Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Cursurile 1 – 3

Capitolul I. Spații de probabilitate

I.1 Evenimente și operații cu evenimente

Printr-o **experiență aleatoare** $\mathscr{E}$ înțelegem acea experiență în care intervine întâmplarea. Rezultatele posibile ale unei experiențe aleatoare $\mathscr{E}$ se numesc probe sau cazuri posibile ale experienței și le vom nota cu ω.

Numim **eveniment aleator** (atașat unei experiențe) sau, mai simplu, **eveniment** orice situație care se poate realiza prin una sau mai multe probe și despre care putem spune cu certitudine că s-a produs sau nu.

Evenimentul elementar este un eveniment care se realizează printr-o singura probă a experienței. Evenimentul compus este acel eveniment care se realizează prin mai multe probe. Evenimentul sigur este acel eveniment care se realizează cu certitudine la fiecare efectuare a experienței, adică prin oricare dintre probe. Evenimentul imposibil este evenimentul care nu se realizează prin nici o probă a experienței. **Evenimentul complementar** (sau **contrar**) unui eveniment dat este evenimentul care se realizează atunci și numai atunci când nu se realizează evenimentul dat.

Definiţia I.1.1 *Vom nota cu Ω* **mulțimea tuturor rezultatelor posibile** *în cadrul unei experienței $\mathscr{E}$. Un element generic al lui Ω se va nota cu ω; astfel $\{\omega\}$ reprezintă un* **eveniment elementar** *asociat experienței $\mathscr{E}$.*

Un **eveniment** *va fi o colecție de elemente din Ω, prin urmare, un eveniment este un element al mulțimii*[1] *$\mathscr{P}(\Omega)$ a părților lui Ω .*

Mulțimea tuturor *evenimentelor* asociate experienței $\mathscr{E}$ se notează cu *$\mathscr{F}$, prin urmare $\mathscr{F}$ va fi o submulțime a mulțimii părților $\mathscr{P}(\Omega)$ (dar $\mathscr{F}$ nu coincide neapărat cu întreaga mulțime a părților).*

Mulțimea Ω se numește și **evenimentul sigur**, $\varnothing$ este **evenimentul imposibil**, iar **evenimentul complementar** (sau **contrar**) lui A se va nota cu $\bar{A}$. Avem, evident,

$$\bar{\Omega}=\varnothing, \quad \varnothing=\Omega, \quad \overline{\overline{A}}=A.$$

Exemplul I.1.2 Fie $\mathscr{E}$ experiența aruncării simultane a două zaruri. Probele experienței sunt perechile

$$\begin{aligned}&(1,1),\ldots,(1,6),\\&(2,1),\ldots,(2,6),\\&\vdots\\&(6,1),\ldots,(6,6).\end{aligned}$$

Proba (i,j) reprezintă apariția feței cu numărul i de puncte de la primul zar și a feței cu numărul j de puncte de la al doilea zar. Numărul tuturor probelor (al cazurilor posibile) este de $6\cdot 6=36$.

Fie A evenimentul ca suma numărului de puncte de pe cele două fețe să fie 5. Atunci A se realizează prin probele $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$. Acesta este un eveniment compus.

Fie B evenimentul ca suma numărului de puncte de pe cele două fețe să fie 13. Acesta este un eveniment imposibil.

Fie C evenimentul care constă în apariția probei $(6,6)$. Acesta este un eveniment elementar.

[1] **Mulțimea părților** $\mathscr{P}(\Omega)$ este dată de $\mathscr{P}(\Omega)\overset{\text{def}}{=}\{A : A\subseteq\Omega\}$.

Fie D evenimentul care constă în apariția unei perechi (i, j), cu $i, j = \overline{1, 6}$. Acesta este un eveniment sigur.

Evenimentul complementar $\bar{C}$ este evenimentul ce constă în apariția perechilor (i, j), cu $i, j = \overline{1, 6}$ și $i + j < 12$. ◇

Date două evenimente A și B numim reuniunea lor (notată $A \cup B$) evenimentul care se realizează atunci când se realizează cel puțin unul dintre evenimentele A și B.

Se numește intersecția evenimentelor A și B (notată $A \cap B$) evenimentul care se realizează atunci când se realizează simultan evenimentele A și B.

Vom numi diferența a două evenimente (notată $A \setminus B$) evenimentul dat de $A \setminus B \overset{\text{def}}{=} A \cap \bar{B}$.

Evenimentele A și B se numesc **compatibile** dacă se pot realiza simultan, adică dacă există probe care duc simultan atât la realizarea lui A cât și a lui B. În caz contrar evenimentele se numesc **incompatibile** sau **disjuncte** (i.e. ele nu se pot realiza simultan). Deci evenimentele A și B se numesc incompatibile sau disjuncte dacă $A \cap B = \varnothing$.

Proprietățile operațiilor cu evenimente sunt, evident, proprietățile operațiilor cu mulțimi. Amintim doar **legile lui De Morgan**

Propoziția I.1.3 *Pentru orice $A, B \in \mathscr{F}$,*

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \text{și} \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Exemplul I.1.4 Fie evenimentele A, B, C. Să se exprime următoarele evenimente utilizând evenimentele A, B, C și operații între ele:

(a) Doar A are loc: $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;

(b) Nici un eveniment nu are loc: $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;

(c) Exact un singur eveniment are loc: $\left(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}\right) \cup \left(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}\right) \cup \left(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C\right)$;

(d) Doar două evenimente au loc: $\left(A \cap B \cap \bar{C}\right) \cup \left(A \cap \bar{B} \cap C\right) \cup \left(\bar{A} \cap B \cap C\right)$;

(e) Cel puțin două evenimente au loc: $\left[\left(A \cap B \cap \bar{C}\right) \cup \left(A \cap \bar{B} \cap C\right) \cup \left(\bar{A} \cap B \cap C\right)\right] \cup (A \cap B \cap C)$;

(f) Cel mult un eveniment are loc: $\left(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}\right) \cup \left[\left(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}\right) \cup \left(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}\right) \cup \left(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C\right)\right]$

(g) Cel puțin un eveniment are loc: $A \cup B \cup C = \overline{\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}}$. ◇

I.2 Spațiu finit de probabilitate

Este natural ca primele probleme aplicative să fie legate de experiențe care au un număr finit de cazuri posibile; de asemenea, este natural să presupunem că toate cazurile posibile au aceeași șansă de apariție.

Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ mulțimea tuturor evenimentelor elementare corespunzătoare unei experiențe aleatoare $\mathscr{E}$.

Definiția I.2.1 *Spunem că perechea $(\Omega, \mathscr{F})$ este un* **spațiu finit de evenimente** *(sau* **câmp finit de evenimente***) dacă $\mathscr{F}$ este o familie nevidă de părți ale lui Ω, i.e. $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, și sunt satisfăcute condițiile:*

$$\begin{aligned} (i) &\quad \Omega \in \mathscr{F}, \\ (ii) &\quad \textit{Dacă } A \in \mathscr{F}, \quad \textit{atunci } \bar{A} \in \mathscr{F}, \\ (iii) &\quad \textit{Dacă } A, B \in \mathscr{F}, \quad \textit{atunci } A \cup B \in \mathscr{F}. \end{aligned}$$

Elemente lui $\mathscr{F}$ se numesc evenimente aleatoare sau **evenimente** *(deci $\mathscr{F}$ este mulțimea tuturor evenimentelor asociate experienței aleatoare).*

Remarca I.2.2 În multe situații (probleme elementare etc.) vom lua drept mulțimea $\mathscr{F}$ a evenimentelor chiar mulțimea $\mathscr{P}(\Omega)$ a tuturor părților lui Ω.

Evident, dacă $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, atunci $(\Omega, \mathscr{F})$ devine un spațiu finit de evenimente. ◇

Remarca I.2.3 Având în vedere definiția precedentă, deducem că mulțimea evenimentelor $\mathscr{F}$ este închisă la operații de reuniune, intersecție, complementaritate și diferență, adică $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $A \setminus B \in \mathscr{F}$, pentru orice $A, B \in \mathscr{F}$. Acest lucru este normal, având în vederă că noi vom lucra cu evenimente (adică elemente din $\mathscr{F}$) și vom dori ca operând cu aceste evenimente să rămânem în continuare în mulțimea de evenimente $\mathscr{F}$. $\diamond$

Exemplul I.2.4 Dacă n este numărul de evenimente elementare, atunci familia $\mathscr{P}(\Omega)$ conține 2^n evenimente.

Într-adevăr, dacă $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, atunci $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ este mulțimea formată cu toate submulțimile care se pot forma cu maxim n elemente (considerăm și mulțimea vidă) și este dată de

$$\begin{aligned}
&\varnothing,\\
&\{\omega_i\}, \quad 1 \le i \le n: \quad \text{în număr de } C_n^1,\\
&\{\omega_i, \omega_j\}, \quad 1 \le i < j \le n: \quad \text{în număr de } C_n^2,\\
&\{\omega_i, \omega_j, \omega_k\}, \quad 1 \le i < j < k \le n: \quad \text{în număr de } C_n^3,\\
&\vdots\\
&\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\} = \Omega: \quad \text{în număr de } C_n^n.
\end{aligned}$$

Deci numărul total de submulțimi ce se pot forma cu maxim n elemente este dat de[2] $1 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$. $\diamond$

Propoziţia I.2.5 *Au loc următoarele proprietăți.*

(j) Evident, $\varnothing = \bar{\Omega} \in \mathscr{F}$.

