfrac{1}{(x-1)^{2/3}}$$

Observăm că este necesar să calculăm limitele laterale:

$$f_s^{'}(1) = \lim_{x\nearrow 1} \tfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\nearrow 1} \tfrac{1}{(x-1)^{2/3}} = \tfrac{1}{(0_-)^{2/3}} = \tfrac{1}{0_+} = \infty$$
$$f_d^{'}(1) = \lim_{x\searrow 1} \tfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\searrow 1} \tfrac{1}{(x-1)^{2/3}} = \tfrac{1}{(0_+)^{2/3}} = \tfrac{1}{0_+} = \infty$$

Deci există $f^{'}(1) = f_s^{'}(1) = f_d^{'}(1) = \infty$ adică funcţia are derivată (şi ea este infinită) dar f nu este derivabilă.

2. Să se stabilească dacă următoarele funcţii au derivate, dacă sunt derivabile în punctele indicate şi care este natura acestor puncte:

$a)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 5^x - 1 & , x < 0 \\ \ln(1+x) & , x \geq 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$,

$b)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x & , x \leq 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$,

$c)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$, $x_0 = 1$, $x_0 = -1$.

Rezolvare:

Pentru teorie vezi exerciţiul 1. Mai aplicăm şi *Definiţia: 1) Dacă există derivatele laterale şi sunt diferite şi cel puţin una din ele este finită atunci punctul $M(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numeşte* ***punct unghiular****.*
2) Dacă una din derivatele laterale este $+\infty$ iar cealaltă este $-\infty$ atunci punctul $M(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numeşte ***punct de întoarcere****.*

$a)$ Calculăm derivatele laterale

$$f_s^{'}(0) = \lim_{x\nearrow 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0} \tfrac{5^x-1-\ln 1}{x} = \lim_{x\nearrow 0} \tfrac{5^x-1}{x} = \ln 5$$

şi

$$f_d^{'}(0) = \lim_{x\searrow 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\searrow 0} \tfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = \lim_{x\searrow 0} \tfrac{\ln(1+x)}{x}$$
$$= \lim_{x\searrow 0} \tfrac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\searrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\searrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

deci f are derivate laterale finite dar diferite deci nu are derivată deoarece

$$f_s^{'}(0) = \ln 5 \neq 1 = f_d^{'}(0)$$

Avem că punctul $M(0, f(0)) = M(0, 0)$ este punct unghiular pentru graficul lui f.

$b)$

$$f_s^{'}(0) = \lim_{x \nearrow 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \nearrow 0} \tfrac{\sin x - \sin 0}{x} = 1$$
$$f_d^{'}(0) = \lim_{x \searrow 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \searrow 0} \tfrac{x}{x} = 1$$

deci f este derivabilă în punctul $x = 0$ şi $f^{'}(0) = f_s^{'}(0) = f_d^{'}(0) = 1$.

$c)$ Luăm mai întâi cazul $x_0 = 1$

$$f_s^{'}(1) = \lim_{x \nearrow 1} \tfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \nearrow 1} \tfrac{\sqrt{|x^2-1|}}{x-1} = \lim_{x \nearrow 1} \tfrac{\sqrt{|(x-1)(x+1)|}}{x-1}$$
$$= \lim_{x \nearrow 1} \tfrac{\sqrt{x+1}\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x \nearrow 1} \tfrac{\sqrt{x+1}\sqrt{1-x}}{-(1-x)} = \lim_{x \nearrow 1} \tfrac{\sqrt{x+1}}{-\sqrt{1-x}} = \tfrac{\sqrt{2}}{-0_+} = -\infty$$

şi

$$f_d^{'}(1) = \lim_{x \searrow 1} \tfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \searrow 1} \tfrac{\sqrt{|x^2-1|}}{x-1}$$
$$= \lim_{x \searrow 1} \tfrac{\sqrt{|(x-1)(x+1)|}}{x-1} = \lim_{x \searrow 1} \tfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \tfrac{\sqrt{2}}{0_+} = \infty$$

deci avem $f_s^{'}(1) = -\infty$ şi $f_d^{'}(1) = \infty$ adică f nu are derivată în punctul 1 şi punctul $M(1, f(1)) = M(1, 0)$ este punct de întoarcere.

Observaţie: am folosit limitele importante

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

şi explicitarea modulului

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

3. Să se determine abscisa punctului în care **tangenta la graficul funcţiei** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$, formează unghiul $3\pi/4$ cu axa Ox (se cunoaşte valoarea tg$(3\pi/4) = -1$).

