Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Conf. dr. Lucian MATICIUC

Cursurile 7 – 10

Capitolul III. Variabile aleatoare continue

III.1 Variabile aleatoare continue

Fie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate. Vorbind neriguros, spunem că v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este de tip continuu dacă poate lua orice valoare dintr-un interval, posibil nemărginit, $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

În cazul v.a. continue nu ne interesează probabilitatea ca X să ia o singură valoare ci doar probabilități de forma $\mathbb{P}(a < X < b)$, deoarece vom vedea că probabilitatea $\mathbb{P}(X = a) = 0$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

O v.a. continuă este bine determinată dacă se cunoaște cel puțin una dintre funcțiile legate de ea: **funcția de repartiție** F (vezi cursurile precedente) sau **densitatea de repartiție** f. Densitatea de repartiție este mai importantă pentru o v.a. continuă, deoarece ea suplinește tabloul de repartiție din cazul v.a. discrete.

Remarca III.1.1 Dacă X este o v.a. continuă atunci vom vedea că funcția ei de repartiție F_X este funcție continuă (ceea ce justifică și numele v.a.) spre deosebire de v.a. discrete când F_X este o funcție în scară: constantă pe porțiuni, nedescrescătoare și cu un număr cel mult numărabil de salturi. $\diamond$

III.1.1 Densitatea de repartiție

Definiţia III.1.2 *Funcția* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este o* **densitate de repartiție** *(sau* **densitate de probabilitate***) dacă:*

(i) $f(x) \geq 0$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$;

(ii) f *este integrabilă pe* $\mathbb{R}$ *cu* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = 1.$

Definiţia III.1.3 *Să considerăm o v.a. X pentru care există o densitate de repartiție $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ astfel încât*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}, \tag{III.1.1}$$

unde F_X este funcția de repartiție asociată v.a. X.

Atunci funcția f_X se numește **densitatea de repartiție** *(sau* **densitate de probabilitate***) asociată v.a. X.*

Putem considera drept definiție a unei v.a. continue următoarea formulare (vezi și Remarca III.1.10):

Definiţia III.1.4 *V.a. X este* **v.a. de tip continuu** *dacă admite o densitate de repartiție (în sensul Definiției III.1.3).*

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o densitate de repartiție, atunci se poate demonstra că există un spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ și o v.a. definită pe acesta astfel încât f este densitatea de repartiție asociată lui X. Prin urmare, are loc următoarea caracterizare:

Propoziţia III.1.5 *Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este densitatea de repartiție a unei v.a. dacă și numai dacă f satisface cele două condiții din Definiția III.1.2.*

Remarca III.1.6 Densitatea asociată unei v.a. nu este unică (în sensul egalității peste tot) dar **densitatea asociată unei v.a. este unică în sensul egalității aproape peste tot**, în sensul că dacă $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sunt două funcții integrabile Riemann pe $\mathbb{R}$, atunci:

f, g sunt două densități pentru aceeași v.a. X dacă și numai dacă

$f = g$ a.p.t.[1] (în raport cu măsura Lebesgue).

Prin urmare,

este suficient să cunoaștem o densitate în orice punct din $\mathbb{R}$

exceptând, eventual, o mulțime cel mult numărabilă de puncte.

De exemplu, dacă $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ și $g(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, atunci ambele funcții sunt densități, $f = g$ a.p.t. (în raport cu măsura Lebesgue) și ambele sunt densități asociate v.a. X și respectiv Y cu funcțiile de repartiție

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f_Y(t)\,dt = F_Y(x),$$

[1] Fie spațiul măsurabil $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ înzestrat cu o măsură μ. Spunem că o proprietate $\mathscr{A}$ are loc $\mu-$**aproape pentru toţi** x sau $\mu-$**aproape peste tot** (notat $\mu-$**a.p.t.**) dacă există mulțimea măsurabilă $N \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ cu $\mu(N) = 0$ astfel încât proprietatea $\mathscr{A}$ are loc pentru orice $x \in \bar{N}$.

deci

$$F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x\,, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

adică X și Y sunt identic distribuite. Să observăm că $X, Y \sim \mathscr{U}[0,1]$.

