Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

CURS X

Capitolul V: Serii de funcţii; serii de puteri

1 Şiruri de funcţii

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o submulţime a lui $\mathbb{R}$. Fie $f_n : A \to \mathbb{R}$ o funcţie definită pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Şirul $(f_n)_n$ se va numi şir de funcţii. De exemplu $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite de $f_n(x) = \sin\left(x + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ sau $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite de $f_n(x) = x^n$, $n \geq 0$.

Ca şi în cazul seriilor numerice, suntem interesaţi să studiem comportamentul aplicaţiilor f_n când $n \to \infty$. Primul pas este acela de a analiza şirul numeric dat de valorile funcţiilor f_n în fiecare punct al domeniului A.

Definiţia 1 *Şirul de funcţii $(f_n)_n$ converge punctual în $\bar{x} \in A$ dacă şirul numeric $(f_n(\bar{x}))_n$ converge pentru $n \to \infty$. Submulţimea $\mathcal{C} \subset A$ unor asemenea puncte de convergenţă $\bar{x}$ se numeşte* ***mulţimea de convergenţă punctuală a şirului de funcţii*** *$(f_n)_n$. Astfel putem defini funcţia $f : \mathcal{C} \to R$ prin*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ \forall x \in \mathcal{C}.$$

Vom scrie $f_n \to f$ punctual pe $\mathcal{C}$.

Remarca 2 *Din definiţie deducem că f este limita şirului de funcţii $(f_n)_n$ dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, \ \forall x \in \mathcal{C}.$$

Exemplul 3 *Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de $f_n(x) = \sin\left(x + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$. Utilizând faptul că $\left(x + \frac{1}{n}\right) \to x$ precum şi continuitatea funcţiei* sin *deducem că*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(x + \frac{1}{n}\right) = \sin x\ , \ \forall x \in \mathbb{R} = \mathcal{C}.$$

Exemplul 4 *Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de $f_n(x) = x^n$, $n \geq 0$. Utilizând limite cunoscute deducem că*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } |x| < 1, \\ 1, & \text{dacă } x = 1, \\ +\infty, & \text{dacă } x > 1, \\ \nexists & \text{dacă } x \leq -1. \end{cases}$$

Deci funcţia limită f este definită pe $\mathcal{C} = (-1, 1]$ prin

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } |x| < 1, \\ 1, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

Remarca 5 *Menţionăm că noţiunea de convergenţă punctuală nu este suficientă, în multe cazuri, pentru a transfera proprietăţi ale funcţiilor f_n la funcţia limită f. Continuitatea, diferenţiabilitatea sau integrabilitatea sunt asemenea situaţii. În exemplul de mai sus se vede că $f_n(x) = x^n$ sunt continue dar funcţia limită nu este continuă (în punctul $x = 1$).*

Introducem în continuare noţiunea de *uniformă convergenţă*. Pentru aceasta vom relua definiţia convergenţei punctuale. Astfel: $\forall x \in \mathcal{C}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Deci acest n_0 depinde de ε şi de x (adică $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$). În alţi termeni spunem că rangul (pragul) n_0 pentru care $f_n(x)$ se apropie de $f(x)$, variază de la un punct la altul. De exemplu pentru $f_n(x) = x^n$ cu $x \in (0,1)$, condiţia $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ devine

$$|x^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow x^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln x < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$$

(am folosit faptul că $x \in (0,1) \Leftrightarrow \ln x \in (-\infty, 0)$).

Deci rangul $n_0 = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right]$ (partea întreagă a lui $\ln \varepsilon / \ln x$), deci depinde de punctul x în care studiem limita. Observăm că dacă $x \to 1$ atunci $\ln x \to 0_-$ deci $\frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \to \frac{\ln \varepsilon}{0_-} = +\infty$.

Convergenţa se va numi uniformă dacă rangul n_0 se va putea alege independent de x. Astfel definiţia trebuie reformulată: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathcal{C}.$$

Utilizând noţiunea de supremum putem reformula astfel:

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x \in \mathcal{C}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ .$$

Definiţia 6 *Şirul $(f_n)_n$ converge uniform pe $\mathcal{C}$ la funcţia f dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in \mathcal{C}} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

În alte cuvinte, pentru orice $\varepsilon > 0$, există rangul $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathcal{C}.$$

Vom scrie $f_n \underset{u}{\longrightarrow} f$.