   Rezolvare:

   Aplicăm următoarea interpretare a derivatei unei funcţii: *Derivata $f^{'}(x_0)$ a funcţiei f în punctul x_0 este, din punct de vedere geometric,* ***panta tangentei*** *la graficul funcţiei f în punctul x_0.*

   Definiţie: Dacă avem dreapta $y = mx + n$, $m \neq 0$, atunci ***panta dreptei*** *este m şi este egală cu tangenta unghiului făcut de dreaptă cu axa Ox.*

   În cazul nostru tangenta la graficul funcţiei $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ este

   $$f^{'}(x) = \left(\tfrac{x+1}{x-3}\right)^{'} = \tfrac{(x+1)^{'}(x-3)-(x+1)(x-3)^{'}}{(x-3)^2} = \tfrac{(x-3)-(x+1)}{(x-3)^2} = \tfrac{-4}{(x-3)^2}$$

   Deci m într-un punct curent x este $\frac{-4}{(x-3)^2}$. Pe de altă parte $m =$tgα unde α este unghiului făcut de dreaptă cu axa Ox adică $3\pi/4$ deci

   $$m = \text{tg}\,(3\pi/4) = -1$$

   Vom obţine atunci ecuaţia

   $$\tfrac{-4}{(x-3)^2} = -1 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 3 = 2 \text{ sau } x - 3 = -2$$

   adică abscisele celor două puncte sunt soluţiile $x_1 = 5$, $x_2 = 1$ iar cele două puncte de pe grafic sunt $A(x, f(x))$ adică $A_1(5, 3)$, $A_1(1, -1)$.

4. Să se determine abscisa c a unui punct în care tangenta la graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(x+2)/2 & , x\le 0\\ \sqrt{x+1} & , x>0\end{cases}$, să fie paralelă cu coarda ce uneşte punctele de pe grafic de abscise $x_1=-4$, $x_2=3$.

Rezolvare:

Punctele de pe grafic de abscise $x_1=-4$, $x_2=3$ sunt $A_1(-4,f(-4))=A_1(-4,-1)$ şi $A_2(3,f(3))=A_2(3,2)$. *Dreapta ce uneşte cele două puncte* are ecuaţia

$$\tfrac{x-(-4)}{3-(-4)}=\tfrac{y-(-1)}{2-(-1)}\Leftrightarrow \tfrac{x+4}{7}=\tfrac{y+1}{3}\Leftrightarrow y=\tfrac{3}{7}x+\tfrac{5}{7}$$

deci panta acestei drepte este $3/7$. Pe de altă parte *două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă au aceeaşi pantă*. Deci panta tangentei într-un punct x este de $3/7$ şi conform exerciţiului 3. panta este $f'(x)$. Dar $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & , x\le 0\\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} & , x>0\end{cases}$ deci vom rezolva ecuaţia $f'(x)=3/7$. Evident nu putem lua $x\le 0$. Pentru $x>0$ ecuaţia devine

$$\tfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\tfrac{3}{7}\Leftrightarrow x=\tfrac{13}{36}$$

Deci punctul de pe grafic în care tangenta are panta $3/7$ are abscisa $13/36$.

Observaţie: 1) ecuaţia unei drepte care trece prin punctele $A(x_1,y_1)$, $A(x_2,y_2)$ are ecuaţia

$$\tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\tfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

2) Două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă au aceeaşi pantă.

5. Să se arate că există cel puţin un număr real $a>0$ cu proprietatea $a^x\ge x^a$, $\forall\, x>0$.

Rezolvare:

Aplicăm *Teorema* ***lui Fermat***: *Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ are derivată intr-un punct de extrem x_0 din interiorul intervalului I atunci derivata sa este nulă in acest punct, adică $f'(x_0)=0$.*
Definiţia: 1) Spunem că x_0 este ***punct de maxim local*** *pentru funcţia f dacă are loc $f(x)\le f(x_0)$, oricare ar fi x intr-o vecinătate a lui x_0.*
2) Spunem că x_0 este ***punct de minim local*** *pentru funcţia f dacă are loc $f(x)\ge f(x_0)$, oricare ar fi x intr-o vecinătate a lui x_0.*
3) Punctele de maxim şi minim local se numesc puncte de extrem local pentru funcţia f.