(jj) Dacă $A_i \in \mathscr{F}$, *pentru* $i = \overline{1,r}$, *atunci*

$$\bigcup_{i=1}^r A_i \in \mathscr{F} \quad \text{și} \quad \bigcap_{i=1}^r A_i \in \mathscr{F}.$$

Definiţia I.2.6 *Fie* $A_i \in \mathscr{F}$, *pentru* $i = \overline{1,r}$. *Spunem că* $(A_i)_{i=\overline{1,r}}$ *este un* **sistem complet de evenimente** *(sau o* **partiție** *sau o* **descompunere** *a lui* Ω*) dacă:*

$$\begin{aligned}
(i)&\quad A_i \neq \varnothing, \quad i = \overline{1,r},\\
(ii)&\quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i,j = \overline{1,r},\ i \neq j,\\
(iii)&\quad \bigcup_{i=1}^r A_i = \Omega.
\end{aligned}$$

Exemplul I.2.7 (i) Dacă $A \in \mathscr{F}$, atunci $\{A, \bar{A}\}$ este o descompunere a lui Ω în două evenimente disjuncte.

(ii) Dacă $A, B \in \mathscr{F}$ astfel încât $A \cap B = \varnothing$, atunci $\{A, B, \overline{A \cup B}\}$ este o descompunere a lui Ω în trei evenimente disjuncte.

$\diamond$

Definiţia I.2.8 *Fie* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ *mulțimea tuturor evenimentelor elementare și* $(\Omega, \mathscr{F})$ *un spațiu finit de evenimente. Fie* $A \in \mathscr{F}$ *un eveniment. Numărul* $\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n}$, *unde* m *reprezintă numărul probelor care duc la realizarea evenimentului* A *și* n *reprezintă numărul tuturor probelor posibile asociate experienței, se numește* **probabilitatea** *evenimentului* A, *i.e.*[3]

$$\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R} \qquad \text{și} \qquad \mathbb{P}(A) \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}, \quad \text{pentru orice } A \in \mathscr{F}. \tag{I.2.1}$$

Tripletul $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *se va numi* **spațiu finit de probabilitate** *(sau* **câmp finit de probabilitate***).*

[2] Se poate da o demonstrație a acestei identități folosind exclusiv analiza combinatorie (vezi Seminarul).

[3] Cardinalul unei mulțimi A se va nota cu $\operatorname{card}(A)$ sau cu $|A|$.

Propoziţia I.2.9 *Au loc următoarele proprietăți*[4]*, pentru orice* $A, B \in \mathscr{F}$ *și* $A_i \in \mathscr{F}$*, pentru* $i = \overline{1,n}$.

$$\begin{aligned}
&(i) \quad 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1,\\
&(ii) \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\varnothing) = 0,\\
&(iii) \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \quad \textit{dacă } A \cap B = \varnothing,\\
&(iv) \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),\\
&(v) \quad \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A),\\
&(vi) \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i), \quad \textit{unde } A_i \cap A_j = \varnothing, \quad 1 \leq i < j \leq n.
\end{aligned}$$

Demonstraţie. De exemplu, (iv) este o consecință[5] a lui (iii) iar (v) este o consecință directă a lui (ii) și (iii). ■

Remarca I.2.10 Din definiția spațiului finit de probabilitate observăm că nu trebuie să avem neapărat ca orice eveniment elementar să fie din $\mathscr{F}$, adică nu trebuie să avem neapărat că $\{\omega\} \in \mathscr{F}$, pentru orice $\omega \in \Omega$.

De exemplu, să presupunem că într-o urnă avem trei bile: una albă și două negre identice. Se extrage o bilă din urnă și ne interesează culoarea ei. Deci $\Omega = \{A1, N1, N2\}$ iar mulțimea tuturor evenimentelor asociate experienței este dată de $\mathscr{F} = \{\varnothing, \Omega, \{A1\}, \{N1, N2\}\} \subsetneq \mathscr{P}(\Omega)$.

Evident, $(\Omega, \mathscr{F})$ este un spațiu finit de evenimente dar evenimentele elementare $\{N1\}, \{N2\} \notin \mathscr{F}$. ◇

Definiţia I.2.11 *Fie* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ *mulțimea tuturor evenimentelor elementare,* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *un spațiu finit de evenimente și* $\mathbb{P}$ *dată de (I.2.1).*

Să presupunem că toate evenimentele elementare sunt **echiprobabile***, i.e. evenimentele elementare au aceași șansă de a se realiza, adică*

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)}, \quad \textit{pentru orice } \omega \in \Omega.$$

Atunci $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *este un spațiu finit de probabilitate și este numit* **spaţiu de probabilitate Laplace** *(sau* **câmp de probabilitate Laplace***).*

Să considerăm acum experimentul aruncării a două zaruri.

Exemplul I.2.12 Vom lua drept spațiul Ω mulțimea tuturor perechilor ordonate (i, j) cu $i, j = \overline{1,6}$, adică

$$\Omega = \left\{(i, j) : i, j = \overline{1,6}\right\}.$$

Având în vedere că sunt șase posibilități de alegere a lui i și fiecărei alegeri a lui i îi corespund șase alegeri pentru j, deducem că sunt 36 de posibile rezultate (despre care vom presupune că sunt echiprobabile, deci $\mathbb{P}(\{(i, j)\}) = 1/36$, pentru $i, j = \overline{1,6}$).

Care este probabilitatea să se obțină suma șapte la aruncarea celor două zaruri? sau suma unsprezece?

Primul eveniment, notat cu A, este mulțimea

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

iar al doilea este $B = \{(5,6), (6,5)\}$. Deci $\mathbb{P}(A)$ este probabilitatea reuniunii celor șase evenimente elementare posibile care compun A adică este suma $\mathbb{P}((1,6)) + \mathbb{P}((2,5)) + \ldots = 6 \cdot 1/36 = 1/6$.

De asemenea, $\mathbb{P}(B) = 1/36 + 1/36 = 1/18$.

Evident, probabilitatea obținerii a unei duble de unu sau de șase este $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\{(1,1)\} \cup \{(6,6)\}) = 1/18$ iar $\mathbb{P}(\bar{C}) = 1 - 1/18 = 17/18$. ◇

[4] Vezi și Propoziția I.3.14.

[5] Pentru demonstrație vezi pagina 12.

I.3 Spații de probabilitate

Fie Ω o mulțime abstractă (numită și mulțimea **evenimentelor elementare**). Un eveniment aleator (sau eveniment) va fi o submulțime a lui Ω, deci vom lua ca mulțime a evenimentelor o anumită familie de submulțimi a lui Ω, notată cu $\mathscr{F}$. În *Teoria probabilităților* măsurăm șansele de apariție a evenimentelor; deci trebuie să definim acele mulțimi (sau evenimente) care pot fi măsurate. În acest sens folosim conceptul de $\sigma-$algebră peste Ω pentru a obține o colecție de submulțimi ale lui Ω pe care să definim măsura de probabilitate.

Prin urmare, vom cere ca familia $\mathscr{F}$ să fie o $\sigma-$algebră peste Ω. Proprietățile cerute sunt cele văzute deja în cazul spațiului finit de probabilitate.

Definiţia I.3.1 *Fie Ω o mulțime nevidă. Familia nevidă $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, de părți ale lui Ω, se numește* **algebră** *peste Ω dacă:*

$$\begin{aligned} (i) &\quad \Omega \in \mathscr{F}, \\ (ii) &\quad \textit{dacă } A \in \mathscr{F}, \quad \textit{atunci } \bar{A} \in \mathscr{F}, \\ (iii) &\quad \textit{dacă } A, B \in \mathscr{F}, \quad \textit{atunci } A \cup B \in \mathscr{F}. \end{aligned}$$

Elemente lui $\mathscr{F}$ se numesc evenimente aleatoare sau ***evenimente****.*

Remarca I.3.2 Fie $\mathscr{F}$ să fie o algebră peste Ω. Din definiția anterioară se obține, folosind și legile lui De Morgan,

$$\begin{aligned} (iv) &\quad \varnothing \in \mathscr{F}, \\ (v) &\quad \text{dacă } A, B \in \mathscr{F}, \quad \text{atunci } A \cap B \in \mathscr{F}. \end{aligned}$$

Într-adevăr, $\varnothing = \bar{\Omega} \in \mathscr{F}$.

Deoarece $\bar{A}, \bar{B} \in \mathscr{F}$, avem și $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in \mathscr{F}$.