Exemplul 7 *Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \sin\left(x + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$. Vom utiliza formula trigonometrică*

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

(într-adevăr, $\sin a - \sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) - \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$).

Deci pentru orice $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sin\left(x + \frac{1}{n}\right) - \sin x\right| = 2\left|\sin\frac{1}{2n}\right|\left|\cos\left(2x + \frac{1}{2n}\right)\right| \leq 2\left|\sin\frac{1}{2n}\right| = 2\sin\frac{1}{2n}\ .$$

Dacă trecem la limită pentru $n \to \infty$ deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 2 \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \sin\frac{1}{2n} = 2 \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{2n} = 2\sin 0 = 0.$$

Exemplul 8 *Fie* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$, $n \geq 0$. *Vom considera* $x \in [0,1)$. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1)} x^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Dacă vom considera intervalul $[0,a]$ *cu* $0 < a < 1$, *deducem că*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,a]} x^n = \lim_{n\to\infty} a^n = 0,$$

adică $f_n(x) := x^n$ *converge uniform pe orice subinterval compact* $[0,a] \subset [0,1)$. *Se poate arăta chiar că*

$$x^n \underset{u}{\longrightarrow} 0, \text{ pe orice } [-a,a] \subset (-1,1).$$

2 Proprietăţi ale sirurilor de funcţii uniform convergente

Convergenţa punctuală nu este suficientă pentru a putea transfera proprietatea de continuitate (vezi şi exemplul din Observaţia 5).

Teorema 9 *Fie şirul de funcţii continue* $(f_n)_n$ *astfel încât* $f_n \underset{u}{\longrightarrow} f$ *pe intervalul* I. *Atunci limita* f *este o funcţie continuă.*

De asemenea, convergenţa punctuală nu este suficientă pentru a putea transfera integrabilitatea. Astfel:

Exemplul 10 *Fie* $f_n(x) := xn^2e^{-nx}$ *cu* $x \in [0,1]$. *Atunci are loc convergenţa punctuală (pentru orice* $x \in [0,1]$*)*

$$f_n(x) = xn^2e^{-nx} \to 0 =: f(x), \text{ când } n \to \infty.$$

Pe de altă parte

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0dx = 0,$$

iar

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^1 xn^2e^{-nx}dx = (\text{cu schimbarea de variabilă } nx = y) = \int_0^n ye^{-y}dy \\ &= (\text{metoda de integrare prin părţi}) = \left(-ye^{-y} - e^{-y}\right)\Big|_{y=0}^{y=n} = 1 \to 1, \text{ când } n \to \infty.\end{aligned}$$

Teorema 11 *Fie* $I = [a,b]$ *şi şirul* $(f_n)_n$ *de funcţii integrabile pe* I *astfel încât* $f_n \underset{u}{\longrightarrow} f$ *pe* I. *Atunci limita* f *este o funcţie integrabilă şi*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx, \text{ când } n \to \infty.$$

Remarca 12 *În condiţiile teoremei de mai sus putem scrie*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

Teorema 13 *Fie şirul* $(f_n)_n$ *de funcţii derivabile pe* $I = [a,b]$ *cu derivatele continue pe* I. *Presupunem că există două funcţii* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $f_n \longrightarrow f$ *punctual pe* I *şi* $f_n' \underset{u}{\longrightarrow} g$ *pe* I. *Atunci limita* f *este o funcţie derivabilă pe* I *cu derivata continuă pe* I *şi* $f' = g$.