Deci, dacă v.a. $X \sim \mathscr{U}[0,1]$, atunci putem să considerăm că X are densitatea $f = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ sau $g = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$. ◇

Remarca III.1.7 Folosind teorema lui Lebesgue de caracterizare a funcțiilor integrabile Riemann știm că (vezi Nota 1)

dacă f este mărginită pe $[a,b]$, atunci:

f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă și numai dacă

f este continuă a.p.t. pe $[a,b]$, în raport cu măsura Lebesgue.

◇

Remarca III.1.8 Dacă f este o funcție de densitate, atunci $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ este convergentă, deci ne putem aștepta ca $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, dar nu este obligatoriu (există exemple[2] în acest sens). ◇

Remarca III.1.9 **O funcție de densitate nu trebuie neapărat să fie mărginită**. De exemplu, dacă X este o v.a. cu funcția de repartiție

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sqrt{x}\,, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

atunci densitatea asociată este

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

care nu este mărginită în 0. Cu toate acestea, $f_X \ge 0$ pe $\mathbb{R}$ iar $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = \int_{0+}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 1.$ ◇

Remarca III.1.10 În probleme concrete cel mai adesea folosim v.a. discrete (caz în care funcția de repartiție este nedescrescătoare și constantă pe porțiuni) și v.a. continue (caz în care funcția de repartiție este continuă, nedescrescătoare, dată de integrala (III.1.1)).

Dar se poate da și **o clasificare riguroasă a v.a.** X :

[2] Se poate arăta că dacă integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă, atunci:

(a) dacă există limita $\lim_{x\to\infty} f(x)$, atunci aceasta trebuie să fie 0;

(b) dacă există limita $\lim_{x\to\infty} x f(x)$, atunci aceasta trebuie să fie 0.

- spunem că X este **v.a. discretă** dacă există $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ cel mult numărabilă astfel încât $\mathbb{P}(X \in B) = 1$; s-a arătat deja că X este v.a. discretă dacă și numai dacă funcția ei de repartiție este constantă pe porțiuni;
- spunem că X este **v.a. continuă** dacă $\mathbb{P}(X \in B) = 0$, pentru orice $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ cel mult numărabilă; în această definiție se obtine (folosind legătura dintre $\mathbb{P}(X = a)$ și funcția de repartiție) că X este v.a. continuă dacă și numai dacă funcția ei de repartiție este continuă.

$\diamond$

Evident, se pot construi ușor exemple de v.a. care să fie de tip mixt, adică v.a. X să ia anumite valori cu probabilitate strict pozitivă și, de asemenea, valorile v.a. X să fie un interval.

Exemplul III.1.11 O v.a. de tip mixt poate să apară în felul următor: X reprezintă timpul de așteptare al unei persoane la un semafor. Prin urmare, valorile lui X sunt în $[0, \infty)$. Este posibil ca atunci când persoana ajunge la acel semafor să nu aștepte deloc, adică există $p > 0$ astfel încât $\mathbb{P}(X = 0) = p$; în cazul în care persoana trebuie să aștepte, timpul de așteptare definește o v.a. de tip continuu. Prin urmare, există f astfel încât $\mathbb{P}(X > 0) = \int_0^\infty f(x)\, dx = 1 - p$. $\diamond$

Exemplul III.1.12 Un alt exemplu concret de v.a. de tip mixt este dat de v.a. X definită de următoarea funcția de repartiție:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.1 + 0.8\, x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Această funcție este o funcție de repartiție deoarece este nedescrescătoare, continuă la dreapta pe $\mathbb{R}$ iar $F_X(-\infty) = 0$ și $F_X(+\infty) = 1$.

Dar această funcție nu este nici constantă pe porțiuni (cazul v.a. discrete) și nici continuă pe $\mathbb{R}$ (cazul v.a. continue). $\diamond$

Propoziţia III.1.13 *Fie X o v.a. continuă și F_X funcția ei de repartiție. Atunci:*

(i) *F_X este funcție continuă (ceea ce justifică denumirea de v.a. continuă).*

Astfel cuvântul „continuu" din denumirea „v.a. continue" se referă mai degrabă la o proprietate a funcției de repartiție F_X decât la o proprietate a funcției măsurabile X.