◇

Remarca I.3.3 Evident, proprietățile (iii) și (v) sunt adevărate și pentru un număr finit de evenimente din $\mathscr{F}$, i.e.

$$\begin{aligned} (iii)' &\quad \text{dacă } A_i \in \mathscr{F},\ i = \overline{1,n}, \quad \text{atunci } \bigcup\nolimits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}, \\ (v)' &\quad \text{dacă } A_i \in \mathscr{F},\ i = \overline{1,n}, \quad \text{atunci } \bigcap\nolimits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}, \end{aligned}$$

◇

Remarca I.3.4 Putem spune că o algebră peste Ω este o familie nevidă de părți ale lui Ω închisă la reuniuni finite, la intersecții finite și la trecerea la complementară. ◇

Definiţia I.3.5 *Fie Ω o mulțime nevidă. Spunem că $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ este o $\sigma-$***algebră** *peste Ω dacă este o algebră peste Ω și dacă are loc*

$$(iii)'' \quad \textit{dacă } A_i \in \mathscr{F},\ i \in \mathbb{N}^*, \quad \textit{atunci } \bigcup\nolimits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}.$$

Exemplul I.3.6 Fie Ω o mulțime nevidă. Atunci $\mathscr{F} = \{\varnothing, \Omega\}$ este cea mai „săracă" $\sigma-$algebră peste Ω (este cea mai mică $\sigma-$algebră peste Ω) iar $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ este cea mai „bogată" $\sigma-$algebră peste Ω (este cea mai mare $\sigma-$algebră peste Ω). ◇

Remarca I.3.7 Dacă $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ este o $\sigma-$algebră, atunci proprietatea $(v)'$ este adevărată și pentru un număr infinit dar numărabil de evenimente, i.e.

$$(v)'' \quad \text{dacă } A_i \in \mathscr{F},\ i \in \mathbb{N}^*, \quad \text{atunci } \bigcap\nolimits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F},$$

◇

Acum putem defini probabilitatea ca fiind o funcție definită pe $\sigma-$algebra $\mathscr{F}$ cu valori în $\mathbb{R}$ ce satisfac anumite proprietăți (ca și în cazul spațiului finit de probabilitate).

Definiţia I.3.8 *Fie $\mathscr{F}$ o $\sigma-$algebră peste Ω. Se numește* **probabilitate** *(sau* **măsura de probabilitate***) o aplicație $\mathbb{P}:\mathscr{F}\to\mathbb{R}$ astfel încât*

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \mathbb{P}(A)\geq 0, \quad \text{oricare ar fi } A\in\mathscr{F},\\
&(ii) \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)\,, \text{ oricare ar fi } (A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}\subset\mathscr{F}\\
&\qquad\qquad \text{evenimente incompatibile două câte două,}\\
&(iii) \quad \mathbb{P}(\Omega)=1.
\end{aligned}
$$

Remarca I.3.9 Condiția (ii) este numită proprietatea de numărabilă aditivitate a măsurii $\mathbb{P}$. ◇

Remarca I.3.10 Din definiția anterioară se vede că, de fapt, aplicația $\mathbb{P}:\mathscr{F}\to[0,1]$, adică

$$(iv) \quad 0\leq\mathbb{P}(A)\leq 1, \text{ oricare ar fi } A\in\mathscr{F}.$$

◇

Definiţia I.3.11 *Dacă $\mathscr{F}$ este o $\sigma-$algebră peste Ω, atunci perechea $(\Omega,\mathscr{F})$ se numește* **spațiu măsurabil***.*

Definiţia I.3.12 *Fie $(\Omega,\mathscr{F})$ un spațiu măsurabil și probabilitatea $\mathbb{P}:\mathscr{F}\to\mathbb{R}$.*
Atunci tripletul $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ se numește **spațiu de probabilitate** *(sau* **câmp de probabilitate***).*

Remarca I.3.13 Din definiția spațiului finit de probabilitate observăm că nu trebuie să avem, în mod necesar, ca orice eveniment elementar să fie din $\mathscr{F}$, adică nu trebuie să avem, în mod necesar, că $\{\omega\}\in\mathscr{F}$, pentru orice $\omega\in\Omega$. ◇

Propoziţia I.3.14 *Fie $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate. Au loc următoarele proprietăți:*

$$
\begin{aligned}
&(v) \quad \text{probabilitatea evenimentului imposibil este nulă,} \quad \text{i.e. } \mathbb{P}(\varnothing)=0;\\
&(vi) \quad \text{probabilitatea evenimentului contrar este dată de:}\\
&\qquad \mathbb{P}(\bar{A})=1-\mathbb{P}(A)\,, \text{ oricare ar fi } A\in\mathscr{F};\\
&(ix) \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\,, \quad \text{oricare ar fi } A_i\in\mathscr{F}, \text{ cu } i=\overline{1,n}\,,\\
&\qquad\qquad \text{astfel încât } A_k\cap A_l=\varnothing, \text{ pentru } k,l=\overline{1,n}, \ k\neq l.
\end{aligned}
$$

Are loc și formula de calcul a probabilității unei reuniuni de două evenimente:

$$(xi) \quad \mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\,, \text{ oricare ar fi } A,B\in\mathscr{F}.$$

Se obține formula de calcul a probabilității unei reuniuni de trei evenimente:

$$
\begin{aligned}
(xi)' \quad \mathbb{P}(A\cup B\cup C)&=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)\\
&-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)\\
&+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)\,, \quad \text{oricare ar fi } A,B,C\in\mathscr{F}.
\end{aligned}
$$

Demonstraţie. (xi) Vezi relația (I.6.1) și demonstrația de la pagina 12.

$(xi)'$ Se obține aplicând (xi) de trei ori.

■

Remarca I.3.15 Am obținut că probabilitatea evenimentului imposibil $\varnothing$ este nulă. Dar să menționăm că, în cazul unui spațiu de probabilitate infinit, nu orice eveniment cu probabilitatea nulă[6] este evenimentul imposibil; vezi, de exemplu, cazul unei variabile aleatoare $X:\Omega\to\mathbb{R}$ de tip continuu, când evenimentul $\{X=a\}$ este neglijabil, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, dar, pe de altă parte, dacă $a\in X(\Omega)$, atunci $\{X=a\}$ nu este un eveniment imposibil. ◇

[6] Spunem că evenimentul $A\in\mathscr{F}$ este **nul** sau $\mathbb{P}-$**nul** sau **neglijabil** dacă $\mathbb{P}(A)=0$.
Dacă $\bar{A}$ este eveniment neglijabil (sau, echivalent, $\mathbb{P}(A)=1$), atunci spunem că evenimentul A se produce $\mathbb{P}-$**aproape sigur** (notat $\mathbb{P}-$**a.s.**) sau $\mathbb{P}-$**aproape pentru toţi** ω sau $\mathbb{P}-$**aproape peste tot** (notat $\mathbb{P}-$**a.p.t.**) sau **cu probabilitatea** 1.

Remarca I.3.16 Formula $(xi)'$ se poate generaliza la n evenimente. Astfel se poate demonstra prin inducție că, dacă $A_i \in \mathscr{F}$, cu $i = \overline{1,n}$, atunci are loc formula de calcul a probabilității unei reuniuni de evenimente, numită **formula lui Poincaré** sau **formula de incluziune-excluziune**[7]:

$$(xi)'' \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{1\le i\le n} A_i\Big) = \sum\nolimits_{1\le i_1\le n} \mathbb{P}(A_{i_1}) - \sum\nolimits_{1\le i_1<i_2\le n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2})$$
$$+\sum\nolimits_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}) - \ldots + (-1)^{n-1}\,\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)\,.$$

◇

Definiţia I.3.17 *Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de evenimente din $\mathscr{F}$.*

Spunem că[8] are loc convergența $A_n \searrow A$, pentru $n\to\infty$, dacă

$$A_{n+1}\subset A_n\,,\quad \text{pentru orice } n\in\mathbb{N}^* \quad \text{și} \quad \bigcap\nolimits_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

Spunem că are loc convergența $A_n \nearrow A$, pentru $n\to\infty$, dacă

$$A_n\subset A_{n+1}\,,\quad \text{pentru orice } n\in\mathbb{N}^* \quad \text{și} \quad \bigcup\nolimits_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

În ambele cazuri putem scrie $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Propoziţia I.3.18 *Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de evenimente din $\mathscr{F}$. Atunci are loc* **proprietatea**[9] **de continuitate (secvențială) a măsurii $\mathbb{P}$ în raport cu șiruri monotone de evenimente**, *i.e.*

$$\begin{aligned}
(xiii)&\quad \text{Dacă } A_n\nearrow A, && \text{atunci } \mathbb{P}(A_n)\nearrow\mathbb{P}(A), && \text{pentru } n\to\infty.\\
(xiv)&\quad \text{Dacă } A_n\searrow A, && \text{atunci } \mathbb{P}(A_n)\searrow\mathbb{P}(A), && \text{pentru } n\to\infty.\\
(xv)&\quad \text{Dacă } A_n\searrow \varnothing, && \text{atunci } \mathbb{P}(A_n)\searrow 0, && \text{pentru } n\to\infty.\\
(xvi)&\quad \text{Dacă } A_n\nearrow \Omega, && \text{atunci } \mathbb{P}(A_n)\nearrow 1, && \text{pentru } n\to\infty.
\end{aligned}$$

Demonstraţie. $(xiii)$ Fie $A_n \nearrow A$, pentru $n\to\infty$. Să definim

$$B_1 = A_1\,,\quad B_n = A_n\setminus A_{n-1}\,,\quad \text{pentru orice } n\ge 2.$$

Atunci $(B_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt evenimente disjuncte două câte două iar

$$\bigcup\nolimits_{i=1}^{n} B_i = \bigcup\nolimits_{i=1}^{n} A_i = A_n \quad \text{și} \quad \bigcup\nolimits_{i\ge1} B_i = \bigcup\nolimits_{i\ge1} A_i = A.$$

Folosind definiția (ii) obținem

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{i\ge1} A_i\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{i\ge1} B_i\Big) = \sum\nolimits_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_i)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{i=1}^{n} B_i\Big) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

iar șirul $(\mathbb{P}(A_n))_n$ este șir crescător.