Remarca 14 *În condiţiile teoremei de mai sus putem scrie*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \ , \ \forall x \in I.$$

Exemplul 15 *Fie* $f, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$ *şi* $f_n(x) := x - \frac{x^n}{n}$. *Atunci* $f_n \underset{u}{\longrightarrow} f$ *deoarece*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^n}{n} \le \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Pe de altă parte funcţiile

$$f_n'(x) = 1 - x^{n-1}$$

converg la funcţia discontinuă

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0,1), \\ 0, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

Deci şirul $(f_n')_n$ *converge doar punctual la funcţia* g, *pe* $[0,1]$ *(nu şi uniform) şi se vede că* g *nu coincide cu derivata lui* f *(care este limita uniformă a lui* f_n*).*

3 Serii de funcţii

Fie $(f_n)_{n\ge 0}$ un şir de funcţii $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Putem construi acum (în acelaşi mod ca şi seriile numerice) seria de funcţii

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$$

Mai precis, considerăm şirul sumelor parţiale $(s_n)_n$ dat de

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k = f_1 + f_2 + \cdots + f_n \ .$$

Putem acum considera diverse tipuri de convergenţe.

Definiţia 16 *Seria de funcţii* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *spunem că converge punctual în* $\bar{x} \in A$ *dacă şirul sumelor parţiale* $(s_n)_n$ *converge punctual în* $\bar{x}$. *Echivalent, seria numerică* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\bar{x})$ *converge.*

Definiţia 17 *Submulţimea* $\mathcal{C} \subset A$ *unor asemenea puncte de convergenţă* $\bar{x}$ *se numeşte* ***mulţimea de convergenţă punctuală a seriei*** $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. *Astfel putem defini funcţia* $s : \mathcal{C} \to R$ *prin*

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x) \ , \ \forall x \in \mathcal{C}.$$

Prin urmare mulţimea de convergenţă punctuală a unei serii poate fi studiată utilizând în fiecare punct $x \in A$ ceea ce ştim deja de la serii numerice.

Definiţia 18 *Seria de funcţii* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *spunem că converge uniform la funcţia* s *pe mulţimea* $\mathcal{C}$ *dacă şirul sumelor parţiale* $(s_n)_n$ *converge uniform pe* $\mathcal{C}$.

Exemplul 19 *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *este exact seria geometrică (cu* q *luat ca variabilă independentă, renotată cu* x*). Această serie se ştie că converge (punctual) în orice* $x \in (-1,1)$. *Într-adevăr, pentru orice* $x \in (-1,1) \Rightarrow x^n \to 0$, *când* $n \to \infty$ *şi*

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \to \frac{1}{1-x} \ , \ n \to \infty.$$

Deci

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\ ,\ \forall x \in (-1,1)\,.$$

În ceea ce priveşte uniforma convergenţă, aceasta are loc pe orice interval compact $[-a,a]$ *(cu* $a \in (0,1)$ *arbitrar).*

Are loc

$$|s_n(x) - s(x)| \le \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \le \frac{a^{n+1}}{1-x} \to \frac{0}{1-x} = 0.$$

Având în vedere Teoremele 11 şi 13 enunţăm:

Teorema 20 (de integrare a seriei termen cu termen) *Fie* $I = [a,b]$ *un interval închis şi* $(f_n)_n$ *un şir de funcţii integrabile pe* I *astfel încât seria* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniform la funcţia* s *pe* I*. Atunci* I *este integrabilă pe* I *şi*

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Teorema 21 (de derivare a seriei termen cu termen) *Fie* $I = [a,b]$ *un interval închis şi* $(f_n)_n$ *un şir de funcţii derivabile pe* I *cu derivatele continue pe* I*. Presupunem că există* $s,t : I \to \mathbb{R}$ *astfel încât:*

(i) $\quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = s(x)\,,\ \forall x \in I,$

(ii) $\quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = t(x)\,,\ \forall x \in I$*, şi convergenţa este uniformă pe* I*.*

Atunci s *este derivabilă pe* I *cu derivata continuă pe* I *şi* $s' = t$*.*

Remarca 22 *Teorema de mai sus afirmă că*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)'\ ,\ \forall x \in I.$$

Teorema 23 (testul lui Weierstrass) *Fie* $(f_n)_n$ *un şir de funcţii definite pe* A *şi* $(M_n)_n$ *un şir numeric astfel încât*

$$|f_n(x)| \le M_n\ ,\ \forall x \in A$$

şi seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ *converge. Atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniform pe mulţimea* A*.*
(fără demonstraţie)

