Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Cursul 11

Capitolul IV. Funcția generatoare de momente. Funcția caracteristică

IV.1 Funcția generatoare de momente

Definiţia IV.1.1 *Dacă X este o v.a. discretă astfel încât $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$, atunci media*

$$\boxed{G_X(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\big(t^X\big) = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}} t^k\, \mathbb{P}(X=k)\,,}$$

se numește **funcția generatoare de probabilități** *asociată acestei distribuții.*
Funcția $t \mapsto G_X(t)$ este definită doar pentru acei t pentru care media $\mathbb{E}\big(t^X\big)$ există și este finită.

Remarca IV.1.2 Justificarea denumirii este simplă: probabilitățile $\mathbb{P}(X=k)$, unde $k \in \mathbb{N}$, sunt date de derivatele funcției G_X, mai precis, $\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}\,, \quad k\in\mathbb{N}.}$ $\diamond$

Propoziţia IV.1.3 *Fie X, Y două v.a. discrete astfel încât $X(\Omega), Y(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ și cu G_X, G_Y funcțiile lor generatoare de probabilități. Dacă X, Y sunt independente, atunci*

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\cdot G_Y(t)\,.$$

Demonstraţie. Deoarece X, Y sunt v.a. independente putem scrie

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\big(t^{X+Y}\big) = \mathbb{E}\big(t^X\big)\cdot \mathbb{E}\big(t^Y\big) = G_X(t)\cdot G_Y(t)\,.$$

$\blacksquare$

Definiţia IV.1.4 *Dacă X este o v.a. (nu neapărat discretă), atunci media*

$$\boxed{M_X(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\big(e^{tX}\big)}$$

se numește **funcția generatoare de momente** *asociată acestei distribuții.*
Funcția $t \mapsto M_X(t)$ este definită doar pentru acei t pentru care media $\mathbb{E}\big(e^{tX}\big)$ există și este finită.

Remarca IV.1.5 Justificarea denumirii este dată de următorul rezultat. Dacă există $M_X^{(k)}(0)$, atunci există și momentul de ordin $k \in \mathbb{N}^*$ și acesta este dat de:

$$\boxed{\mathbb{E}\big(X^k\big) = M_X^{(k)}(0)\,, \quad k\in\mathbb{N}^*.}$$

Prin urmare, în caz că $M_X'(0)$ există, obținem $M_X'(0) = \mathbb{E}(X)$. Similar, în caz că $M_X''(0)$ există, obținem $M_X''(0) = \mathbb{E}\big(X^2\big)$. $\diamond$

Remarca IV.1.6 (i) Dacă X este v.a. discretă cu tabloul $X : \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix}_{k\in I\subseteq\mathbb{N}^*}$, atunci are loc formula de calcul

$$M_X(t) = \sum\nolimits_{k\in I} e^{t\,x_k}\,p_k\,.$$

(ii) Dacă X este v.a. continuă cu densitatea f_X , atunci are loc formula de calcul[1]

$$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{t\,x}\,f_X(x)\,dx.$$

$\diamond$

Exercițiul IV.1.7 *Fie v.a.* $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, *unde* $\lambda > 0$. *Obținem, pentru* $t \neq \lambda$,

$$M_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{t\,x}\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\,\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\bigg|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\lambda}{t-\lambda}\left(e^{(t-\lambda)(+\infty)} - 1\right)$$

și astfel obținem: $M_X(t) = +\infty$, *pentru orice* $t \geq \lambda$, *și* $M_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$, *pentru orice* $t < \lambda$.

Propoziția IV.1.8 *Fie* X, Y *două v.a. cu* M_X, M_Y *funcțiile lor generatoare de momente. Dacă* X, Y *sunt independente, atunci*

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)\cdot M_Y(t)\,.$$

Demonstrație. Deoarece X, Y sunt v.a. independente putem scrie

$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\big(e^{t(X+Y)}\big) = \mathbb{E}\big(e^{tX}\big)\cdot\mathbb{E}\big(e^{tY}\big) = M_X(t)\cdot M_Y(t)\,.$$

$\blacksquare$

Remarca IV.1.9 Atât funcția generatoare de probabilități cât și funcția generatoare de momente au proprietatea că sunt **unice pentru fiecare distribuție** în sensul: dacă două v.a. discrete au aceeași funcție generatoare de probabilități, atunci cele două v.a. sunt identic distribuite; similar, dacă două v.a. (discrete sau continue) au aceeași funcție generatoare de momente, atunci cele două v.a. sunt identic distribuite. $\diamond$

IV.1.1 Funcția caracteristică

Evident, v.a. e^{tX} poate să nu admită medie pentru orice $t \in \mathbb{R}$. În acest sens se poate utiliza o altă funcție, strâns legată de funcția generatoare de momente, mai precis, funcția $M_X(it) = \mathbb{E}\big(e^{itX}\big)$ care **este bine definită pentru orice** $t \in \mathbb{R}$.