În cazul nostru dacă vrem ca $a^x\ge x^a,\forall\, x>0$ atunci să notăm cu $f(x)=a^x-x^a$, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ deci are loc

$$f(x)\ge 0=f(a)\ ,\ \forall\, x\in(0,\infty)$$

adică $x=a$ este punct de minim local. Deci trebuie ca

$$f'(a)=0\Leftrightarrow \left(a^x\ln a-ax^{a-1}\right)|_{x=a}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^a\ln a-aa^{a-1}=0\Leftrightarrow \ln a=1\Leftrightarrow a=e$$

Deci în mod necesar trebuie ca $a=e$ adică are loc

$$e^x\ge x^e,\forall\, x\in(0,\infty).$$

6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x^m (x-1)^n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că ecuaţia $f'(x) = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(0, 1)$.

   Rezolvare:

   Aplicăm *Teorema **lui Rolle**: Fie I un interval, $f : I \to R$ şi $a, b \in I$. Dacă:*
   1) funcţia f este continuă pe $[a, b]$,
   2) funcţia f este derivabilă (a, b),
   3) $f(a) = f(b)$,
   atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ în care derivata se anulează, $f'(c) = 0$.

   În cazul nostru avem în mod evident că f este funcţie continuă pe $\mathbb{R}$ deci şi pe$[0, 1]$, derivabilă pe $\mathbb{R}$ deci şi pe $(0, 1)$ şi avem că $f(0) = f(1) = 0$. Deci există cel puţin un punct $c \in (0, 1)$ în care derivata se anulează adică $f'(c) = 0$.

7. Se consideră funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n & , x \in [-1, 0] \\ px^2 + 4x + 4 & , x \in (0, 1] \end{cases}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.
   Să se determine parametrii m, n, p a.î. f să satisfacă condiţiile de aplicabilitate ale **teoremei lui Rolle** pe $[-1, 1]$ şi să se aplice efectiv această teoremă.

   Rezolvare:

   Impunem condiţiile teoremei lui Rolle. Trebuie ca f să fie continuă pe $[-1, 1]$. Avem f evident continuă pe $[-1, 0) \cup (0, 1]$ iar în $x = 0$ calculăm limitele laterale, $f(0-0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \left(x^2 + mx + n\right) = n$ iar $f(0+0) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \left(px^2 + 4x + 4\right) = 4$ deci pentru ca f să fie continuă în 0 trebuie ca $n = 4$. Deci $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + 4 & , x \in [-1, 0] \\ px^2 + 4x + 4 & , x \in (0, 1] \end{cases}$.

   În continuare trebuie ca f să fie derivabilă pe $(-1, 1)$. Avem f evident derivabilă pe $(-1, 0) \cup (0, 1)$ iar în $x = 0$ calculăm derivatele laterale,

   $$f_s'(0) = \lim_{x \nearrow 0} \tfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \tfrac{x^2 + mx + 4 - 4}{x} = \lim_{x \nearrow 0} (x + m) = m$$
   $$f_d'(0) = \lim_{x \searrow 0} \tfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \tfrac{px^2 + 4x + 4 - 4}{x} = \lim_{x \searrow 0} (px + 4) = 4$$

   deci pentru ca f să fie derivabilă în 0 trebuie ca $m = 4$.
   Deci $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & , x \in [-1, 0] \\ px^2 + 4x + 4 & , x \in (0, 1] \end{cases}$.
   Mai impun ca $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow (-1)^2 + 4(-1) + 4 = p1^2 + 4 + 4 \Leftrightarrow p = -7$
   Deci $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & , x \in [-1, 0] \\ -7x^2 + 4x + 4 & , x \in (0, 1] \end{cases}$ şi din Rolle obţinem că există cel puţin un punct $c \in (-1, 1)$ a.î. $f'(c) = 0$. Dar $f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & , x \in [-1, 0] \\ -14x + 4 & , x \in (0, 1] \end{cases}$ deci dacă $x \in [-1, 0]$ atunci ecuaţia devine $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \notin [-1, 0]$, iar dacă $x \in (0, 1]$ atunci ecuaţia devine $-14x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2/7 \in (0, 1]$. Deci $c = 2/7$.

8. Să se arate că:

   $a)$ $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \pi/2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$
   $b)$ $\arcsin x + \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \begin{cases} -\pi/2 & , x \in [-1, 0) \\ \pi/2 & , x \in (0, 1] \end{cases}$.