Exemplul 24 *Fie seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(xn^4)}{n\sqrt{n}}\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

Avem că

$$\left|\frac{\sin(xn^4)}{n\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

iar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

care este convergentă (seria armonică generalizată scrisă pentru $\alpha = 3/2$*). Deci* $M_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ *iar seria dată* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(xn^4)}{n\sqrt{n}}$ *converge uniform pe* $\mathbb{R}$*.*

4 Serii de puteri

Seriile de puteri sunt un caz particular de serii de funcţii obţinut atunci când $f_n(x) = a_n x^n$.

Definiţia 25 *Fie $(a_n)_n$ un şir numeric. Numim serie de puteri, o serie de forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots a_n x^n + \cdots$$

Numerele a_n cu $n \in \mathbb{N}$, se vor numi coeficienţii seriei.

Exemplul 26 *Seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ nu este convergentă, pentru orice $x \neq 0$, deoarece (privită ca serie numerică) termenul general al seriei $n^n x^n$ nu tinde la zero (Exerciţiu !, x se va privi ca un parametru), când $n \to \infty$.*

Exemplul 27 *Seria*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

este convergentă, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Într-adevăr, privită ca serie numerică, aplicăm criteriul raportului al lui D'Alembert pentru seria modulelor (ca să fie serie cu termeni pozitivi) şi obţinem

$$\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1, \text{ când } n \to \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Evident, pentru $x = 0$ serie este convergentă.
Se va arăta ulterior că această serie de puteri are suma e^x adică

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplul 28 *Seria geometrică*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

este convergentă, pentru orice $x \in (-1, 1)$.
Într-adevăr, privită ca serie numerică, aplicăm criteriul raportului al lui D'Alembert pentru seria modulelor (ca să fie serie cu termeni pozitivi) şi obţinem

$$\frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x| \to |x|, \text{ când } n \to \infty.$$

Deci pentru orice $|x| < 1$ seria modulelor este convergentă.
Se arăta uşor că această serie de puteri are suma $\frac{1}{1-x}$ adică

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \forall x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

În exemplele de mai sus seria converge (absolut) pe un interval simetric (în raport cu originea). Vom arăta că mulţimea de convergenţă $\mathcal{C}$ a oricărei serii de puteri este ori $\mathbb{R}$ ori un interval mărginit (deschis, închis sau semi-deschis) centrat în 0.

Astfel se poate demonstra următorul rezultat foarte important:

Propoziţia 29 *Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge în punctul $x_1 \neq 0$, atunci converge absolut pe intervalul deschis $(-|x_1|, |x_1|)$. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nu converge în punctul $x_2 \neq 0$, atunci nu converge în nici un punct din mulţimea $(-\infty, |x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$ (vezi şi desenul în cazul $x_1, x_2 > 0$).*

Demonstraţie. Dacă seria converge în punctul $x_1 \neq 0$ atunci, conform definiţiei, seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ este convergentă deci termenul general al seriei $a_n x_1^n \to 0$ când $n \to \infty$. Deci şirul $(a_n x_1^n)_n$ este şir mărginit (fiind convergent). Să notăm cu $M > 0$ cantitatea pentru care

$$|a_n x_1^n| \leq M\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deci, pentru orice x astfel încât $|x| < |x_1| \Leftrightarrow x \in (-|x_1|, |x_1|)$, avem

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_1^n \left(\frac{x}{x_1} \right)^n \right| \leq M \left(\frac{|x|}{|x_1|} \right)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seria obţinută

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{|x|}{|x_1|} \right)^n$$

este o serie geometrică cu $q = \frac{|x|}{|x_1|} \in (0,1)$ (deoarece $|x| < |x_1|$) deci este o serie convergentă. Conform criteriului comparaţiei (de la serii numerice) deducem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă deci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă pentru orice $x \in (-|x_1|, |x_1|)$. ∎

Rezultatul principal este următorul:

Teorema 30 *Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Atunci există $R \in [0, +\infty]$ astfel încât:*
(i) seria este absolut convergentă în orice punct din intervalul deschis $(-R, R)$;
(ii) seria este divergentă în orice punct $x \in (-\infty, R) \cup (R, +\infty)$;
Pentru orice $r \in (0, R)$, seria este uniform convergentă în orice punct $x \in [-r, r]$.
*Termenul R se numeşte **raza de convergenţă a seriei de puteri** iar intervalul pe care este convergentă se numeşte **mulţimea de convergenţă**.*

Demonstraţie. Să notăm cu $\mathcal{C}$ mulţimea de convergenţă.