(ii) *F_X este derivabilă în orice punct $x \in \mathbb{R}$ în care f este continuă și*

$$F_X'(x) = f_X(x), \quad \text{oricare ar fi } x \text{ punct de continuitate pentru } f.$$

(iii) *Folosind legătura dintre probabilitățile de tipul* $\mathbb{P}(X = a)$ *și funcția de repartiție deducem că*

$$\mathbb{P}(X = a) = 0, \quad \textit{pentru orice } a \in \mathbb{R}. \tag{III.1.2}$$

(iv) *Folosind legătura dintre probabilitățile de tipul* $\mathbb{P}(a < X \leq b)$ *și funcția de repartiție deducem că, pentru orice* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$,

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,dt &= \mathbb{P}(a < X \leq b) \\ &= \mathbb{P}(a < X < b) \\ &= \mathbb{P}(a \leq X < b) \\ &= \mathbb{P}(a \leq X \leq b) \end{aligned} \tag{III.1.3}$$

Remarca III.1.14 Mai general, dacă v.a. X admite densitatea f_X, atunci (vezi și formula de legătură (III.1.26), din cazul bidimensional)

$$\mathbb{P}(X \in \mathscr{D}) = \int_{\mathscr{D}} f_X(x)\,dx\,, \tag{III.1.4}$$

pentru orice $\mathscr{D} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. ◇

Remarca III.1.15 **Semnificația geometrică a densității de repartiție** este următoarea: f_X este acea funcție negativă și integrabilă cu proprietatea că aria domeniului $\mathscr{D}$ din plan cuprins între dreptele $x = a$, $x = b$, axa Ox și curba $y = f(x)$ este egală, pe de o parte, cu integrala $\int_a^b f_X(t)\,dt$ iar, pe de altă parte, este egală cu probabilitatea ca X să ia valori între a și b, i.e.

$$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b f_X(t)\,dt = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)\,.$$

◇

Exemplul III.1.16 Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$ este o densitate de repartiție.

Într-adevăr, $f \geq 0$ pe $\mathbb{R}$ și

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x}\Big|_{x=1}^{x=\infty} = 1.$$

◇

Definiția III.1.17 *În cazul unei v.a.* X *oarecare (nu neapărat continuă)* **cuantila** *corespunzătoare pragului de probabilitate* $p \in (0,1)$ *(sau cuantila de ordin p) este valoarea* $x_p \in \mathbb{R}$ *dată de*

$$\mathbb{P}(X < x_p) \leq p \leq \mathbb{P}(X \leq x_p) \tag{III.1.5}$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}(X \leq x_p) \geq p \quad \textit{și} \quad \mathbb{P}(X \geq x_p) \geq 1 - p. \tag{III.1.6}$$

Remarca III.1.18 În particular, dacă X este o v.a. continuă, obținem că, dacă x_p este cuantilă, atunci cele două condiții din definiția (III.1.5) a cuantilei se reduc la

$$\mathbb{P}\left(X \leq x_p\right) = p.$$

Apoi obținem că

$$\mathbb{P}\left(x_p \leq X \leq x_{2p}\right) = F_X\left(x_{2p}\right) - F_X\left(x_p\right) = 2p - p = p$$

ș.a.m.d..

Deci, în cazul unei v.a. continue, putem vedea cuantilele și ca pe acele puncte care împart valorile v.a. X în intervale de probabilități egale.

În practică vom lua $p = \frac{k}{q}$, unde $q \in \mathbb{N}^*$ se va numi ordinul cuantilei iar valorile $k = \overline{1, q-1}$ vor defini cuantilele de ordin q.

Avem **o singură cuantilă de ordin** 2 (luăm $p = \frac{k}{2}$, unde $k = 1$), numită **mediană**, care este valoarea $x_{1/2}$ astfel încât

$$\mathbb{P}\left(X \leq x_{1/2}\right) = \mathbb{P}\left(X \geq x_{1/2}\right) = 1/2$$

sau, echivalent,

$$F_X\left(x_{1/2}\right) = 1/2,$$

adică mediana $x_{1/2}$ împarte volumul valorilor lui X în două părți egale.