Rezolvare:

Aplicăm ***prima consecinţă a teoremei lui Lagrange***: *Dacă funcţia f are derivata nulă pe un interval I atunci f este constantă pe acel interval.*

a) Să notăm cu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=$arctg$x$+arcctg$x$.
Avem

$$f^{'}(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1}{1+x^2}=0,\forall\, x\in\mathbb{R}$$

deci $f(x)=c,\forall\, x\in\mathbb{R}$. Constanta $c\in\mathbb{R}$ se va determina dând valori particulare lui x, astfel dacă luăm $x=1$ atunci avem

$$f(1)=\text{arctg}1+\text{arcctg}1=c\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \pi/4+\pi/4=c\Leftrightarrow c=\pi/2$$

deci

$$\text{arctg}x+\text{arcctg}x=\pi/2\,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

b) Luăm $f_1:[-1,0)\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=\arcsin x+\text{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Calculăm derivata

$$f_1^{'}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}{x^2}}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^{'}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x^2}{1}\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{'}x-\sqrt{1-x^2}x^{'}}{x^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2\right)^{'}x-\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0\,,\ \forall\, x\in[-1,0)$$

Deci $f_1(x)=c_1,\forall\, x\in[-1,0)$ de unde avem în particular, pentru $x=-1$ că $\arcsin(-1)+$arctg$\frac{\sqrt{1-(-1)^2}}{-1}=c_1\Leftrightarrow -\pi/2+0=c_1\Leftrightarrow c_1=-\pi/2$.

Să luăm acum $f_2:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=\arcsin x+\text{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Evident au loc aceleaşi calcule ca mai sus adică $f_2^{'}(x)=0$ deci $f_2(x)=c_2$, $\forall\ x\in(0,1]$ de unde avem în particular, pentru $x=1$ că $\arcsin 1+$arctg$\frac{\sqrt{1-1^2}}{1}=c_2\Leftrightarrow \pi/2+0=c_2\Leftrightarrow c_2=\pi/2$. Deci $f(x)=\begin{cases}-\pi/2 & ,\ x\in[-1,0)\\ \pi/2 & ,\ x\in(0,1]\end{cases}$.

9. Folosind corolarul teoremei lui Lagrange, să se studieze derivabilitatea următoarei funcţii în punctul indicat: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & ,\ x\le 0\\ \ln(x+1)+x+1 & ,\ x>0\end{cases}$, $x_0=0$.

Rezolvare:

Aplicăm ***a treia consecinţă a teoremei lui Lagrange***: *Dacă f este continuă pe I, derivabilă pe $I\setminus\{x_0\}$ şi dacă derivata sa are limită în punctul x_0, atunci $f^{'}(x_0)$ există şi are loc $f^{'}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f^{'}(x)$.*

Evident f continuă pe domeniul $\mathbb{R}^*$. Studiem continuitatea în 0.

$$f(0-0)=\lim_{x\nearrow 0}f(x)=\lim_{x\nearrow 0}\left(x^2+1\right)=1$$
$$f(0+0)=\lim_{x\searrow 0}f(x)=\lim_{x\searrow 0}\left(\ln(x+1)+x+1\right)=\ln 1+1=1$$

deci $f(0-0) = f(0+0) = f(0) = 1$ adică f continuă în 0. Deci f continuă pe domeniul $\mathbb{R}$.
În ceea ce priveşte derivata avem evident f derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi

$$f^{'}(x) = \begin{cases} 2x & , \ x < 0 \\ \frac{1}{1+x} + 1 & , \ x > 0 \end{cases}$$

Observăm acum că $\lim\limits_{x\nearrow 0} f^{'}(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} 2x = 0$ şi $\lim\limits_{x\searrow 0} f^{'}(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} \left(\frac{1}{1+x} + 1\right) = 2$ deci nu există $\lim\limits_{x\to 0} f^{'}(x)$ deci f nu este derivabilă in punctul 0.
Punctul $A(0, f(0)) = A(0,1)$ este punct unghiular pentru graficul lui f (pentru definiţie vezi exerciţiul 2.).

10. Folosind monotonia unor funcţii alese convenabil să se demonstreze inegalităţile:

    $a)$ $\ln x \leq x - 1, \forall\, x > 0,$ $b)$ arctg$x > \dfrac{x}{1+x^2}$, $\forall\, x > 0$

    Temă: se va aplica ***a doua consecinţă a teoremei lui Lagrange***.