Dacă seria de puteri este convergentă doar în $x = 0$ atunci $R = 0$.

Să presupunem că există un punct $x_0 \neq 0$ în care seria este convergentă. Atunci conform Propoziţiei 29 seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă în orice punct $x \in (-|x_0|, |x_0|)$. Deci $\mathcal{C}$ conţine intervalul $(-|x_0|, |x_0|)$. Prin urmare, notând cu $R := \sup \mathcal{C}$, deducem că $R > 0$. Să presupunem că $R < +\infty$. Atunci se poate arăta imediat concluzia. Într-adevăr, dacă luăm x arbitrar fixat astfel încât $|x| < R \Leftrightarrow x \in (-R, R)$ atunci (având în vedere că R este un supremum) există $x_1 \in \mathcal{C}$ cu $x_1 \in (|x|, R)$ şi deci seria iniţială este absolut convergentă în x (deoarece $|x| < x_1$).

Imediat se poate dovedi şi divergenţa în punctul x astfel încât $|x| > R$.

De asemenea, pentru x fixat astfel încât $|x| < r$ cu r arbitrar în $(0, R)$ avem că

$$|a_n x^n| = |a_n|\ r^n\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dar seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\ r^n$ este convergentă (deoarece $r < R$) deci şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă adică seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă. ∎

Remarca 31 *Raza de convergenţă este definită de*

$$R := \sup \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}.$$

Remarca 32 *În punctele $x = \pm R$ convergenţa se va studia separat (pentru $x = \pm R$ seria devine una numerică).*
Deci mulţimea de convergenţă poate fi $(-R, R)$ sau $(-R, R]$ sau $[-R, R)$.

Exemplul 33 *Se vede acum că raza de convergenţă este $R = 0$ în cazul Exemplului 26, $R = +\infty$ în cazul Exemplului 27 şi $R = 1$ în cazul Exemplului 28.*

Teorema 34 *Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi R raza sa de convergenţă. Să presupunem că $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
(i) Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ atunci

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}\,;$$

(i) Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ atunci

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,.$$

Demonstraţie. (i) Fie x un punct oarecare. Aplicăm criteriul raportului seriei numerice $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|a_{n+1} x^{n+1}\right|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = \ell\ |x|\,.$$

Dacă $\ell = 0$ atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{|a_n x^n|} = 0 < 1$ deci conform criteriului raportului avem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă deci seria iniţială $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Deci $R = \frac{1}{0_+} = +\infty$.
Dacă $\ell = +\infty$ atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{|a_n x^n|} = +\infty > 1$ deci conform criteriului raportului avem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este divergentă $R = \frac{1}{+\infty} = 0$.
Fie acum $\ell \in (0, +\infty)$. Dacă $|x| < 1/\ell$ atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{|a_n x^n|} = \ell\,|x| < 1$ deci conform criteriului raportului avem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă deci seria iniţială $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă oricare ar fi $|x| < 1/\ell$. Dacă $|x| > 1/\ell$ atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{|a_n x^n|} = \ell\,|x| > 1$ deci conform criteriului raportului avem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este divergentă oricare ar fi $|x| > 1/\ell$. Prin urmare raza de convergenţă este exact $R = 1/\ell$.
(ii) Trebuie urmat acelaşi raţionament aplicând *criteriul rădăcinii* de la serii numerice. ■

Exemplul 35 *(vezi şi Exemplele 26-28) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are şirul $a_n = n^n$. Raza de convergenţă este dată de*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = 0$$

deci mulţimea de convergenţă este $(-0, 0)$, adică este formată dintr-un singur punct $x = 0$.