Avem **trei cuantilele de ordin** 4 (luăm $p = \frac{k}{4}$, unde $k = \overline{1,3}$), numite **cuartilele**, care sunt valorile $x_{1/4}, x_{2/4}, x_{3/4}$ astfel încât

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \leq x_{1/4}\right) &= \mathbb{P}\left(x_{1/4} \leq X \leq x_{1/2}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(x_{1/2} \leq X \leq x_{3/4}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(X \geq x_{3/4}\right)\\ &= 1/4\end{aligned}$$

sau, echivalent,

$$F_X\left(x_{1/4}\right) = 1/4, \quad F_X\left(x_{1/2}\right) = 1/2, \quad F_X\left(x_{3/4}\right) = 3/4,$$

adică cuartilele $x_{1/4}, x_{2/4}, x_{3/4}$ împart volumul valorilor lui X în patru părți egale.

Avem 99 cuantile de ordin 100 (luăm $p = \frac{k}{100}$, unde $k = \overline{1,99}$) numite **percentile** (sau **centile**). De exemplu, $x_{20/100}$ este valoarea sub care sunt găsite 20% din valorile v.a. X. $\diamond$

Următorul rezultat ne arată cum se schimbă densitatea de repartiție la schimbarea v.a.

Teorema III.1.19 *Fie X o .v.a. continuă cu densitatea de repartiție f_X . Fie $h : \mathscr{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție astfel încât:*

$$(i) \quad h \text{ este derivabilă pe } \mathscr{D},$$

$$(ii) \quad h \text{ este bijectivă},$$

$$(iii) \quad \mathrm{Supp}(f_X) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : f_X(x) \neq 0\} \subseteq \mathscr{D}.$$

Atunci densitatea noii v.a. $Y = h(X)$ este dată de

$$f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right) |(h^{-1})'(y)| \mathbb{1}_{h(\mathscr{D})}(y), \tag{III.1.7}$$

în orice punct y astfel încât f_X este continuă în $h^{-1}(y)$.

Remarca III.1.20 Demonstrația se bazează pe schimbarea de variabilă în integrală. Deoarece h este injectivă și continuă obținem că h este monotonă. În cazul în care h^{-1} este crescătoare (deci $\left(h^{-1}\right)'(z) > 0$, pentru orice z) avem

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(h(X) \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq h^{-1}(y)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{h^{-1}(y)} f_X(x)\, dx = \int_{h(-\infty)}^{y} f_X\left(h^{-1}(z)\right) d\left(h^{-1}(z)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{y} f_X\left(h^{-1}(z)\right) (h^{-1})'(z)\, dz = \int_{-\infty}^{y} f_X\left(h^{-1}(z)\right) |(h^{-1})'(z)| dz. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(z)\, dz,$$

deci obținem concluzia (III.1.7).

Cazul h^{-1} descrescătoare se tratează similar.

Evident, în cazul în care h^{-1} este crescătoare, putem scrie și direct:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(h(X) \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq h^{-1}(y)\right) = F_X\left(h^{-1}(y)\right),$$

deci

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \left[F_X\left(h^{-1}(y)\right)\right]' = F_X'\left(h^{-1}(y)\right) \cdot \left(h^{-1}\right)'(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right) \cdot \left(h^{-1}\right)'(y).$$

◇

Corolarul III.1.21 *Fie X o .v.a. continuă cu densitatea de repartiție f_X . Fie $a \neq 0$ și*

$$Y = aX + b \quad \textit{sau, echivalent,} \quad X = \frac{Y - b}{a}.$$

Atunci densitatea v.a. Y este

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big), \quad \textit{pentru orice } y \in \mathbb{R}.$$

III.1.2 Caracteristici numerice

În cazul discret media unei v.a. este suma unei serii numerice, dar în cazul continuu media este dată de o integrală.

Definiţia III.1.22 *În caz că următoarea integrală este absolut convergentă, aceasta se va numi* **media v.a.** *continue X cu densitatea de repartiție f_X :*

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \int_{\mathbb{R}} x f_X\left(x\right) dx \tag{III.1.8}$$

(în caz că integrala este absolut convergentă vom spune că v.a. **admite medie** *sau că* **este integrabilă***).*

Remarca III.1.23 De fapt, dacă $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ este un spațiu de probabilitate și X este o v.a. definită pe acest spațiu, atunci

media unei v.a. (indiferent de tipul ei) este definită de următoarea integrală Lebesgue (în caz că aceasta există) pe Ω în raport cu măsura $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{E}\left(X\right) \overset{\text{def}}{=} \int_{\Omega} X\left(\omega\right) \, \mathbb{P}\left(d\omega\right). \tag{III.1.9}$$

Conform definiției integralei Lebesgue, se deduce că X este integrabilă Lebesgue (adică integrala există și este finită) dacă și numai dacă $|X|$ este integrabilă Lebesgue.