Definiția IV.1.10 *Fie v.a.* $X : \Omega \to \mathbb{R}$. *Funcția* $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *definită de*

$$\boxed{\varphi_X(t) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathbb{E}\big(e^{itX}\big), \quad t \in \mathbb{R}.}$$

se numește **funcția caracteristică** *asociată v.a.* X.

Remarca IV.1.11 Având în vedere definiția exponențialei complexe

$$e^{a+ib} = e^a\left(\cos b + i\sin b\right), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

putem scrie $\varphi_X(t) = \mathbb{E}\cos(tX) + i\,\mathbb{E}\sin(tX)$, pentru $t \in \mathbb{R}$, prin urmare,

$$\left|\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)\right| \leq \mathbb{E}\left|e^{itX}\right| = \mathbb{E}(1) = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

deoarece $\left|e^{itX(\omega)}\right| = 1$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și $\omega \in \Omega$.

Deci v.a. e^{itX} este integrabilă, i.e. media $\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)$ există pentru orice $t \in \mathbb{R}$, adică funcția φ_X este bine definită pe $\mathbb{R}$. $\diamond$

[1] Dacă $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, atunci funcția $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $\tilde{f}(t) \overset{\text{def}}{=\!=} \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\,dx$ se numește **transformata Laplace** a funcției f.

Astfel, în cazul în care X ia valori nenegative, are loc următoarea legătură între funcția generatoare de momente și transformata Laplace a densității: $M_X(t) = \tilde{f}_X(-t)\,, \quad t \in \mathbb{R}$.

Remarca IV.1.12 (i) Dacă X este v.a. discretă cu $X : \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix}_{k \in I \subseteq \mathbb{N}^*}$, atunci are loc formula de calcul

$$\varphi_X(t) = \sum\nolimits_{k \in I} e^{itx_k} p_k \,.$$

(ii) Dacă X este v.a. continuă cu densitatea f_X, atunci are loc formula de calcul[2]

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\, dx.$$

◇

Propoziţia IV.1.13 *Fie X o v.a. și φ_X funcția ei caracteristică. Atunci*

$$\begin{aligned} &(i) \quad |\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \\ &(ii) \quad \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}\,, \quad t \in \mathbb{R}, \\ &(iii) \quad \varphi_X \text{ este funcție uniform continuă în orice } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demonstraţie. (i) Aplicând inegalitatea lui Jensen[3] deducem

$$|\varphi_X(t)| = \big|\mathbb{E}\big(e^{itX}\big)\big| \leq \mathbb{E}\big|e^{itX}\big| = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) $\varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}\left(e^{-itX}\right) = \mathbb{E}\cos(tX) - i\,\mathbb{E}\sin(tX) = \overline{\varphi_X(t)}\,.$ ■

Propoziţia IV.1.14 *Fie X, Y două v.a. cu φ_X, φ_Y funcțiile lor caracteristice. Dacă X, Y sunt independente, atunci*

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)\,, \quad \textit{pentru orice } t \in \mathbb{R}. \tag{IV.1.1}$$

Demonstraţie. Deoarece X, Y sunt v.a. independente putem scrie

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\big(e^{it(X+Y)}\big) = \mathbb{E}\big(e^{itX}\big) \cdot \mathbb{E}\big(e^{itY}\big) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)\,.$$

■

Remarca IV.1.15 Prin urmare, dacă v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ sunt independente, atunci

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t)\,, \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}. \tag{IV.1.2}$$

În particular, dacă v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ sunt de tip **i.i.d.**, atunci

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = [\varphi_{X_1}(t)]^n\,, \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}, \tag{IV.1.3}$$

deoarece, conform definiției funcției φ (vezi și formulele de calcul din Remarca IV.1.12), dacă două v.a. au aceeași distribuție, atunci coincid și funcțiile lor caracteristice. ◇

Remarca IV.1.16 Dacă v.a. X are funcția caracteristică φ_X, atunci v.a. $aX + b$ are funcția caracteristică

$$\varphi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}\big(e^{it(aX+b)}\big) = e^{itb}\,\mathbb{E}\big(e^{iatX}\big) = e^{itb}\,\varphi_X(at)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

◇

[2] Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, atunci funcția $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dată de $\hat{f}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\, dx$ se numește **transformata Fourier** a funcției f.

Astfel are loc următoarea legătură între funcția caracteristică și transformata Fourier a densității de repartiție: $\varphi_X(t) = \hat{f}_X(-t)\,,$ $t \in \mathbb{R}$.