Exemplul 36 *Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are şirul $a_n = \frac{1}{n!}$. Raza de convergenţă este dată de*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{1}{n!}\right|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{0_+} = +\infty$$

deci mulţimea de convergenţă este $(-\infty, \infty)$, adică seria este convergentă în orice punct $x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 37 *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *are şirul* $a_n = 1$. *Raza de convergenţă este dată de*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

deci mulţimea de convergenţă este $(-1,1)$, *adică seria este convergentă în orice punct* $x \in (-1,1)$.

În capete trebuie studiat separat.

Pentru $x = -1$ *seria devine seria numerică* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ *care este divergentă deoarece termenul general* $(-1)^n$ *nu tinde la zero* ($\nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$).

Pentru $x = 1$ *seria devine seria numerică* $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ *care este divergentă deoarece termenul general* 1 *nu tinde la zero* ($\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$).

Deci mulţimea de convergenţă rămâne $(-1,1)$.

Exerciţiul 38 *Determinaţi raza de convergenţă a seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. *În punctele* $\pm R$ $(= \pm 1)$ *convergenţa trebuie studiată separat. Se va obţine* $\mathcal{C} = [-1,1]$.

Exerciţiul 39 *Determinaţi raza de convergenţă a seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. *În punctele* $\pm R$ $(= \pm 1)$ *convergenţa trebuie studiată separat. Se va obţine* $\mathcal{C} = [-1,1)$.

Exerciţiul 40 *Determinaţi raza de convergenţă a seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$. *În punctele* $\pm R$ $(= \pm 1)$ *convergenţa trebuie studiată separat. Se va obţine* $\mathcal{C} = (-1,1)$.

Exerciţiul 41 *Determinaţi raza de convergenţă a seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$. *Se va obţine* $\pm R$ $(= \pm e)$.

5 Operaţii cu serii de puteri

Teorema 42 *Fie două serii de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *cu razele de convergenţă* R_1 *respectiv* R_2. *Atunci seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ *are raza de convergenţă* $R = \min(R_1, R_2)$. *Are loc şi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

(fără demonstraţie)

Teorema 43 *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *cu raza de convergenţă* R *şi suma* $s(x)$. *Atunci*
(i) *seria derivatelor* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *are aceeaşi rază de convergenţă* R *şi are loc*

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n , \ \forall x \in (-R,R).$$

(ii) *seria integralelor* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *are aceeaşi rază de convergenţă* R *şi are loc*

$$\int_0^x s(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} , \ \forall x \in (-R,R).$$

(fără demonstraţie)

Exemplul 44 *Ştim că*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n , \ \forall x \in (-1,1).$$

Înlocuind x cu $-x$ obţinem şi seria

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\ ,\ \forall x\in(-1,1)\,.$$

Înlocuind x cu x^2 obţinem şi seria

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\ ,\ \forall x\in(-1,1)\,.$$

Derivând termen cu termen obţinem $\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'\ ,\ \forall x\in(-1,1)$*, deci*

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n\ ,\ \forall x\in(-1,1)$$

precum şi

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\ ,\ \forall x\in(-1,1)\,.$$

Integrând termen cu termen cea de a doua serie obţinem $\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^n dt\ ,\ \forall x\in(-1,1)$*, deci*

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\ ,\ \forall x\in(-1,1)\,.$$

Integrând termen cu termen cea de a treia serie obţinem $\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt\ ,\ \forall x\in(-1,1)$*, deci*

$$\operatorname{arctg}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\ ,\ \forall x\in(-1,1)\,.$$

6 Serii Taylor

Definiţia 45 *Se numeşte **serie Taylor** o serie de puteri de forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

unde $a\in\mathbb{R}$.