Aplicând o teoremă de schimbare de variabilă în integrala Lebesgue anterioară obținem că media se poate exprima cu ajutorul integralei Lebesgue pe $\mathbb{R}$ în raport cu măsura $\mathbb{P}_X$ (legea asociată v.a. X):

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \int_{\mathbb{R}} x \, \mathbb{P}_X\left(dx\right) \tag{III.1.10}$$

Având în vedere că legea unei v.a. este unic determinată de funcția de repartiție F_X, integrala precedentă se poate exprima și cu ajutorul integralei Riemann-Stieltjes pe $\mathbb{R}$ în raport cu funcția crescătoare F_X (care este, prin urmare, cu variație mărginită) asociată v.a. X :

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \int_{\mathbb{R}} x \, dF_X\left(x\right). \tag{III.1.11}$$

Menționăm că cele trei exprimări ale mediei, de mai sus, sunt valabile pentru orice tip de v.a..

În cazul în care v.a. X admite densitatea f, integralele de mai sus coincid cu integrala Riemann dată de (III.1.8) deoarece avem egalitățile, scrise formal,

$$\mathbb{P}_X(dx) = f_X(x)\, dx = dF_X(x).$$

$\diamond$

Media unei funcţii aplicată unei v.a. poate fi calculată folosind următorul rezultat.

Teorema III.1.24 (Formula de transfer) *Fie X o .v.a. continuă cu densitatea de repartiţie f_X . Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie măsurabilă. Atunci $h(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ este şi ea o v.a. şi această v.a. admite medie dacă şi numai dacă*

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)|\ f_X(x)\,dx < \infty.$$

În cazul în care $h(X)$ admite medie, aceasta este dată de:

$$\boxed{\mathbb{E}(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\ f_X(x)\,dx\,.} \tag{III.1.12}$$

Remarca III.1.25 În cazul particular în care luăm $h(x) = \mathbb{1}_B(x)$, unde $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ este arbitrar fixată, formula (III.1.12) devine

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x)\ f_X(x)\,dx = \int_B f_X(x)\ dx.$$

Pe de altă parte, folosind definiţia mediei, obţinem

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X)) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(X)\ d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{X\in B}\,d\mathbb{P} = \int_{X\in B} d\mathbb{P} = \mathbb{P}(X \in B)\,.$$

Astfel obţinem din nou formula (III.1.4) din cazul v.a. de tip continuu:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)\ dx.$$

$\diamond$

Definiţia III.1.26 *Se numeşte* **moment de ordin** $r > 0$ *al v.a. X, media v.a. X^r (dacă este bine definită). Vom nota*

$$\boxed{\mu_r \overset{\text{not}}{=} \mathbb{E}(X^r) = \int_{\mathbb{R}} x^r f(x)\,dx\,.}$$

Deci momentul μ_1 este chiar media v.a. X.

Definiţia III.1.27 *Se numeşte* **moment central de ordin** $r > 0$ *al v.a. X, media v.a. $(X - \mu_1)^r$ (dacă este bine definită). Vom nota*

$$\boxed{\nu_r \overset{\text{not}}{=} \mathbb{E}\big[\,(X - \mu_1)^r\,\big] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_1)^r f(x)\,dx\,.}$$

Definiţia III.1.28 *Se numeşte* **moment absolut de ordin** $r > 0$ *al v.a. X, media v.a. $|X|^r$, deci*

$$\boxed{\mathbb{E}(|X|^r) = \int_{\mathbb{R}} |x|^r f(x)\,dx\,.}$$

Definiţia III.1.29 *Se numeşte* **dispersia** *(sau* **varianţa***) v.a. X, notată cu $\mathrm{D}^2(X)$ (sau cu $\mathrm{Var}(X)$), momentul central de ordin 2 al v.a. X, i.e.*

$$\boxed{\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}(X - \mu_1)^2\,.}$$

Deci, în cazul unei v.a. continue X care admite densitatea f_X ,

$$\boxed{\mathrm{D}^2(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)\,dx\,.}$$