(xiv) Dacă $A_n \searrow A$, atunci $\bar{A}_n \nearrow \bar{A}$, deci $\mathbb{P}(\bar{A}_n) \nearrow \mathbb{P}(\bar{A})$ sau, echivalent, $\mathbb{P}(A_n)\searrow\mathbb{P}(A)$, pentru $n\to\infty$. ■

Fie, în continuare, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de evenimente din $\mathscr{F}$. Având în vedere că $\mathscr{F}$ este o $\sigma-$algebră, obținem că

$$\bigcup\nolimits_{n\ge1}\bigcap\nolimits_{m\ge n} A_m \quad \text{și} \quad \bigcap\nolimits_{n\ge1}\bigcup\nolimits_{m\ge n} A_m$$

7 Această formulă **nu este pentru Examen !**
8 Aceste definiții **nu sunt pentru Examen !**
9 Aceste proprietăți și demonstrațiile lor **nu sunt pentru Examen !**

sunt, de asemenea, evenimente. Ele se numesc[10] **limita inferioară**, și respectiv **limita inferioară**, a șirului de evenimente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și se notează (vezi și Definiția I.3.17):

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup\nolimits_{n\geq 1}\bigcap\nolimits_{m\geq n} A_m = \lim_{n\to\infty}\bigcap\nolimits_{m\geq n} A_m\,,$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcap\nolimits_{n\geq 1}\bigcup\nolimits_{m\geq n} A_m = \lim_{n\to\infty}\bigcup\nolimits_{m\geq n} A_m\,.$$

Folosind definiția, obținem că

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n &= \{\omega : \omega \in A_n \text{ pentru } n \text{ suficient de mare}\}\\ &= \{A_n \text{ se realizează „în cele din urmă”}\}\end{aligned}$$

și respectiv că

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &= \{\omega : \omega \in A_n \text{ pentru o infinitate de } n\}\\ &= \{A_n \text{ se realizează „infinit de des”}\}\,.\end{aligned} \tag{I.3.1}$$

În general, este dificil să lucrăm cu o $\sigma-$algebră (fiind un concept abstract). Dar dacă vom considera o $\sigma-$algebră generată de $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, atunci este mai ușor de lucrat cu ea; astfel, dacă arătăm că au loc anumite proprietăți pentru orice element din $\mathscr{C}$, atunci ele au loc și pentru orice element din $\sigma-$algebra generată de $\mathscr{C}$.

Definiţia I.3.19 *Fie $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ o colecție de mulțimi din Ω. Vom nota $\sigma-$algebra generată de $\mathscr{C}$ cu $\sigma(\mathscr{C})$ și ea va fi dată de cea mai mică $\sigma-$algebră care conține pe $\mathscr{C}$.*

Deci $\sigma(\mathscr{C})$ este definită de:

(a) $\sigma(\mathscr{C})$ este $\sigma-$algebră;

(b) $\mathscr{C} \subseteq \sigma(\mathscr{C})$;

(c) $\sigma(\mathscr{C})$ este cea mai mică $\sigma-$algebră care conține pe $\mathscr{C}$, i.e.: dacă $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$, iar $\mathscr{D}$ este o altă $\sigma-$algebră, atunci $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$.

Remarca I.3.20 Vom spune că $\mathscr{C}$ este constituie un sistem de generatori pentru $\sigma(\mathscr{C})$ sau că $\mathscr{C}$ generează $\sigma(\mathscr{C})$. ◇

Exemplul I.3.21 Dacă $\mathscr{C} = \varnothing$ sau $\mathscr{C} = \Omega$, atunci se obține

$$\sigma(\mathscr{C}) = \{\Omega, \varnothing\}\,,$$

adică cea mai mică $\sigma-$algebră peste Ω. ◇

Exemplul I.3.22 Dacă avem un spațiu măsurabil $(\Omega, \mathscr{F})$ și un eveniment $A \in \mathscr{F}$, atunci

$$\sigma(A) = \{\Omega, \varnothing, A, \bar{A}\}$$

este $\sigma-$algebra generată de evenimentul $A \in \mathscr{F}$. ◇

Exemplul I.3.23 Dacă avem un spațiu măsurabil $(\Omega, \mathscr{F})$ și evenimentele $A, B \in \mathscr{F}$, astfel încât $A \subset B$, atunci

$$\sigma(A, B) = \{\Omega, \varnothing, A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cup \bar{B}, \bar{A} \cap B\}$$

este $\sigma-$algebra generată de evenimentele $A, B \in \mathscr{F}$. ◇

Definiţia I.3.24 *Notația $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ desemnează $\sigma-$**algebra Borel** și este dată de $\sigma-$algebra generată de clasa de submulțimi deschise ale spațiului topologic $\mathbb{R}$.*

[10] Aceste definiții **nu sunt pentru Examen !**

Remarca I.3.25 Se poate arăta că $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ poate fi generată de orice fel de intervale, adică, de exemplu,

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}),$$
$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}),$$
$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}).$$

◇

Exercițiul I.3.26 (a) *Să se arate că pentru orice $a < b$ au loc, pentru $\epsilon \to 0_+$,*

$$A_\epsilon = (a, b+\epsilon] \searrow (a, b], \quad B_\epsilon = (a, b+\epsilon) \searrow (a, b],$$
$$C_\epsilon = (a, b-\epsilon] \nearrow (a, b), \quad D_\epsilon = (a, b-\epsilon) \nearrow (a, b).$$

(b) *Să se determine limita următoarelor șiruri de evenimente din spațiul măsurabil $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, definite pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\begin{array}{llll} A_n^1 = \big[a, b+\frac{1}{n}\big], & A_n^2 = \big[a, b+\frac{1}{n}\big), & B_n^1 = \big[a-\frac{1}{n}, b\big], & B_n^2 = \big(a-\frac{1}{n}, b\big], \\ C_n^1 = \big[a, b-\frac{1}{n}\big], & C_n^2 = \big[a, b-\frac{1}{n}\big), & D_n^1 = \big[a+\frac{1}{n}, b\big], & D_n^2 = \big(a+\frac{1}{n}, b\big], \\ E_n^1 = \big[a, n\big), & E_n^2 = \big(-n, b\big], & F_n^1 = \big(a-\frac{1}{n}, a\big], & F_n^2 = \big[a-\frac{1}{n}, a\big]. \end{array}$$

Propoziția I.3.27 (Lema lui Borel Cantelli) *Fie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate și $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de evenimente din $\mathscr{F}$. Atunci*[11]

(i) *dacă $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, atunci $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 0$;*

(ii) *dacă $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt evenimente independente în ansamblu*[12] *(vezi Definiția I.5.5) și $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, atunci $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 1$.*

Remarca I.3.28 Evident, (i) este echivalent cu

(i') Dacă $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) > 0$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$.

Prin urmare (ii) reprezintă, în condiții suplimentare, reciproca *parțială* a afirmației (i) sau (i'). ◇

Remarca I.3.29 Condiția de independență este esențială pentru a obține reciproca afirmației (i).

Un contraexemplu este următorul: să considerăm măsura Lebesgue λ și spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$.

Fie

$$A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

deci $\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n = \varnothing$.

Astfel am obținut că $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 < 1$ și, cu toate acestea, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. ◇

Remarca I.3.30 Condiția de independență este esențială în (ii).

Un contraexemplu simplu este următorul: să considerăm evenimentul $A \in \mathscr{F}$ astfel încât $\mathbb{P}(A) \in (0,1)$ și $A_n = A$. Deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

dar, cu toate acestea, $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = \mathbb{P}\big(A\big) < 1$. ◇

[11] Lema lui Borel Cantelli **nu este pentru Examen !**

[12] Concluzia punctului (ii) are loc și dacă evenimentele $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt independente două câte două.

I.4 Probabilități condiționate

Definiţia I.4.1 *Fie $A, B \in \mathscr{F}$ astfel încât $\mathbb{P}(A) > 0$. Probabilitatea evenimentului B în ipoteza că evenimentul A s-a realizat, se numește probabilitatea lui B condiționată de A și va fi notată cu $\mathbb{P}(B|A)$ și este dată de*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}. \tag{I.4.1}$$

Remarca I.4.2 Prin urmare obținem relația:

$$\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B).$$

◇

Remarca I.4.3 Fie $A \in \mathscr{F}$ un eveniment arbitrar fixat astfel încât $\mathbb{P}(A) > 0$; atunci $\mathbb{P}(B|A)$ este o notație pentru $\mathbb{P}_A(B)$ unde $\mathbb{P}_A$ este funcția

$$\mathbb{P}_A : \mathscr{F} \to [0,1], \quad \text{definită de} \quad \mathbb{P}_A(B) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}, \quad B \in \mathscr{F}.$$

Se poate arăta că această nouă funcție este o măsură de probabilitate iar tripletul $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_A)$ este, de asemenea, un spațiu de probabilitate.

