Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Cursurile 12 – 13

Capitolul V. Șiruri de variabile aleatoare (LSNM, LTNM, TLC)

V.1 Tipuri de convergențe

Fie v.a. X și un șir $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. definite pe același spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Definiţia V.1.1 *Dacă $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a. definim, pentru $p \in (0, \infty)$,*

$$\|X\|_p \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{E}\,|X|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |X|^p \; d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definiţia V.1.2 *Pentru $p \in (0, \infty)$ definim*

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \overset{\text{def}}{=} \{X : \Omega \to \mathbb{R} : X \textit{ v.a. astfel încât } \|X\|_p < \infty\},$$

care este spațiu vectorial.

Remarca V.1.3 Să observăm că $\|\cdot\|_p$ devine o seminormă pe spațiul $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ doar dacă $p \in [1, \infty)$. În plus,

$$\|X\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Omega |X|^p \; d\mathbb{P} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 0, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}.$$

Pentru a deveni o normă trebuie să lucrăm pe spațiul

$$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \overset{\text{def}}{=} \left\{\bar{X} = X + \mathscr{N} : X \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})\right\},$$

unde $\mathscr{N} = \{X : \Omega \to \mathbb{R} : X \text{ v.a. astfel încât } X = 0, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}\}$.

Pentru $\bar{X} \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, definim $\|\bar{X}\|_p = \|X\|_p$ și $\int_\Omega \bar{X}\, d\mathbb{P} = \int_\Omega X\, d\mathbb{P}$, pentru orice $X \in \bar{X}$.

Evident, $\|\bar{X}\|_p$ și $\int_\Omega \bar{X}\, d\mathbb{P}$ nu depind de alegerea reprezentantului $X \in \bar{X}$ (deoarece lucrăm cu integrale Lebesgue).

Astfel $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ conține, de fapt, clase de echivalență de v.a. X (adică v.a. egale $\mathbb{P}-$a.s. cu X) astfel încât $\|X\|_p < \infty$. Vom identifica o v.a. cu clasa ei de echivalență. ◇

Remarca V.1.4 Dacă $p \in [1, \infty]$, atunci

$$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \quad \text{este spațiu vectorial, normat și complet,}$$

adică $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ este spațiu Banach. ◇

Definiţia V.1.5 *Fie $p \in [1, \infty)$ și $X \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Spunem că șirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$* **converge în** L^p *la X, și scriem*

$$X_n \xrightarrow{L^p} X, \quad \textit{pentru } n \to \infty,$$

dacă $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0$ *sau, echivalent,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|X_n - X|^p = 0.$$

Remarca V.1.6 Folosind inegalitatea lui Hölder se obține **inegalitatea lui Liapunov:**

$$(\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\mathbb{E}|X|^q)^{\frac{1}{q}}\ , \quad \text{pentru orice } 0 < p < q,$$

adică $\|X\|_p \le \|X\|_q$, pentru orice $0 < p < q$. ◇

Remarca V.1.7 Ca o consecință a inegalității lui Liapunov obținem și inegalitatea dintre momentele absolute:

$$\mathbb{E}|X| \le \left(\mathbb{E}|X|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \ldots \le \left(\mathbb{E}|X|^n\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Prin urmare,

- **dacă o v.a. admite moment absolut de ordin** 2, **i.e.** $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$, **atunci admite și medie** sau, echivalent,
- **dacă o v.a. nu admite medie, atunci nu admite nici moment absolut de ordin** 2.

Mai precis, se poate arăta că momentul $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ de ordin 2 al unei v.a. X există și este finit dacă și numai dacă media $\mathbb{E}(X)$ și dispersia $\mathrm{D}^2(X)$ există și sunt finite. ◇

Remarca V.1.8 În cazul particular în care $X_n \xrightarrow{L^2} X$, pentru $n \to \infty$, obținem convergența în medie pătratică. ◇

Definiţia V.1.9 *Spunem că șirul* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge aproape sigur** *la* X, *și scriem*

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X, \quad \textit{pentru } n \to \infty,$$

dacă

$$\mathbb{P}\left(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1,$$

adică mulțimea punctelor ω *pentru care nu are loc convergența punctuală* $X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)$ *este o mulțime neglijabilă.*

Remarca V.1.10 Există exemple în care $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt v.a., $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, pentru $n \to \infty$, dar totuși limita X nu este v.a. Pentru a evita această problemă, și deci a asigura că limita oricărui șir de v.a. este tot o v.a., trebuie impus ca spațiul pe care se lucrează să fie **spațiu de probabilitate complet**[1].