Remarca III.1.30 Având în vedere formula de transfer (III.1.12) obținem **formula de calcul a dispersiei**:

$$\boxed{\mathrm{D}^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 .}$$

◇

Definiţia III.1.31 *Cantitatea definită de*

$$\boxed{\mathrm{D}(X) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sqrt{\mathrm{D}^2(X)}}$$

se numește **deviația standard** *(sau* **abaterea standard***).*

Remarca III.1.32 Evident, $\nu_1 = \mathbb{E}(X - \mu_1) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mu_1) = 0$, iar momentul central ν_2 este chiar dispersia v.a. X. ◇

Definiţia III.1.33 *Se numește* **covarianța** *v.a. X și Y, notată $\operatorname{Cov}(X,Y)$, media*[3]

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X,Y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))\right] .} \tag{III.1.13}$$

Remarca III.1.34 Dacă facem calculele, obținem **formula de calcul a covarianței**:

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) .} \tag{III.1.14}$$

◇

Remarca III.1.35 Evident, covarianța dintre v.a. X cu ea însăși este chiar dispersia, i.e.

$$\boxed{\mathrm{D}^2(X) = \operatorname{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{X}) .}$$

◇

Definiţia III.1.36 *Dacă* $\mathrm{D}^2(X) > 0$ *și* $\mathrm{D}^2(Y) > 0$, *atunci*

$$\boxed{\rho(X,Y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(X)\cdot \mathrm{D}^2(Y)}}} \tag{III.1.15}$$

se numește **corelația** *(sau* **coeficientul de corelație** *al) v.a. X și Y.*

Remarca III.1.37 Au loc și în cazul v.a. continue rezultatele stabilite in cazul v.a. discrete precum și inegalitățile lui Markov și Cebâșev. ◇

Exemplul III.1.38 Fie X o v.a. cu densitatea de repartiție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Media ei este dată de

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x\Big(x + \frac{1}{2}\Big)dx = \Big(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\Big)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{7}{12} .$$

◇

[3] Pentru calculul concret, vezi formula (III.1.25).

Exercițiul III.1.39 *Fie X o v.a. (discretă sau continuă). Să se arate că*

$$\mathbb{E}\big[\,(X-a)^2\,\big] = \mathrm{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X)-a)^2, \quad \textit{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

Apoi să se determine minimul funcției $\mathbb{R} \ni a \mapsto \mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big]$.

Identitatea este ușor de obținut:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\,(X-a)^2\,\big] &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2a\mathbb{E}(X) + a^2 \\ &= \mathrm{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X))^2 - 2a\mathbb{E}(X) + a^2.\end{aligned}$$

În plus, $\inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[\,(X-a)^2\,\big] = \mathrm{D}^2(X) + \inf_{a\in\mathbb{R}} (\mathbb{E}(X)-a)^2 = \mathrm{D}^2(X)$ *iar minimul se realizează pentru* $a = \mathbb{E}(X)$.

Prin urmare,

***dispersia** $\mathrm{D}^2(X)$ **este valoarea minimă a funcției** $f(a) = \mathbb{E}\big[\,(X-a)^2\,\big]$*

***și aceasta se realizează pentru** $a = \mathbb{E}(X)$.*

Astfel am demonstrat că

$$\mathbb{E}\big[\,(X-a)^2\,\big] \geq \mathbb{E}\big[\,(X-\mathbb{E}(X))^2\,\big] \overset{\text{def}}{=\!=} \mathrm{D}^2(X), \quad \textit{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

*Prin urmare **media** $\mathbb{E}(X)$ **este constanta care aproximează cel mai bine v.a.** X **în spațiul** $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ care este spațiul funcțiilor măsurabile $X : \Omega \to \mathbb{R}$, astfel încât*

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_\Omega |X(\omega)|^2\, \mathbb{P}(d\omega) < \infty.$$

III.1.3 Exemple de v.a. continue

III.1.4 Distribuția uniformă

O v.a. X spunem că urmează distribuția uniformă pe intervalul $[a,b]$, și scriem $X \sim \mathscr{U}[a,b]$, dacă are densitatea de repartiție dată de

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se verifică imediat că $f \geq 0$ și că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = \frac{1}{b-a}\, x\Big|_{x=a}^{x=b} = 1.$$

Funcția de repartiție corespunzătoare este $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = 0$, dacă $x \leq a$.