De asemenea, dacă se notează $\mathscr{F}_A \overset{\text{def}}{=} \{B \in \mathscr{F} : B \subseteq A\}$, atunci tripletul $(A, \mathscr{F}_A, \mathbb{P}_A)$ este și el unspațiu de probabilitate numit **spațiul de probabilitate indus** pe A de spațiul $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Dacă $\mathscr{E}$ este experiențe aleatoare ce este modelată de spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, atunci $(A, \mathscr{F}_A, \mathbb{P}_A)$ modelează experiența aleatoare $\mathscr{E}_A$ dată de: $\mathscr{E}_A$ se produce dacă $\mathscr{E}$ se produce și rezultatul implică apariția lui A. ◇

Remarca I.4.4 Să observăm că și probabilitatea originală $\mathbb{P}$ poate fi văzută ca o probabilitate condiționată, mai precis, putem lua $\mathbb{P}(B) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_\Omega(B)$. ◇

Remarca I.4.5 Obținem imediat și formule de calcul a probabilității unei intersecții de evenimente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B), \\
\mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}(A|B \cap C) \cdot \mathbb{P}(B \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A|B \cap C) \cdot \mathbb{P}(B|C) \cdot \mathbb{P}(C), \\
\mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D) &= \mathbb{P}(A|B \cap C \cap D) \cdot \mathbb{P}(B \cap C \cap D) \\
&= \mathbb{P}(A|B \cap C \cap D) \cdot \mathbb{P}(B|C \cap D) \cdot \mathbb{P}(C|D) \cdot \mathbb{P}(D),
\end{aligned}$$

oricare ar fi $A, B, C, D \in \mathscr{F}$ astfel încât $\mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D) > 0$. ◇

I.5 Evenimente independente

Intuitiv, spunem că evenimentele A, B sunt independente dacă probabilitatea ca unul dintre ele să se realizeze nu depinde de realizarea sau de nerealizarea celuilalt.

Definiţia I.5.1 *Spunem că evenimentele A și B sunt* **independente** *dacă*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Remarca I.5.2 Relația de independență este deci simetrică.

Propoziţia I.5.3 *Evenimentele A și B sunt independente dacă și numai dacă are loc oricare dintre următoarele relații*

$$\begin{aligned}
(i) &\quad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B), \\
(ii) &\quad \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A), \\
(iii) &\quad \mathbb{P}\left(B|\bar{A}\right) = \mathbb{P}(B), \\
(iv) &\quad \mathbb{P}\left(A|\bar{B}\right) = \mathbb{P}(A).
\end{aligned}$$

Caracterizările de mai sus au loc în condițiile suplimentare $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A) < 1$ *și respectiv* $\mathbb{P}(B) < 1$.

Remarca I.5.4 Avem următoarea legătură între independență și incompabilitate: dacă două evenimente A și B, care nu sunt neglijabile, sunt independente, atunci evenimentele A și B sunt compatibile

Sau echivalent, dacă două evenimente, care nu sunt neglijabile, A și B sunt incompatibile, atunci evenimentele A și B sunt dependente.

Într-adevăr, dacă am presupune că A și B sunt incompatibile, atunci $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$, deci A sau B este un eveniment neglijabil. $\diamond$

Definiţia I.5.5 *Dacă avem o familie de evenimente* $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$*, spunem că acestea sunt* **independente (în ansamblu**[13]**)** *dacă probabilitatea intersecției a oricâte evenimente din familia* $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ *este egală cu produsul probabilităților evenimentelor intersectate, i.e. are loc*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap\nolimits_{k=1}^{r} A_{i_k}\Big) = \prod\nolimits_{k=1}^{r} \mathbb{P}(A_{i_k}), \quad \textit{oricare ar fi } 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n.$$

Definiţia I.5.6 *Dacă avem o familie de evenimente* $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$*, spunem că acestea sunt* **independente două câte două** *dacă probabilitatea intersecției a oricare două evenimente din familia* $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ *este egală cu produsul probabilităților evenimentelor intersectate, i.e. are loc*

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j), \quad \textit{oricare ar fi } 1 \le i < j \le n.$$

Remarca I.5.7 Evident, dacă evenimentele $\{A_1, \ldots, A_n\}$ sunt independente în ansamblu, atunci sunt independente și două câte două. Reciproca nu este adevărată. $\diamond$

Exerciţiul I.5.8 *Fie* $\Omega = \{a, b, c, d\}$ *și* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un spațiu de probabilitate Laplace. Fie evenimentele* $A = \{a, b\}, B = \{a, c\}, C = \{a, d\}$*. Se poate arăta că evenimentele* A, B, C *sunt independente două câte două, dar nu sunt independente în ansamblu deoarece*

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C).$$

Exerciţiul I.5.9 *Pe de altă parte, există exemple în care se vede că relația*

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

nu implică independența două câte două a evenimentelor A, B, C.

De exemplu, în cazul aruncării a două zaruri, fie $A = \{(i, j) \in \Omega : j = 1, 2, 5\}, B = \{(i, j) \in \Omega : j = 4, 5, 6\}$ *și* $C = \{(i, j) \in \Omega : i + j = 9\}$.

Propoziţia I.5.10 *Dacă evenimentele* $A_1, \ldots, A_n$ *sunt independente, atunci și evenimentele* $B_1, \ldots, B_n$ *sunt independente, unde* $B_i = A_i$ *sau* $B_i = \bar{A}_i$*, cu* $i = \overline{1,n}$.

Exemplul I.5.11 De exemplu, dacă evenimentele A, B sunt independente, atunci sunt indepedente și evenimentele $A, \bar{B}$, precum și evenimentele $\bar{A}, B$, precum și evenimentele $\bar{A}, \bar{B}$.

Într-adevăr, se poate arăta că $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ va implica oricare dintre relațiile

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}),\\
\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) &= \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(B),\\
\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) &= \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}).
\end{aligned}$$

$\diamond$

Pentru a ilustra Definiția I.5.1 să considerăm următorul exemplu.

[13] Dacă nu se precizează explicit, atunci independența înseamnă independența în ansamblu.

Exemplul I.5.12 Presupunem că avem două cutii cu bile roșii și albe. Prima cutie conține o bilă roșie și trei albe iar a doua cutie conține două bile roșii și trei bile albe. Extragem câte o bilă din fiecare cutie. Care este probabilitatea ca să extragem două bile roșii?

Numărul total de posibile perechi este de $4 \cdot 5 = 20$ (unei bile din prima cutie îi corespund cinci bile din a doua cutie pentru a face o pereche). Sunt două posibilități de a extrage două bile roșii: bila roșie din prima cutie (eveniment notat cu A) cuplată pe rând cu cele două bile roșii ale cutiei a doua (eveniment notat cu B). Deci probabilitatea de a extrage două bile roșii este de $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/20$.

Pe de altă parte probabilitatea extragerii unei bile roșii din prima cutie este $1/4$ iar probabilitatea extragerii unei bile roșii din a doua cutie este $2/5$, deci are loc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4 \cdot 2/5 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)\,.$$

Similar se poate afla probabilitatea extragerii a două bile albe care este de $3/4 \cdot 3/5$, și deci probabilitatea de a extrage o bilă roșie și una albă este complementara evenimentelor de mai sus, deci are probabilitatea $1 - (2/20 + 9/20) = 9/20$. ◇

I.6 Formule probabiliste

În cele ce urmează, fie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate.

I.6.1 Probabilitatea unei reuniuni de evenimente

Oricare ar fi evenimentele $A, B \in \mathscr{F}$ are loc relația

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\,.} \tag{I.6.1}$$

În particular, dacă evenimentele sunt disjuncte (incompatibile), atunci

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\,.$$

În cazul unui spațiu de probabilitate oarecare formula (I.6.1) se demonstrează cu ajutorul axiomelor ce definesc probabilitatea $\mathbb{P}$. Astfel are loc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)\,,\\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)\,,\\
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)\,,
\end{aligned}$$

deoarece $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing$ și $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \varnothing$.

Astfel obținem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)\\
&= \mathbb{P}(A \cup B)\,.
\end{aligned}$$

Remarca I.6.1 Formula (I.6.1) se poate generaliza la n evenimente. Astfel se obține, mai întâi,

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) &+ \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)\\
&- \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3)\\
&+ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}} \tag{I.6.2}$$

și, în cazul general, se poate demonstra prin inducție că, dacă $A_i \in \mathscr{F}$, cu $i = \overline{1,n}$, atunci ***probabilitatea realizării a cel puțin unui eveniment din familia*** $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ este dată de

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\bigcup_{1\le i\le n} A_i\Big) = \sum_{1\le i_1\le n} \mathbb{P}(A_{i_1}) &- \sum_{1\le i_1<i_2\le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2})\\
&+ \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})\\
&- \ldots + (-1)^{n-1}\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)\,.
\end{aligned}} \tag{I.6.3}$$

◇

Exemplul I.6.2 Fie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate și $A, B \in \mathscr{F}$ două evenimente. Se arate că probabilitatea ca exact unul dintre evenimente să se producă este

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B).$$

Într-adevăr, evenimentul ca exact unul dintre evenimentele A și B să apară este dat de

$$(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

iar evenimentele $(A \cap \bar{B})$ și $(\bar{A} \cap B)$ sunt incompatibile.

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\big((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \big) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\big((B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) \big) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}), \end{aligned}$$

deci probabilitatea ca exact unul dintre evenimentele A și B să apară este:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \big) &= \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B). \end{aligned} \tag{I.6.4}$$

◇

I.6.2 Regula de înmulțire a probabilităților

Pentru două evenimente arbitrare $A, B \in \mathscr{F}$, astfel încât $\mathbb{P}(A) > 0$, putem scrie definiția probabilității condiționate

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)},$$

deci au loc formulele

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A), \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B). \end{aligned} \tag{I.6.5}$$

Similar se obține și:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(C|A \cap B) \cdot \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A), \tag{I.6.6}$$

oricare ar fi $A, B, C \in \mathscr{F}$ astfel încât $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) > 0$.