Orice spațiu de probabilitate se poate completa prin adaugarea la $\sigma-$algebra $\mathscr{F}$ a tuturor submulțimilor mulțimilor neglijabile și să impunem ca aceste submulțimi să fie tot neglijabile, mai precis, lucrând cu $\sigma-$algebra generată de $\mathscr{F} \cup \mathscr{N}$, unde $\mathscr{N}$ este mulțimea tuturor evenimentelor $\mathbb{P}-$neglijabile. Evident, măsura $\mathbb{P}$ poate fi extinsă ușor astfel încât să fie definită pe $\sigma-$algebra $\sigma(\mathscr{F} \cup \mathscr{N})$. ◇

Definiţia V.1.11 *Spunem că șirul* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge în probabilitate** *la* X, *și scriem*

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, \quad \textit{pentru } n \to \infty,$$

dacă, pentru orice $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0.$$

Propoziţia V.1.12 *Limita în probabilitate a unui șir de v.a.* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este unică* $\mathbb{P}-$*a.s., i.e.*

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \quad \Longrightarrow \quad X = Y, \quad \mathbb{P}-\textit{a.s.}. \tag{1}$$

Remarca V.1.13 Folosind definiția, se poate arăta că limita în L^p și limita aproape sigură a unui șir de v.a. sunt și ele unice $\mathbb{P}-$a.s., în sensul dat de (1). ◇

[1] Spunem că spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ este **spațiu de probabilitate complet** dacă orice submulțime a unui eveniment $\mathbb{P}-$nul este tot eveniment. Mai precis, dacă $N \in \mathscr{F}$ este un eveniment neglijabil, i.e. $\mathbb{P}(N) = 0$, atunci orice $M \subset N$ este, de asemenea, eveniment, i.e. $M \in \mathscr{F}$ (prin urmare, se obține și $\mathbb{P}(M) = 0$).

Au loc și următoarele proprietăți de stabilitate ale convergenței în probabilitate în raport cu diverse operații.

Propoziția V.1.14 *Dacă* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *și* $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, *pentru* $n \to \infty$, *atunci*

$$(i) \quad X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y, \quad \textit{pentru } n \to \infty;$$

$$(ii) \quad X_n \cdot Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \cdot Y, \quad \textit{pentru } n \to \infty.$$

Remarca V.1.15 Se poate arăta că proprietatea (i), de stabilitate în raport cu suma, este adevărată și în cazul convergenței în L^p precum și în cazul convergenței aproape sigure. ◇

Definiția V.1.16 *Fie* X *o v.a. definită pe spațiul de probabilitate* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *și un șir* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de v.a. astfel încât fiecare v.a.* X_n *este definită pe spațiul de probabilitate* $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$. *Spunem că șirul* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge în funcția de repartiție** *la* X, *și scriem*

$$X_n \xrightarrow{F} X, \ \textit{pentru } n \to \infty,$$

dacă

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ *în care* F_X *este continuă.*

Remarca V.1.17 Așa cum am văzut deja în Propoziția V.1.12 și în Remarca V.1.13, limita în L^p, limita aproape sigură precum și limita în probabilitate sunt unice $\mathbb{P}-$a.s.. Acest lucru nu mai este adevărat în cazul limitei în funcția de repartiție; în acest caz are loc doar unicitatea în lege a limitei, mai precis

$$X_n \xrightarrow{F} X, \quad X_n \xrightarrow{F} Y \quad \Longrightarrow \quad X \overset{\mathrm{d}}{=} Y.$$

◇

Remarca V.1.18 Convergența punctuală doar în punctele de continuitate pentru F_X este suficientă pentru a obține faptul că limita, în sensul funcției de repartiție, este unică în lege. ◇

Remarca V.1.19 În cazul convergenței în funcția de repartiție fiecare v.a. X_n poate fi definită (eventual, nu obligatoriu) pe un alt de spațiu de probabilitate $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Evident, funcțiile de repartiție vor fi definite pe același spațiu $F_X, F_{X_n} : \mathbb{R} \to [0, 1]$.