Dacă $a < x \leq b$, atunci

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt + \int_{a}^{x} f(t)\, dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\, dt = \frac{x-a}{b-a}$$

iar dacă $x > b$, atunci

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt + \int_{a}^{b} f(t)\, dt + \int_{b}^{x} f(t)\, dt = \int_{a}^{b} f(t)\, dt = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1.$$

Deci

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{dacă } a < x \leq b, \\ 1, & \text{dacă } x > b. \end{cases} \tag{III.1.16}$$

Graficele funcțiilor f și F se pot desena cu ușurință.

Propoziţia III.1.40 *Media și dispersia v.a. distribuite uniform $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ sunt date de*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{și} \qquad \mathrm{D}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, conform definiției

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx,$$

deci

$$\mathbb{E}(X) = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{a+b}{2}.$$

Pe de altă parte,

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx = \int_{a}^{b} x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

deci $\mathrm{D}^2(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$. ∎

Exemplul III.1.41 Fie $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Atunci

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 0, \\ x & \text{dacă } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{dacă } x > 1. \end{cases} \tag{III.1.17}$$

Deci probabilitatea $\mathbb{P}(1/4 \leq X \leq 3/4) = F(3/4) - F(1/4) = 1/2$. ◇

Exerciţiul III.1.42 *Fie o v.a. $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că*

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \lfloor nX \rfloor + 1 \sim \mathcal{DU}(n),$$

unde $\lfloor nX \rfloor$ este partea întreagă a v.a. nX, i.e. cel mai mare întreg aleator mai mic sau egal decât v.a. nX.

Deoarece $X \in (0,1)$ *obținem că* $nX \in (0,n)$ *, deci* $\lfloor nX \rfloor \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ *adică mulțimea valorilor v.a.* U *este* $\{1,2,\ldots,n\}$ *.*

Pentru orice $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ *,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U=k) &= \mathbb{P}(\lfloor nX \rfloor = k-1) = \mathbb{P}(k-1 \le nX < k) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{k-1}{n} \le X < \frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} dx = \frac{1}{n}\,,\end{aligned}$$

prin urmare $U : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1/n & 1/n & \ldots & 1/n \end{pmatrix}$ *, adică* $U \sim \mathscr{DU}(n)$ *.*

Propoziţia III.1.43 *V.a.* $X \sim \mathscr{U}[a,b]$ *dacă și numai dacă*[4] *v.a.*

$$Y = \frac{X-a}{b-a} \sim \mathscr{U}[0,1]\,.$$

Demonstraţie. Avem

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}\Big(\frac{X-a}{b-a} \le y\Big) = \mathbb{P}(X \le (b-a)\,y + a) = F_X((b-a)\,y+a)\,,$$

deci

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= (F_Y(y))' = (F_X((b-a)\,y+a))' = (b-a)\ f_X((b-a)\,y+a) \\ &= (b-a)\cdot\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}((b-a)\,y+a) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,,\end{aligned}$$

deoarece

$$a \le (b-a)\,y + a \le b \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le y \le 1,$$

adică

$$\mathbb{1}_{[a,b]}((b-a)\,y+a) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,.$$

Prin urmare, Y corespunde unei v.a. distribuite uniform pe $[0,1]$. ■

Remarca III.1.44 Similar se arată că v.a. $X \sim \mathscr{U}[0,1]$ dacă și numai dacă v.a.

$$Y = (b-a)\,X + a \sim \mathscr{U}[a,b]\,.$$

◇

Propoziţia III.1.45 *Fie* X *o v.a. continuă cu funcția de repartiție* F_X *, astfel încât* F_X *este strict crescătoare, și v.a.*

$$Y \stackrel{\text{def}}{=\!=} F_X(X)\,.$$

Atunci v.a. Y *este distribuită uniform pe* $[0,1]$ *.*

[4] Vezi și demonstrația alternativă dată de formula (III.1.30), aplicată în Exemplul III.1.102.