Formula (I.6.6) se poate generaliza la n evenimente și obținem **probabilitatea realizării simultane a n evenimente** $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ sau probabilitatea unei intersecții de n evenimente sau **regula de înmulțire a probabilităților**:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}&(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \\ &\cdot \mathbb{P}(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \\ &\cdot \ldots \\ &\cdot \mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &\cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1), \end{aligned} \tag{I.6.7}$$

oricare ar fi $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ astfel încât $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$.

I.6.3 Formula probabilității totale (se aplică atunci când A_i, $i = \overline{1,n}$, s-au realizat)

Fie $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ un sistem complet de evenimente și X un eveniment oarecare. Presupunem că evenimentele A_i, $i = \overline{1,n}$, s-au realizat.

Atunci are loc **formula probabilității totale** (numită și **legea probabilității totale**) :

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(X|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(X|A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}(X|A_n). \tag{I.6.8}$$

Pentru demonstrație observăm mai întâi că $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ și deci

$$X = X \cap \Omega = X \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_n) = (X \cap A_1) \cup (X \cap A_2) \cup \ldots \cup (X \cap A_n) .$$

Deoarece $A_i \cap A_j = \varnothing$, pentru orice $i \neq j$, rezultă că și $(X \cap A_i) \cap (X \cap A_j) = \varnothing$, pentru orice $i \neq j$.

Folosind Definiția I.3.8 obținem, mai întâi,

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(X \cap A_1) + \mathbb{P}(X \cap A_2) + \ldots + \mathbb{P}(X \cap A_n) , \tag{I.6.9}$$

(numită şi ea formula probabilității totale sau legea probabilității totale) apoi, aplicând formula (I.6.5), deducem că

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(X|A_1)\, \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(X|A_2)\, \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(X|A_n)\, \mathbb{P}(A_n) ,$$

adică formula (I.6.8).

I.6.4 Formula lui Bayes (se aplică atunci când X s-a realizat)

Folosind relația (I.4.1) se obține formula lui Bayes

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}$$

care ne dă posibilitatea să calculăm probabilitatea condiționată $\mathbb{P}(B|A)$ dacă se cunoaște probabilitatea condiționată $\mathbb{P}(A|B)$.

În general, fie $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ un sistem complet de evenimente și X un eveniment oarecare. Presupunem că X s-a realizat.

Atunci are loc **formula lui Bayes**:

$$\mathbb{P}(A_i|X) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}(X|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\, \mathbb{P}(X|A_j)} , \quad i = \overline{1,n} . \tag{I.6.10}$$

Pentru demonstrație observăm că

$$\mathbb{P}(A_i \cap X) = \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}(X|A_i) = \mathbb{P}(X)\, \mathbb{P}(A_i|X)$$

și deci

$$\mathbb{P}(A_i|X) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}(X|A_i)}{\mathbb{P}(X)} .$$

Apoi folosim (I.6.8).

I.7 Metode de numărare

Calculul probabilităților în cazul unui spațiu de probabilitate finit conduce la numărarea diferitelor cazuri posibile. Pentru aceasta este util principiul de bază al analizei combinatorii (principiul multiplicării) iar apoi, pe baza acestuia, noțiunile de permutări, aranjamente și combinări.

I.7.1 Principiul multiplicării

Să presupunem că avem două evenimente astfel încât primul se poate realiza în m_1 moduri iar al doilea în m_2 moduri. Atunci ambele evenimente se pot realiza simultan în $m_1 \cdot m_2$ moduri.

În general, dacă avem n evenimente iar fiecare se poate realiza în m_i moduri, cu $i = \overline{1,n}$, atunci cele n evenimente se pot realiza simultan în

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n \text{ moduri}$$ [14]

Dacă suntem în cazul particular $m_i = m$, $i = \overline{1,n}$, atunci cele n evenimente se pot realiza simultan în

$$m^n \quad \text{moduri.} \tag{I.7.1}$$

[14] Acest principiu se poate exprima și astfel: dacă avem n elemente a_i , $i = \overline{1,n}$, iar dacă elementele pot fi alese în respectiv $m_1, m_2, \ldots, m_n$ moduri, atunci numărul $n-$**uplurilor ordonate** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$.

Exemplul I.7.1 Numărul situațiilor posibile care pot apărea dacă aruncăm două zaruri este $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$.

Să furnizăm și modelul matematic al experienței aleatoare propuse, altfel spus să determinăm spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Mulțimea Ω a evenimentelor elementare (sau mulțimea rezultatelor posibile) se poate scrie sub forma

$$\Omega = \{(FZ1, FZ2) : FZ1, FZ2 \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$$

iar conform principiului multiplicării $\operatorname{card}(\Omega) = 6^2$ care reprezintă numărul tuturor cazurilor posibile.

În ceea ce privește spațiul de evenimente, mulțimea $\mathscr{F}$ a părților este chiar mulțimea $\mathscr{P}(\Omega)$ a tuturor părților, adică a tuturor reuniunilor de elemente (sau evenimente) din Ω. Probabilitatea $\mathbb{P}$ a unui eveniment $A \in \mathscr{F}$ este $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$, unde $|A| = \operatorname{card}(A)$ este numărul tuturor uplurilor care apar în A iar $|\Omega| = \operatorname{card}(\Omega)$ este numărul tuturor uplurilor care apar în Ω.

Menționăm că, de asemenea, putem scrie Ω și sub forma

$$\Omega = \{f : \{FZ1, FZ2\} \to \{1, 2, \ldots, 6\} : f \text{ este funcție}\}$$

iar $|\Omega| = 6^2$, care este numărul tuturor posibilelor funcții între două mulțimi de cardinal finit (vezi Remarca I.7.13). $\diamond$

Exemplul I.7.2 Numărul situațiilor posibile care pot apărea dacă aruncăm trei monede este $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$.

Modelul matematic al experienței aleatoare propuse este similar celui propus mai sus.

Mulțimea Ω a evenimentelor elementare este

$$\Omega = \{(FM1, FM2, FM3) : FM1, FM2, FM3 \in \{C, P\}\}$$

iar conform principiului multiplicării $\operatorname{card}(\Omega) = 2^3$ care reprezintă numărul tuturor cazurilor posibile.

Mulțimea $\mathscr{F}$ a părților este mulțimea tuturor reuniunilor de evenimente elementare din Ω. Probabilitatea $\mathbb{P}$ a unui eveniment $A \in \mathscr{F}$ se definește similar ca mai sus.

Putem scrie Ω și sub forma

$$\Omega = \{f : \{FM1, FM2, FM3\} \to \{C, P\} : f \text{ este funcție}\}$$

iar $\operatorname{card}(\Omega) = 2^3$. $\diamond$

Exemplul I.7.3 Numărul de coduri de trei cifre care se pot forma cu cifrele 0, 1,. . . ,9 este 10^3.

Într-adevăr,

$$\Omega = \{(CP1, CP2, CP3) : CP1, CP2, CP3 \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}$$

iar conform principiului multiplicării $\operatorname{card}(\Omega) = 10^3$. $\diamond$

În continuare vom face distincție între o mulțime în care ne interesează ordinea elementelor sale și o mulțime în care nu ne interesează ordinea elementelor sale.

I.7.2 Permutări. Aranjamente. Combinări[15]

Dacă, de exemplu, avem o mulțime cu 3 elemente $\{a, b, c\}$, atunci acestea se pot aranja astfel: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Deci prima poziție poate fi ocupată de oricare din cele trei elemente, a doua poziție poate fi ocupată de oricare din cele două elemente rămase, iar a treia poziție poate fi ocupată doar de singurul element rămas. Aplicând principiul multiplicării obținem astfel un număr de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ posibile aranjamente a celor 3 elemente.

În general, dacă avem o mulțime cu n elemente, prima poziție poate fi ocupată de oricare din cele n elemente, a doua poziție poate fi ocupată de oricare din cele $(n-1)$ elemente rămase ș.a.m.d. Ultima poziție, a n−a, poate fi ocupată doar de singurul element rămas. Aplicând principiul multiplicării obținem astfel un număr de

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

posibile aranjamente a celor n elemente.

[15] Aceste tehnici de numărare **nu sunt prezentate în cadrul Cursului ci doar în cadrul Seminarului (prin exemple concrete)**.

Fiecare mulțime ordonată formată cu n elemente (care nu se pot repeta) se numește **permutare** a elementelor acelei mulțimi iar numărul total de permutări al celor n elemente este $n!$.

Dacă avem o mulțime cu n elemente, atunci ne poate interesa și în câte moduri se pot aranja $k \leq n$ elemente. Astfel prima poziție poate fi ocupată de oricare din cele n elemente, a doua poziție poate fi ocupată de oricare din cele $(n-1)$ elemente rămase ș.a.m.d. Ultima poziție, a $k-$a, poate fi ocupată de elemente rămase, care sunt în număr de $(n-(k-1))$. Aplicând principiul multiplicării obținem astfel un număr de

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

posibile aranjamente a celor k elemente.

Fiecare submulțime ordonată de k elemente, care nu se pot repeta, formată din n elemente se numește **aranjament** al celor n elemente luate câte k iar numărul total aranjamente posibile este notat și dat de

$$A_n^k \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{n!}{(n-k)!}\,. \tag{I.7.2}$$

Evident, aranjarea a n elemente luate câte n reprezintă $A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$, adică exact numărul de permutări.