Menționăm că în cazul convergenței în probabilitate, a convergenței aproape sigure precum și a convergenței în L^p este esențial ca v.a. X și X_n să fie definite pe același spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. ◇

Remarca V.1.20 Convergența în funcția de repartiție se mai numește și **convergența în distribuție**, notată $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$, sau **convergența în lege**, notată $X_n \xrightarrow{\text{lege}} X$ sau $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, sau **convergența slabă**, notată $X_n \xrightarrow{\text{weak}} X$. ◇

Definiția V.1.21 *Fie v.a.* X_n *definite pe spațiul de probabilitate* $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$ *și v.a.* X *definită pe spațiul* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. *Spunem că șirul* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge în funcția caracteristică** *la* X, *și scriem*

$$X_n \xrightarrow{\varphi} X, \ \textit{pentru } n \to \infty,$$

dacă

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t), \quad \textit{pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

Remarca V.1.22 În cazul convergenței în funcția caracteristică (ca și în cazul convergenței în funcția de repartiție) fiecare v.a. X_n poate fi definită pe un alt de spațiu de probabilitate $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$. Evident, funcțiile caracteristice sunt definite pe același spațiu $\varphi_X, \varphi_{X_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. ◇

Următoarele rezultate stabilesc legăturile dintre diversele tipuri de convergențe.

Teorema V.1.23

$$(i) \qquad X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$

$$(ii) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad \textit{există } (n_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \textit{ astfel încât } X_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{a.s.}} X.$$

Teorema V.1.24 *Aplicând inegalitatea lui Markov, obținem*

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$

Teorema V.1.25 (Teorema Convergenței Dominate a lui Lebesgue)

$$\textit{În condiții suplimentare, } X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^p} X.$$

Mai precis, dacă $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$*, pentru* $n \to \infty$ *și dacă există v.a.* $Y \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *astfel încât* $|X_n| \leq Y$ *a.s., pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$*, atunci* $X_n \xrightarrow{L^p} X$*, pentru* $n \to \infty$*.*

Teorema V.1.26

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{F} X$$

(v.a. X, X_n *sunt definite pe același spațiu de probabilitate* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$*).*

Teorema V.1.27

$$X_n \xrightarrow{F} c \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c,$$

unde c este o v.a. constantă.

Remarca V.1.28 Fie v.a. X_n definite pe $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$ și v.a. X definită pe $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Aplicând teorema lui Lévy obținem

$$X_n \xrightarrow{F} X \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\varphi} X.$$

$\diamond$

V.2 Legea Numerelor Mari

În următoarele două secțiuni vom folosi următoarele notații.
Dacă $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de v.a., atunci

$$S_n \overset{\text{def}}{=\!=} \sum\nolimits_{k=1}^{n} X_k \quad \text{și} \quad \bar{X}_n \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{S_n}{n}, \quad \text{unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

Definiţia V.2.1 *Dacă un șir* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *de v.a. satisface*

$$\boxed{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \textit{pentru } n \to \infty} \tag{2}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\bar{X}_n - \mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \textit{pentru } n \to \infty}$$

atunci spunem că șirul dat satisface **legea slabă a numerelor mari (LSNM)**.

Corolarul V.2.2 *Fie* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *un șir de v.a. de pătrat integrabil astfel încât*

$$\boxed{\lim\nolimits_{n\to\infty} \mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = 0.} \tag{3}$$

Atunci șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *satisface* **LSNM**.

Remarca V.2.3 În cazul particular în care v.a. sunt de pătrat integrabil și independente două câte două astfel încât șirul $\left(\mathrm{D}^2\left(X_k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit, condiția (3) este satisfăcută. $\diamond$

Remarca V.2.4 În cazul particular în care v.a. sunt de pătrat integrabil și de tip **i.i.d.** (independența este două câte două), atunci condiția (3) este satisfăcută deoarece $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}^2\left(X_k\right)=\frac{1}{n}\mathrm{D}^2\left(X_1\right).$

Astfel, dacă $\mathbb{E}\left(X_k\right)=\mu<+\infty$ și $\mathrm{D}^2\left(X_k\right)=\sigma^2<+\infty$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$, atunci șirul $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface ***LSNM***, mai precis, se obține

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}\mu,\quad \text{pentru } n\to\infty. \tag{4}$$

$\diamond$

Remarca V.2.5 Să observăm că (4) poate fi obținută și direct, folosind inegalitatea lui Cebâșev.