Remarca 46 *Seria de puteri de mai sus este convergentă în intervalul $(a-R,a+R)$ unde R este raza de convergenţă a seriei $\sum_{n=0}^{\infty}a_ny^n$.*

Definiţia 47 *Se numeşte **serie Taylor asociată funcţiei** f **în punctul** a, seria de puteri*

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

Definiţia 48 *Se numeşte **serie Mac-Laurin asociată funcţiei** f, seria Taylor în punctul $a=0$, adică*

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

Remarca 49 *Observăm că sumele parţiale ale acestei serii de puteri sunt exact polinoamele Taylor de grad* n*, ataşate funcţiei* f *în punctul* a*, adică*

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Reamintim fomula lui Taylor

Definiţia 50 (Formula lui Taylor) *Dacă* $f : I \to \mathbb{R}$ *este o funcţie de* $(n+1)$ *ori derivabilă pe* I *atunci pentru oricare două puncte* $x, a \in I$ *formula*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

se numeşte ***formula lui Taylor*** *de ordin* n *corespunzătoare funcţiei* f *în punctul* a*. Cantitatea* $R_n(x)$ *se numeşte* ***restul de ordin*** n *din formula Taylor şi are diverse forme de exprimare.*

Teorema 51 *Seria Taylor asociată funcţiei* f *în punctul* a *are drept sumă în punctul* $x \in \mathcal{C} \cap I$ *(mulţimea de convergenţă a seriei de puteri intersectată cu domeniul funcţiei) valoarea* $f(x)$ *dacă şi numai dacă resturile* $R_n(x)$ *formează un şir convergent la zero.*
(fără demonstraţie)

Remarca 52 *Deci* $R_n(x) \to 0,\ n \to \infty$ *dacă şi numai dacă*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Teorema 53 *Seria Mac-Laurin asociată funcţiei* f *are drept sumă în punctul* $x \in \mathcal{C} \cap I$ *(mulţimea de convergenţă a seriei de puteri intersectată cu domeniul funcţiei) valoarea* $f(x)$ *dacă şi numai dacă resturile* $R_n(x)$ *formează un şir convergent la zero.*

Adică $R_n(x) \to 0,\ n \to \infty$ *dacă şi numai dacă*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Exemplul 54 *Să se dezvolte în serie de puteri funcţia* $f(x) = (1+x)^\alpha$ *cu* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$*.*

Avem $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$*, deci prin inducţie*

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

deci $f(0) = 1$ *,* $f'(0) = \alpha$ *,* $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$ *adică*

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$$

Seria Taylor asociată funcţiei f *în punctul* $a = 0$ *este*

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

Pentru a calcula raza de convergenţă a acestei serii să notăm cu $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ *şi să calculăm*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}}{\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1$$

deci raza este $R = 1$ adică seria este convergentă pentru orice $x \in (-1, 1)$.

Observaţie: în capetele $x = -1$, $x = 1$ convergenţa trebuie studiată separat !

Pe de altă parte formula lui Taylor asociată acestei funcţii în punctul $a = 0$ este

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

Se poate arăta (!)** că $R_n(x) \to 0$, $n \to \infty$, deci deducem că seria de mai sus, asociată funcţiei $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, are suma dată de chiar $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, adică are loc următoarea dezvoltare importantă numită **dezvoltarea binomială

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \ \forall\ |x| < 1.$$

Exemplul 55 *Să se dezvolte în serie Taylor în jurul lui $a = 6$ funcţia $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$.*

Vom folosi dezvoltarea binomială

$$(1+y)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}y^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}y^n + \cdots, \ \forall\, y \text{ cu } |y| < 1$$

pentru $\alpha = 1/3$ deoarece avem $f(x) = \sqrt[3]{x+2} = (x+2)^{1/3}$. Se cere dezvoltarea în jurul lui $a = 6$, adică trebuie să apară termenii $(x-6)^n$. Pentru a putea aplica exact dezvoltarea de mai sus scriem

$$(x+2)^{1/3} = ((x-6)+6+2)^{1/3} = (8+(x-6))^{1/3} = 8^{1/3}\left(1+\frac{x-6}{8}\right)^{1/3}$$

deci are loc

$$\sqrt[3]{x+2} = 2\left(1+\frac{x-6}{8}\right)^{1/3}$$

Acum trebuie scrisă dezvoltarea binomială pentru $\alpha = 1/3$ şi de înlocuit $y = \dfrac{x-6}{8}$.