Exemplul I.7.4 Dacă avem la dispoziție pânză de steag de cinci culori diferite, putem face un steag tricolor (contează ordinea culorilor) în $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$ moduri. ◇

Exemplul I.7.5 Câte parole cu câte cinci litere se pot forma, dacă literele nu se pot repeta? Dar dacă se pot repeta? (considerăm că sunt 26 de litere)

Dacă nu se pot repeta, atunci avem A_{26}^5 moduri (sau de submulțimi ordonate). Dacă se pot repeta, atunci avem 26^5 moduri, datorită principiului multiplicării, deoarece fiecare poziție poate sa fie ocupată de oricare dintre cele 26 de litere, independent de celelalte. ◇

Dacă, de exemplu, avem o mulțime cu 5 elemente $\{a, b, c, d, e\}$, atunci ne poate interesa câte grupe de câte 3 se pot forma cu aceste elemente. Urmând metoda de numărare de la aranjamente obținem $5 \cdot 4 \cdot 3$ posibile modalități de aranjare în grupe de câte 3 elemente. Pe de altă parte în fiecare grupă obținută contează ordinea. De exemplu, o posibilă grupă de aceleași 3 elemente este numărată de 3! ori deoarece apar variantele: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*. Deci numărul total de grupe ce pot fi obținute din cele 5 elemente și pentru care nu contează ordinea în fiecare grupă este $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$.

În general, dacă avem o mulțime cu n elemente și dorim să obținem grupe (neordonate) de câte k elemente, atunci numărul acestor grupe este

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\,.$$

Fiecare submulțime neordonată de k elemente, care nu se pot repeta, formată din n elemente se numește **combinare** ale celor n elemente luate câte k iar numărul tuturor combinărilor posibile este notat și dat de

$$C_n^k \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\,. \tag{I.7.3}$$

Prin convenție vom lua

$$C_n^k = 0 \quad \text{ori de câte ori} \quad k < 0 \quad \text{sau} \quad k > n.$$

Exemplul I.7.6 Pentru un joc avem cinci fete și trei băieți care trebuie să formeze o echipă de câte patru persoane. În câte moduri se poate forma echipa?

O grupă de patru persoane se poate forma, dacă avem în vedere structura echipei, în $C_5^4 \cdot C_3^0 + C_5^3 \cdot C_3^1 + C_5^2 \cdot C_3^2 + C_5^1 \cdot C_3^3 = 70$ moduri. Pe de altă parte, sunt C_8^4 echipe posibile (deoarece nu contează nici ordinea nici dacă sunt băieți sau fete).

Am obținut și am demonstrat, folosind astfel analiza combinatorie, identitatea[16]

$$C_5^4 \cdot C_3^0 + C_5^3 \cdot C_3^1 + C_5^2 \cdot C_3^2 + C_5^1 \cdot C_3^3 = C_8^4\,.$$

◇

[16] Vezi și identitatea algebrică combinatorială obținută în cazul aplicării schemei hipergeometrice.

Exemplul I.7.7 În câte moduri 10 studenți pot ocupa 10 bănci? Dar 12 bănci?

Evident, 10 studenți pot ocupa 10 bănci în $A_{10}^{10} = 10!$ moduri.

În cazul a 12 bănci avem: 10 bănci pot fi alese în C_{12}^{10} moduri, iar pentru 10 bănci fixate avem 10! moduri de a se așeza studenții. Conform principiului multiplicării vom obține $C_{12}^{10} \cdot 10! = A_{12}^{10}$ moduri. $\diamond$

Putem generaliza formularea problemei de mai sus considerând următoarea situație: avem o mulțime cu n elemente și dorim să obținem r grupe (neordonate) de câte k_i elemente fiecare, cu $i = \overline{1,r}$, unde $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$. Atunci numărul total de grupe posibile este dat, conform principiului multiplicării, de

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-k_1-\ldots-k_{r-1}}^{k_r}$$
$$= \frac{n!}{k_1! \cdot (n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2! \cdot (n-k_1-k_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-k_1-\ldots-k_{r-1})!}{k_r! \cdot (n-k_1-\ldots-k_r)!} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_r!}.$$

S-a obținut o **combinare a celor n elemente luate în r grupe de câte k_i elemente fiecare**, $i = \overline{1,r}$, cu $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$, iar numărul tuturor combinărilor posibile este notat și dat de

$$C_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} \overset{\text{def}}{=} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}. \tag{I.7.4}$$

Remarca I.7.8 Evident, combinarea a n elemente luate în 2 grupe de câte k_i elemente fiecare ($k_1 = k$ și respectiv $k_2 = n-k$ elemente) dată de definiția (I.7.4) reprezintă combinarea celor n elemente luate câte k dată de definiția (I.7.3), i.e. $C_n^k \overset{\text{not}}{=} C_n^{k,n-k}$. $\diamond$

Exemplul I.7.9 O secție de poliție are angajați 10 polițiști. Știm că 5 polițiști trebuie să fie pe teren, 2 polițiști lucrează la birou iar 3 polițiști sunt pentru situații de urgență.

Atunci sunt posibile

$$C_{10}^5 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 = \frac{10!}{5!\,2!\,3!} = C_{10}^{5,2,3}$$

moduri în care se pot diviza în cele 3 grupe cei 10 polițiști. $\diamond$

Exemplul I.7.10 Se aruncă un zar de 14 ori. Să se arate că probabilitatea ca fața 1 să apară de 3 ori, fața 2 să apară o dată, fața 3 să apară de 4 ori, fața 4 să apară de 2 ori, fața 5 să apară de 3 ori și fața 6 să apară o singură dată este $\dfrac{C_{14}^{3,1,4,2,3,1}}{6^{14}}$.

Într-adevăr, numărul cazurilor tuturor posibile de $14-$upluri este de 6^{14}. Pe de altă parte, numărul tuturor cazurilor favorabile apariției evenimentului avut în vedere este

$$C_{14}^3 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^4 \cdot C_6^2 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 = \frac{14!}{3!\,1!\,4!\,2!\,3!\,1!} = C_{14}^{3,1,4,2,3,1}.$$

$\diamond$

Remarca I.7.11 Ne putem imagina și problema obținerii de **submulțimi neordonate de k elemente dar care se pot repeta, formată din n elemente**. Se poate arăta[17] că numărul tuturor combinărilor posibile de n elemente luate în grupe de câte k care se pot și repeta este dat de C_{n+k-1}^k.

Prin urmare, folosind și (I.7.1), (I.7.2), (I.7.3), se obține următoarea sinteză legată de numărul total de $k-$upluri ce se pot forma din n elemente:

Tipul de uplu / Modul de formare	Contează ordinea	Nu contează ordinea
Repetiția este permisă	n^k	C_{n+k-1}^k
Repetiția nu este permisă	A_n^k	C_n^k

$\diamond$

17 Aceasta formulă **nu este pentru Examen !**

Exemplul I.7.12 De exemplu, dacă ne interesează submulțimi de 2 elemente care se pot forma, în diverse moduri, din 3 elemente, atunci avem următoarele variante:

Modul de formare \ Tipul de uplu	Contează ordinea	Nu contează ordinea
Repetiția este permisă	$(1,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,1)$ $(2,2)$ $(2,3)$ $(3,1)$ $(3,2)$ $(3,3)$	$(1,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,2)$ $(2,3)$ $(3,3)$
Repetiția nu este permisă	$(1,2)$ $(1,3)$ $(2,1)$ $(2,3)$ $(3,1)$ $(3,2)$	$(1,2)$ $(1,3)$ $(2,3)$

◇

Remarca I.7.13 Dacă D, C sunt două mulțimi cu un număr finit de elemente $\text{card}\,(D) = |D| = n$ iar $\text{card}\,(C) = |C| = m$, atunci **numărul tuturor funcțiilor** $f : D \to C$ este

$$m^n = |C|^{|D|}\,.$$

Astfel, fiecărui element al mulțimii D i se poate asocia oricare din cele m valori, deci, folosind principiul multiplicării, numărul tuturor $n-$uplurilor ordonate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ posibile este $\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{\text{de } n\text{-ori}} = m^n$.

Evident, dacă $|D| = n > m = |C|$, atunci nu există nici o funcție injectivă între D și C. Dacă $n \leq m$, **numărul tuturor funcțiilor injective** $f : D \to C$ este

$$A_m^n = A_{|C|}^{|D|}\,.$$

Într-adevăr, dacă $n \leq m$, atunci elementului a_1 i se pot asocia m valori, elementului a_2 i se pot asocia $(m-1)$ valori (deoarece asocierea este injectivă și deci o valoare din C nu se mai poate asocia nici unui alt element din D) ș.a.m.d. În final, elementului a_n i se pot asocia $(m-(n-1))$ valori. Deci, folosind principiul multiplicării, numărul tuturor $n-$uplurilor ordonate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ care se pot scrie este

$$m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!} = A_m^n\,.$$

Evident, **numărul tuturor funcțiilor bijective** $f : D \to C$ este

$$n! = A_{|C|}^{|C|}$$

deoarece trebuie să avem $|C| = |D|$.