Avem $\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right)=\dfrac{\mathbb{E}\left(S_n\right)}{n}=\mu$ și dispersia

$$\mathrm{D}^2\left(\bar{X}_n\right)=\mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}^2\left(X_k\right)}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}\,.$$

Utilizând inegalitatea lui Cebâșev obținem

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n-\mu\right|<\epsilon\right)\geq 1-\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}\,,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n-\mu\right|<\epsilon\right)=1,$$

adică $\left(\bar{X}_n-\mu\right)\xrightarrow{\mathbb{P}}0$, pentru $n\to\infty$. $\diamond$

Exemplul V.2.6 Fie $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip **i.i.d.**, cu

$$X_k\sim\text{Bernoulli}\,(p)=\mathscr{B}\left(1,p\right),\quad k\in\mathbb{N}^*.$$

Putem vedea X_k ca v.a. care desemnează numărul de apariții ale unui eveniment A (numit ***Succes***) la încercarea k, cu probabilitatea p de apariție a ***Succesului***:

$$X_k:\begin{pmatrix}0 & 1\\ q & p\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{N}^*.$$

V.a.

$f_n\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{n}X_k$ se numește **frecvența absolută de apariție a *Succesului***

în cele n probe și are drept valori numărul de apariții ale *Succesului* în cele n observații.

Prin urmare f_n urmează o distribuție de tip binomial cu $f_n\sim\mathscr{B}\left(n,p\right).$

V.a.

$\dfrac{f_n}{n}$ se numește **frecvența relativă de apariție a *Succesului***.

Avem

$$\mathbb{E}\left(X_k\right)=p\quad\text{și}\quad \mathrm{D}^2\left(X_k\right)=pq\leq\frac{1}{4}\,,\quad\text{pentru orice } k\in\mathbb{N}^*.$$

Conform Remarcii V.2.3 obținem

$$\frac{f_n}{n}-\frac{\sum_{k=1}^{n}p}{n}=\frac{f_n}{n}-p\xrightarrow{\mathbb{P}}0,\quad\text{pentru } n\to\infty$$

sau, echivalent,

$$\frac{f_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}p,\quad\text{pentru } n\to\infty, \tag{5}$$

adică **șirul fecvențelor relative de apariție a *Succesului* converge în probabilitate la p (care este probabilitatea, teoretică, de apariție a *Succesului* la o singură încercare)**.

Cu alte cuvinte, dacă f_n este frecvența absolută de apariție a unui eveniment A în n probe independente și p este probabilitatea de apariție a lui A (indiferent de probă), atunci frecvența relativă $\frac{f_n}{n}$ de apariție a evenimentului A în cele n probe tinde în probabilitate la p, i.e. limita (5):

$$\frac{f_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} p, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

◇

În toate rezultatele de mai sus s-a cerut ca v.a. să fie de pătrat integrabil. Se poate arăta că șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LSNM** presupunând doar integrabilitatea v.a.. Demonstrația se face prin trunchierea v.a., luând, mai întâi, $\tilde{X}_k = X_k\, \mathbb{1}_{\{|X_k|\le k\}}$.

Teorema V.2.7 *Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. integrabile și de tip **i.i.d.** (independența este două câte două) astfel încât*

$$\mathbb{E}(X_k) = \mu < +\infty, \quad \textit{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

*Atunci șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LSNM**, mai precis, se obține*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu, \quad \textit{pentru } n \to \infty.$$

Ne interesează în continuare ca condițiile ca limita (2) să aibă loc aproape sigur.

Definiţia V.2.8 *Dacă un șir $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. satisface*

$$\boxed{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \textit{pentru } n \to \infty}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\bar{X}_n - \mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \textit{pentru } n \to \infty}$$

atunci spunem că șirul dat satisface **legea tare a numerelor mari (LTNM)**.