[3] **Inegalitatea lui Jensen**: fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție convexă și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. astfel încât $|X|$ admite medie finită. Presupunem că $\mathbb{E}(g(X)) \leq +\infty$. Atunci

$$g(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(g(X))\,.$$

Următorul rezultat arată legătura dintre momentele v.a. X și derivatele funcției caracteristice.

Teorema IV.1.17 *Fie X o v.a. și să presupunem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\mathbb{E}|X|^n < +\infty$. Atunci funcția caracteristică este derivabilă de ordin $k = \overline{1,n}$, cu derivata de ordin k continuă, dată de*

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}\big((iX)^k e^{itX}\big), \quad \text{pentru } k = \overline{1,n}. \tag{IV.1.4}$$

În particular, momentele de ordin $k = \overline{1,n}$ sunt date de:

$$\boxed{\mu_k \overset{\text{not}}{=} \mathbb{E}(X^k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}.} \tag{IV.1.5}$$

Remarca IV.1.18 Obținem formula de calcul a momentelor de ordinul 1 și 2 folosind funcția caracteristică:

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\,\varphi_X'(0) \quad \text{și} \quad \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{i^2}\,\varphi_X''(0).}$$

◇

Demonstrație. Folosind inegalitatea lui Hölder[4] obținem că $\mathbb{E}|X|^n < +\infty$ asigură $\mathbb{E}|X|^k < +\infty$ pentru orice $k = \overline{1,n}$.

În cazul $k = 1$ obținem, aplicând teorema de derivare sub integrală,

$$\varphi_X'(t) = \big(\mathbb{E}(e^{itX})\big)' = \mathbb{E}\big(e^{itX}\big)' = \mathbb{E}\big(iX\,e^{itX}\big)$$

iar $\mathbb{E}\big(iX\,e^{itX}\big)$ există deoarece $\left|iX\,e^{itX}\right| = |X|$ care este v.a. integrabilă.

În cazul $k = 2$ de asemenea putem aplica teorema de derivare sub integrală:

$$\varphi_X''(t) = (\varphi_X'(t))' = \big(\mathbb{E}(iX\,e^{itX})\big)' = \mathbb{E}\big(iX\,e^{itX}\big)' = \mathbb{E}\big((iX)^2\,e^{itX}\big).$$

Pe de altă parte, $\mathbb{E}\big((iX)^2\,e^{itX}\big)$ există deoarece $\left|(iX)^2\,e^{itX}\right| = |X|^2$ care este v.a. integrabilă. ■

Se poate demonstra și reciproca teoremei precedente.

Teorema IV.1.19 *Dacă există $\varphi_X^{(k)}(0)$ pentru orice $k = \overline{1,n}$, atunci există momentele $\mathbb{E}(X^k)$ pentru orice $k = \overline{1,n}$, dacă n este par și orice $k = \overline{1,n-1}$, dacă n este impar, și acestea sunt date de (IV.1.5).*

Remarca IV.1.20 Evident, dacă două v.a. sunt identic distribuite, atunci au aceeași funcție caracteristică.

Se poate arăta că are loc și reciproca:

$$\boxed{\text{dacă două v.a. au aceeași funcție caracteristică, atunci sunt identic distribuite.}} \tag{IV.1.6}$$

Astfel am obținut că și funcția caracteristică este **unică pentru fiecare distribuție** (vezi și Remarca IV.1.9). ◇

Forma exactă a funcției de repartiție și a densității de repartiție a unei v.a. căreia îi cunoaștem funcția caracteristică este dată de teorema de inversare a transformatei Fourier.

Remarca IV.1.21 Concret, în unele probleme, se procedează astfel. Se dau două v.a. X, Y.

- Se știe tipul de distribuție al v.a. X și se calculează φ_X.
- Nu se știe tipul de distribuție al v.a. Y dar se poate calcula φ_Y (folosind, de exemplu, modul de definire al v.a. Y).
- Se observă că $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$.
- Atunci se poate trage concluzia că tipul de distribuție al v.a. Y este același cu tipul v.a. X, adică X și Y sunt identic distribuite.

◇

[4] **Inegalitatea lui Hölder** : fie $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$ astfel încât $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ și $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două v.a. astfel încât $|X|^\alpha$ și $|Y|^\beta$ admit medie finită. Atunci $\mathbb{E}(XY) < +\infty$ și are loc inegalitatea $\boxed{\mathbb{E}|XY| \le (\mathbb{E}|X|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (\mathbb{E}|Y|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.}$

În cazul particular $\alpha = \beta = 2$ se obține **inegalitatea Cauchy-Schwarz**: $\boxed{[\mathbb{E}|XY|]^2 \le \mathbb{E}|X|^2 \cdot \mathbb{E}|Y|^2.}$