◇

I.8 Scheme clasice de probabilitate[18]

I.8.1 Schema lui Poisson (schema binomială generalizată)

Fie $\mathscr{E}$ o experiență care constă în efectuarea a n experiențe independente $\mathscr{E}_1, \ldots \mathscr{E}_n$, iar A_i, $i = \overline{1,n}$, evenimente legate de experiențele $\mathscr{E}_i$ respectiv. Fie X evenimentul care constă în realizarea a k evenimente $(0 \leq k \leq n)$ din cele n evenimente A_i, $i = \overline{1,n}$, când se efectuează experiența $\mathscr{E}$. Atunci are loc

[18] Aceste scheme clasice de probabilitate **nu sunt prezentate în cadrul Cursului ci doar în cadrul Seminarului (prin exemple concrete)**.

Propoziţia I.8.1 *Probabilitatea evenimentului X este coeficientul lui x^k din polinomul*

$$Q(x) = (p_1 x + q_1) \cdot (p_2 x + q_2) \cdot \ldots \cdot (p_n x + q_n),$$

unde $p_i = \mathbb{P}(A_i)$ și $q_i = 1 - p_i = \mathbb{P}(\bar{A}_i)$.

Demonstraţie. Pentru simplitate, vom considera doar cazul $n = 4$ și $k = 2$. Evenimentul a cărui realizare înseamnă realizarea a 2 evenimente și nerealizarea a 2 evenimente este scris sub forma unei reuniuni de alte $C_4^2 = 6$ evenimente (în fiecare dintre ele 2 se realizează și celelalte 2 nu):

$$\begin{aligned} &(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4) \\ &\cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4). \end{aligned}$$

Toate cele 6 evenimente sunt incompatibile între ele, iar fiecare dintre ele este intersecția a patru evenimente independente. Prin urmare, probabilitatea evenimentului precedent este

$$p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 q_2 p_3 p_4$$

care este exact coeficientul lui x^2 din polinomul $Q(x) = (p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)(p_3 x + q_3)(p_4 x + q_4)$.

În cazul general, X contă în reuniunea a C_n^k evenimente, fiecare dintre acestea scriindu-se ca intersecția a n evenimente independente (dintre care k sunt de tipul A_i iar $(n-k)$ sunt de tipul $\bar{A}_j$). ■

Remarca I.8.2 Se vede din demonstrație că rezultatul obținut nu simplifică calculul efectiv al probabilității cerute. Este doar o formulare condensată a metodei de calcul. ◇

O variantă concretă și des întâlnită a schemei Poisson este următoarea: se dau n urne $U_1, ..., U_n$ care conțin bile albe și negre în proporții cunoscute (adică se cunosc probabilitățile p_i de extragere a unei bile albe din urna U_i, cu $i = \overline{1,n}$). Fie $\mathscr{E}$ experiența extragerii a câtei unei bile din fiecare urnă U_i, $i = \overline{1,n}$. Dacă X reprezintă evenimentul extragerii a k bile albe (și deci a $n-k$ bile negre), când din fiecare urnă se extrage câte o bilă, atunci $\mathbb{P}(X)$ este a_k, unde a_k este coeficientul lui x^k din polinomul $Q(x)$ de mai sus.

Remarca I.8.3 Uneori se poate considera că cele n evenimente A_i coincid între ele, $A_i = A$, $i = \overline{1,n}$. Evenimentul X constă atunci în faptul că evenimentul A se realizează de k ori și de $(n-k)$ ori nu se realizează, atunci când se efectuează experiența $\mathscr{E}$ ce constă în cele n experiențe $\mathscr{E}_i$. În acest caz particular se obține schema binomială. ◇

I.8.2 Schema binomială (schema bilei revenite)

Fie $\mathscr{E}$ o experiență și A un eveniment legat de experiența $\mathscr{E}$. Notăm cu $p = \mathbb{P}(A)$. Fie X evenimentul care constă în realizarea lui A de k ori și în nerealizarea lui A de $n-k$, când se efectuează experiența $\mathscr{E}$ de n ori. Atunci are loc

Propoziţia I.8.4 *Probabilitatea evenimentului X este*

$$\mathbb{P}(X) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad cu\ q = 1 - p.$$

Demonstraţie. Se observă că suntem într-un caz particular al schemei lui Poisson în care pentru $i = \overline{1,n}$, $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}$, $A_i = A$, deci $p_i = p$, $q_i = 1 - p$ iar $Q(x) = (px + q)^n$. Prin urmare, probabilitatea cerută este coeficientul lui x^k, adică $C_n^k p^k q^{n-k}$. ■

O variantă concretă a schemei binomiale este următoarea: se dă o urnă U care conține bile a albe și b bile negre (deci probabilitatea p de extragere a unei bile albe din urna U este $p = a/(a+b)$ și, evident, $q = b/(a+b)$). Fie $\mathscr{E}$ experiența extragerii unei bile din urna U, urmând ca bila să fie pusă înapoi. Se efectuează $\mathscr{E}$ de n ori. Dacă X reprezintă evenimentul extragerii a k bile albe și a $n-k$ bile negre, atunci

$$\mathbb{P}(X) = C_n^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}.$$

Exemplul I.8.5 Dintr-o urnă cu 14 de bile, dintre care 8 albe și 6 negre, se extrag cu revenire 3 bile. Care este probabilitatea ca cele 3 bile extrase să fie 2 albe și una neagră?

Suntem în cazul $n = 3$, $k = 2$, $p = 8/14 = 4/7$, $q = 3/7$. ◇

I.8.3 Schema hipergeometrică (schema bilei nerevenite)

Să considerăm o urnă U cu m bile de tipul a bile albe și $b = m - a$ bile negre. Experiența $\mathscr{E}$ constă în **extragerea succesivă a** n **bile fără a pune bila extrasă înapoi** ($n \leq m$) (sau se poate considera că **se scot** n **bile simultan**). Fie X evenimentul ca din cele n bile extrase α să fie albe și $\beta = n - \alpha$ să fie negre ($\alpha \leq a$, $\beta \leq b$). Atunci are loc următorul rezultat.

Propoziţia I.8.6 *Probabilitatea evenimentului X este*

$$\mathbb{P}(X) = \frac{C_a^\alpha \cdot C_b^\beta}{C_{a+b}^{\alpha+\beta}}, \quad \textit{unde } \alpha + \beta = n,\ a + b = m.$$

Demonstraţie. Să presupunem că se extrag n bile deodată. Numărul cazurilor posibile este C_{a+b}^n. Pe de altă parte, α bile albe se pot extrage în C_a^α iar β bile negre se pot extrage în C_b^β, deci, conform principiului multiplicării, α bile albe și β bile negre se pot extrage în $C_a^\alpha \cdot C_b^\beta$ moduri (fiecare grupă de α bile albe se poate grupa cu fiecare grupă de β bile negre). Apoi folosim definiția clasică a probabilității.

Cazul în care bilele se extrag una câte una se rezolvă similar: în această situație, numărul cazurilor posibile este $A_{a+b}^n = n! C_{a+b}^n$ iar cel al cazurilor favorabile este $n! \cdot C_a^\alpha \cdot C_b^\beta$. ■

Exemplul I.8.7 La o extragere, din 400 de bilete, 4 sunt câștigătoare. O persoană cumpără 10 bilete. Care este probabilitatea ca să nu aibă nici un bilet câștigător?

Avem $a = 4$, $b = 396$, $\alpha = 0$, $\beta = 10$, $n = 10$. Deci probabilitatea să obținem $k = 0$ bilete câștigătoare este $\dfrac{C_4^0 \cdot C_{396}^{10}}{C_{400}^{10}} = 0.903$. ◇

Putem să generalizăm în felul următor: să considerăm o urnă U cu m bile de r culori; mai precis, avem a_i bile din fiecare culoare c_i, $i = \overline{1,r}$. Experiența $\mathscr{E}$ constă în extragerea succesivă a n bile fără a pune bila extrasă înapoi ($n \leq \sum_{i=1}^r a_i$) (sau se poate considera că se scot n bile simultan). Fie X evenimentul ca din cele n bile extrase α_1 să fie de culoarea $c_1, \ldots, \alpha_r$ să fie de culoarea c_r, cu $\sum_{i=1}^r \alpha_i = n$ astfel încât $\alpha_i \leq a_i$.

În mod similar Propoziției I.8.6 se poate demonstra următorul rezultat.

Propoziţia I.8.8 *Probabilitatea evenimentului X este*

$$\mathbb{P}(X) = \frac{C_{a_1}^{\alpha_1} \cdot C_{a_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot C_{a_m}^{\alpha_m}}{C_{a_1+\ldots+a_m}^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}}, \quad \textit{unde } \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = n.$$

Exemplul I.8.9 O urnă conține 8 bile albe, 9 bile negre și 10 bile roșii. Se extrag 3 bile. Care este probabilitatea ca bilele extrase să fie de culori diferite?

Dorim ca grupul celor trei bile să arate astfel: una albă, una neagră și una roșie. Deci probabilitatea evenimentului cerut este $\dfrac{C_8^1 \cdot C_9^1 \cdot C_{10}^1}{C_{27}^3} = 0.246$. ◇

Exemplul I.8.10 Un magazin vinde un același tip de marfă produsă de trei firme. Magazinul are 300 de unități de la prima firmă, 260 de unități de la a doua firmă, 420 de unități de la a treia firmă și vinde 260 de produse. Care este probabilitatea 80 de unități să fie de la prima firmă, 50 de unități de la a doua firmă și 130 de unități să fie de la a treia firmă? ◇