Teorema V.2.9 *Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip **i.i.d.** (independența este două câte două) astfel încât*

$$\mathbb{E}(X_k) = \mu \quad \textit{există (finită sau infinită)}, \quad \textit{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

*Atunci șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LTNM**, mai precis, se obține*

$$\boxed{\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu, \quad \textit{pentru } n \to \infty.}$$

Propoziţia V.2.10 *Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente în ansamblu și de pătrat integrabil astfel încât*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{D}^2(X_k)}{k^2} < +\infty.}$$

*Atunci șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LTNM**.*

Remarca V.2.11 În cazul particular în care $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de v.a. independente în ansamblu și de pătrat integrabil astfel încât șirul $\left(\mathrm{D}^2(X_k)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LTNM.** ◇

Remarca V.2.12 Aplicând Remarca V.2.11 obținem, utilizând notațiile și cadrul de lucru din Exemplul V.2.6,

$$\boxed{\frac{f_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} p, \quad \text{pentru } n \to \infty,} \tag{6}$$

adică **șirul fecvențelor relative de apariție a *Succesului* converge aproape sigur la p (care este probabilitatea, teoretică, de apariție a *Succesului* la o singură încercare)**.

Cu alte cuvinte, dacă f_n este frecvența absolută de apariție a unui eveniment A în n probe independente și p este probabilitatea de apariție a lui A (indiferent de probă), atunci frecvența relativă $\frac{f_n}{n}$ de apariție a evenimentului A în cele n probe tinde aproape sigur la p, i.e. limita (6). ◇

V.3 Teorema Limită Centrală

Fie șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip **i.i.d.** (independența este în ansamblu) astfel încât au dispersie finită și să notăm

$$\mathbb{E}(X_k) = \mu \quad \text{și} \quad D^2(X_k) = \sigma^2, \quad \text{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

Studiem în continuare problema convergenței în repartiție a șirului sumelor $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ standardizate, i.e. a șirului de v.a. date de $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{D^2(S_n)}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Să observăm că

$$\boxed{\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{D^2(S_n)}} = \frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)}{\sqrt{D^2(\bar{X}_n)}},}$$

deoarece

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = n\,\mu, \quad \mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu, \quad D^2(S_n) = n\,\sigma^2, \quad D^2(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sigma^2.} \tag{7}$$

Deci v.a. $\frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ este standardizarea v.a. S_n iar v.a. $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ este standardizarea v.a. $\bar{X}_n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Teorema V.3.1 (Teorema Limită Centrală) *Fie șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip **i.i.d.** (independența este în ansamblu) astfel încât*

$$\mathbb{E}(X_k) = \mu < +\infty \quad \text{și} \quad D^2(X_k) = \sigma^2 < +\infty, \quad \text{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci are loc convergența

$$\boxed{\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{D^2(S_n)}} \xrightarrow{F} Z \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \text{pentru } n \to \infty.} \tag{8}$$

Prin urmare, șirul de v.a. standardizate $\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{D^2(S_n)}}\right)_n$ are drept limită (în sensul funcției de repartiție) o v.a. normală standard.

Remarca V.3.2 Folosind (7) deducem că relația (8) poate fi scrisă și sub forma

$$\boxed{\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{D^2(S_n)}} = \frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{F} Z \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \text{pentru } n \to \infty} \tag{9}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)}{\sqrt{D^2(\bar{X}_n)}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{F} Z \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \text{pentru } n \to \infty,} \tag{10}$$

adică

$$\lim_{n\to\infty} F_{\frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}(z) = \lim_{n\to\infty} F_{\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(z) = F_Z(z) \overset{\text{not}}{=} \Phi(z), \quad \text{pentru orice } z \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

unde Φ este funcția de repartiție asociată v.a. $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, i.e.

$$\Phi(z) \overset{\text{not}}{=} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,, \quad z \in \mathbb{R},$$

pentru care există tabele cu valori ale ei.

