Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

SEMINARUL 8.

Cap. IV_Derivate şi diferenţiale (continuare)

1. Să se aplice teorema lui Cauchy următoarelor perechi de funcţii pe intervalele specificate, determinând de fiecare dată punctele c:

   $a)\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3} & ,\ x\in[-2,1]\\ \dfrac{x+7}{4} & ,\ x\in(1,5]\end{cases}\ ,\ g(x)=x\ ,\ x\in[-2,5]$

   $b)\ f(x)=\ln x\ ,\ g(x)=\dfrac{e}{x}\ ,x\in[1,e]$(Temă)

   Rezolvare:

   Aplicăm Teorema lui Cauchy: Fie I un interval, funcţile $f,g:I\to R$ şi $a<b$ două puncte din I. Dacă:
   1) f şi g sunt continue pe $[a,b]$,
   2) f şi g sunt derivabile pe (a,b),
   3) $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in(a,b)$
   atunci $g(a)\neq g(b)$ şi există cel puţin un punct $c\in(a,b)$ a.î. să avem

   $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   $a)$ (Indicaţie) Mai întâi se verifică ipotezele teoremei lui Cauchy şi calculăm

   $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} & ,\ x\in[-2,1)\\ \dfrac{1}{4} & ,\ x\in(1,5]\end{cases}\ ,\ g'(x)=1$$

   Apoi scriem

   $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\Leftrightarrow\frac{3-1}{5-(-2)}=\frac{f'(c)}{1}\Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow f'(c)=2/7$$

   Deci $c\in[-2,1)$ şi obţinem ecuaţia

   $$\frac{1}{2\sqrt{c+3}}=\frac{2}{7}\Leftrightarrow c=1/16$$

2. Să se calculeze limitele:

   $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^3}{\sin^2 x}\ ,\ b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{3x^2}\ ,\ c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\dfrac{2\sin x}{3}-\dfrac{\text{tg}x}{3}}{x^5},$

$d)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^k}$, $k\in\mathbb{N}^*$ (Temă), $e)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}$, $a>0$ (Temă)

Rezolvare:

Se vor aplica regulile lui L'Hospital:

Regula lui L'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$: Fie x_0 punct de acumulare pentru intervalul I şi f,g două funcţii definite pe I (eventual fără x_0). Dacă
1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;
2) f şi g sunt derivabile pe I, cu excepţia eventual a lui x_0;
3) $g'(x)\neq 0, \forall x\neq x_0$ din I;
4) există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Atunci: a) $g(x)\neq 0, \forall x\neq x_0$ din I şi b) există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Regula lui L'Hospital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$: Fie x_0 punct de acumulare pentru intervalul I şi f,g două funcţii definite pe I (eventual fără x_0). Dacă
1) $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;
2) f şi g sunt derivabile pe I, cu excepţia eventual a lui x_0;
3) $g'(x)\neq 0, \forall x\neq x_0$ din I;
4) există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Atunci există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$a)$ suntem în nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Trebuie mai întâi verificate cele 4 condiţii ale teoremei lui L'Hospital cu $x_0=0$. Apoi se va calcula

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\tfrac{2xe^{x^2}-3x^2}{2\sin x\cos x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{x}{\sin x}\tfrac{2e^{x^2}-3x}{2\cos x}=1\,\tfrac{2e^0-0}{2}=1$$

$b)$ suntem în nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$. Trebuie mai întâi verificate cele 4 condiţii ale teoremei lui L'Hospital cu $x_0=\infty$. Apoi se va calcula

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{3x^2}$$

În continuare mai aplicăm o dată teorema, deci

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{6x^2}=0$$

$c)$ de asemenea se va aplica L'Hospital (suntem în nedeterminarea $\frac{0}{0}$) de două ori.

3. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right]$

Rezolvare:

Notez $\frac{1}{x}=y$ şi $x\to\infty\Leftrightarrow y\to 0$. Deci trebuie calculată limita

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left[(1+y)^{1/y}-e\right]=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{1/y}-e}{y}$$

Folosim identitatea

$$a^b = e^{\ln\left(a^b\right)} = e^{b\ln a}$$

deci

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left[(1+y)^{1/y}-e\right] = \lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}-e}{y}$$

Acum aplicăm teorema lui L'Hospital (pentru nedeterminarea $\frac{0}{0}$), se separa apoi termenul $e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = (1+y)^{1/y}$ şi pentru ceea ce a rămas se mai aplică o dată teorema. Astfel