Să reamintim faptul că funcția de repartiție $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)\,dt$ reprezintă și aria domeniului plan cuprins între $x = z$, axa Ox și curba $y = f_Z(x)$. ◇

Remarca V.3.3 Prin urmare, pentru n suficient de mare,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le z\right) = F_{\frac{S_n-n\,\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}(z) \simeq \Phi(z)\,, \quad z \in \mathbb{R} \tag{12}$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z\right) = F_{\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(z) \simeq \Phi(z)\,, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Deci, pentru orice $-\infty \le a < b \le +\infty$,

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le b\right) = F_{\frac{S_n-n\,\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}(b) - F_{\frac{S_n-n\,\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}(a)$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le b\right) = F_{\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(b) - F_{\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(a)$$

și astfel, folosind (12) și (13), obținem că, pentru n suficient de mare,

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le b\right) = \mathbb{P}\left(a < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le b\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a)\,, \quad \text{pentru orice } -\infty \le a < b \le +\infty. \tag{14}$$

Astfel am obținut următoarele estimări pentru ca S_n, sau respectiv $\bar{X}_n$, să fie între anumite limite:

$$\mathbb{P}\left(a\sqrt{n\sigma^2} + n\mu < S_n \le b\sqrt{n\sigma^2} + n\mu\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a)$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}\left(a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu < \bar{X}_n \le b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a)\,.$$

◇

Remarca V.3.4 Dacă X este **o caracteristică cercetată** și $X_1, \ldots, X_n$ este **o selecție de volum** n, atunci, prin definiție, v.a. X_k, $k = \overline{1,n}$, sunt de tip **i.i.d.**, urmând distribuția v.a. X, deci obținem că $\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(X) = \mu$ iar $D^2(X_k) = D^2(X) = \sigma^2$, pentru $k = \overline{1,n}$.

Atunci, pentru n suficient de mare ($n > 30$), media de selecție

$$\bar{X}_n \overset{\text{def}}{=} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

urmează o distribuție normală de tip $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, oricare ar fi legea de repartiție a lui X.

Într-adevăr, aplicând Teorema Limită Centrală,

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{F} Z \sim \mathcal{N}(0,1)\,, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Astfel obținem

$$\bar{X}_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_n + \mu \xrightarrow{F} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z + \mu \sim \mathcal{N}\Big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\Big).$$

◇

Aplicând Teorema Limită Centrală obținem că distribuția normală este cazul limită al multor distribuții. Deci pentru valori mari ale lui n putem folosi doar tabele distribuției normale.

În cazul particular al șirului $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip **i.i.d.** (independența este în ansamblu), urmând o distribuție Bernoulli, $X_k \sim \mathscr{B}(1,p)$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, se obține $S_n \sim \mathscr{B}(n,p)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. În acest caz S_n are semnificația de **frecvența absolută de apariție a *Succesului* la** n **încercări** iar $\bar{X}_n$ are semnificația de **frecvența relativă de apariție a *Succesului* la** n **încercări**.

Conform formulelor de calcul pentru media și dispersia unei v.a. distribuite binomial, avem

$$\mathbb{E}(S_n) = np \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(S_n) = npq.$$

Obținem astfel următorul rezultat.

Teorema V.3.5 (Teorema lui Moivre-Laplace) *Fie șirul* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *de v.a. de tip* ***i.i.d.*** *(independența este în ansamblu) și distribuite Bernoulli* $X_k \sim \mathscr{B}(1,p)$.

Atunci are loc convergența

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{F} Z \sim \mathcal{N}(0,1) \ , \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Remarca V.3.6 Avem faptul că, pentru n suficient de mare, $F_{\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}(z)$ este aproximativ egal cu $\Phi(z) \overset{\text{def}}{=\!=} F_Z(z)$, prin urmare (vezi și (14)), folosind

$$\mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = F_{\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}(b) - F_{\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}(a)\,,$$

obținem că pentru orice $-\infty \le a < b \le +\infty$ și, pentru n suficient de mare,

$$\mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \mathbb{P}\left(a < \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}} \le b\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a)\ . \tag{15}$$

Deci am obținut următoarele estimări pentru ca frecvența absolută S_n sau respectiv frecvența relativă $\bar{X}_n$, să fie între anumite limite:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a\sqrt{npq} + np < S_n \le b\sqrt{npq} + np) &= \mathbb{P}\left(a\,\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} + p < \bar{X}_n \le b\,\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} + p\right) \\ &\simeq \Phi(b) - \Phi(a)\ .\end{aligned}$$

◇