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}-e}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\left(e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}-e\right)'}{1} = \lim_{y\to 0}\left(e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}\right)' = \lim_{y\to 0} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right)' =$$

$$= \lim_{y\to 0} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}\,\frac{(\ln(1+y))'\cdot y-\ln(1+y)\cdot 1}{y^2} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{1+y}\cdot y-\ln(1+y)}{y^2} = e\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y-(1+y)\ln(1+y)}{y^2(1+y)}$$

Aplicând încă o dată teorema lui L'Hospital obţinem

$$\lim_{y\to 0}\frac{y-(1+y)\ln(1+y)}{y^2(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1-(1+y)'\ln(1+y)-(1+y)(\ln(1+y))'}{2y+3y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{1-\ln(1+y)-(1+y)\frac{1}{1+y}}{2y+3y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{-\ln(1+y)}{2y+3y^2} = (\text{aplicăm Teorema}) = \lim_{y\to 0}\frac{-\frac{1}{1+y}}{2+6y} = \frac{-1}{2}$$

Deci limita iniţială este

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right] = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left[(1+y)^{1/y}-e\right] = \frac{-e}{2}$$

4. Să se calculeze limitele: $a)$ $\lim\limits_{x\searrow 0}\left[\ln(x+1)\right]^x$, $b)$ $\lim\limits_{x\to 0}\left[1-\cos x\right]^x$ (Temă, se va aplica L'Hospital de două ori)

Rezolvare:
Folosim identitatea

$$a^b = e^{b\ln a}$$

$a)$

$$\left[\ln(x+1)\right]^x = e^{x\ln(\ln(x+1))} = e^{\frac{\ln(\ln(x+1))}{1/x}}$$

Acum vom studia separat limita (căreia îi vom aplica L'Hospital)

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\ln(\ln(x+1))}{1/x} = \lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{\ln(x+1)}\frac{1}{x+1}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\searrow 0}\frac{-1}{x+1}\frac{x^2}{\ln(x+1)} = -1\cdot\lim_{x\searrow 0}\frac{x^2}{\ln(x+1)}$$

Pentru $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{x^2}{\ln(x+1)}$ mai aplicăm o dată L'Hospital

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{x^2}{\ln(x+1)} = \lim_{x\searrow 0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}} = 0$$

5. Să se calculeze limitele: $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}[1+x]^{1/x}$, $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$ (Temă)

   Rezolvare:

   Vezi exerciţiul anterior.

6. Să se calculeze limitele: $a)\ \lim\limits_{x\to 0}[1+\arcsin x]^{\frac{1}{\sin x}}$, $b)\ \lim\limits_{x\searrow 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (Temă)

   Rezolvare:

   $a)$ Vezi exerciţiul anterior.

$$[1+\arcsin x]^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\frac{\ln(1+\arcsin x)}{\sin x}}$$

   şi se va calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\arcsin x)}{\sin x}$

7. Să se arate că limitele $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$, $b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}=0$, nu pot fi obţinute cu regula lui L'Hospital

   Rezolvare:

   Vezi exerciţiul 2, enunţurile Regulilor lui L'Hospital.
   În cazul $a)$ observăm că:
   1) nu există limitele $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ (deoarece funcţiile periodice nu au limită la ∞, iar $\sin$ este periodică)
   2) $g^{'}(x)=1+\cos x$ nu verifică condiţia $g^{'}(x)\neq 0$,$\forall x$ deoarece dacă $x=(2n+1)\pi$ atunci $g^{'}(x)=1+\cos(2n+1)\pi=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
   În cazul $b)$ observăm că nu există limita $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$

   $a)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

   deoarece

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq\frac{1}{x}\to 0,\ \text{pentru } x\to\infty$$

   deci

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

   $b)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}x\sin(1/x)\right]=0$$

   deoarece $\left|\frac{x}{\sin x}x\sin(1/x)\right|\leq\left|\frac{x}{\sin x}x\right|\to 0$, pentru $x\to 0$

8. Să se calculeze diferenţiala următoarelor funcţii:
   $a)\ f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$ în punctul $x=1$, $b)\ f(x)=$arctg$\left(x^3+1\right)$ în punctul $x=0$, $c)\ f(x)=\arcsin\frac{x}{a}$ în punctul $x=0$

   Rezolvare:

   Aplicăm formula

$$df(x)=f^{'}(x)\,dx$$