Demonstraţie. Să observăm, mai întâi, că $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, deci

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(F_X(X) \le y) = 0, \quad \text{dacă } y < 0$$

și

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(F_X(X) \le y) = 1, \quad \text{dacă } y > 1.$$

Avem următorul calculul elementar:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(F_X(X) \le y) = \mathbb{P}\left(X \le F_X^{-1}(y)\right) = F_X\left(F_X^{-1}(y)\right) = y.$$

■

III.1.5 Distribuția exponențială

O v.a. X spunem că urmează distribuția exponențială de parametru $\lambda > 0$, și scriem $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, dacă are densitatea de repartiție dată de

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Evident, $f(x) \ge 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left.\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right|_{x=0}^{x=+\infty} = 1 - e^{-\infty} = 1.$$

Funcția de repartiție corespunzătoare este $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$, dacă $x \le 0$ și, dacă $x > 0$, atunci

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left.\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right|_{x=0}^{t=x},$$

deci (vezi și relațiile din cazul distribuției geometrice), pentru orice $x > 0$ avem

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \text{sau, echivalent,} \qquad \mathbb{P}(X \ge x) = e^{-\lambda x}. \tag{III.1.18}$$

Să menționăm că funcția definită de

$$r_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X > x)$$

este numită **funcția de supraviețuire** sau **funcția de fiabilitate** și, datorită formei simple din cazul distribuției exponențiale, este preferabil să lucrăm cu ea.

Remarca III.1.46 Ca și distribuția geometrică, din cazul discret, și distribuția exponențială este **„fără memorie"**. Mai mult chiar, distribuția exponențială este singura distribuție continuă „fără memorie".

Astfel are loc

$$\mathbb{P}(X \ge s + t | X \ge s) = \mathbb{P}(X \ge t), \quad \text{pentru orice } s, t > 0$$

◇

Propoziţia III.1.47 *Media și dispersia v.a. distribuite exponențial* $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ *sunt date de*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{și} \qquad \text{D}^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{III.1.19}$$

Remarca III.1.48 Deci, în cazul unei v.a. de tip $\text{Exp}(\lambda)$, parametrul ei este chiar inversul mediei v.a.. $\diamond$

Demonstraţie. Conform definiției, integrând prin părți, obținem

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lambda x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \lambda \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx = -\frac{x}{e^{\lambda x}}\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \lambda \int_0^\infty 2x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx \\ &= -\frac{x^2}{e^{\lambda x}}\Big|_{x=0}^{x=\infty} + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = 2\frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

Deci $\text{D}^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$. ■

Avem următorul rezultat de legătură dintre distribuția exponențială și distribuția geometrică.

Exerciţiul III.1.49 *Fie o v.a.* $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. *Să se calculeze funcția de repartiție* F_U, *unde* $U = \lfloor X \rfloor$, *adică partea întreagă a v.a.* X, *i.e. cel mai mare întreg aleator mai mic sau egal decât v.a.* X.

Să notăm $q = e^{-\lambda}$ *și* $p = 1 - q$.

Se obține că

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U > n) &= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor > n) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor \geq n+1) \\ &= \mathbb{P}(X \geq n+1) = e^{-\lambda(n+1)} = q^{n+1},\end{aligned}$$

deci

$$F_U(u) = 1 - q^{n+1}.$$

Astfel, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U = n) &= \mathbb{P}(U > n-1) - \mathbb{P}(U > n) \\ &= q^n - q^{n+1} = q^n(1-q) = pq^n,\end{aligned}$$

adică[5] $U \sim \mathscr{G}(p)$ *(varianta care numără eșecurile).*

[5] Aceasta este o metodă de a genera v.a. distribuite geometric folosind v.a. distribuite exponențial.

Putem raționa și astfel:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U=n)=\mathbb{P}(\lfloor X\rfloor=n)=\mathbb{P}(n\leq X<n+1)&=\int_n^{n+1}\lambda e^{-\lambda x}\,dx\\&=\frac{e^{-\lambda x}}{-1}\Big|_{x=n}^{x=n+1}=e^{-\lambda n}-e^{-\lambda(n+1)}=\left(1-e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^n\\&=p\,q^n.\end{aligned}$$

*Astfel putem spune că **distribuția geometrică este versiunea discretă a distribuției exponențiale**.*

III.1.6 Distribuția normală

O v.a. X spunem că urmează distribuția normală (sau distribuția Gaussiană) de parametri $\mu\in\mathbb{R}$ și $\sigma^2>0$, și scriem $X\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$, dacă are densitatea de repartiție dată de

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Uneori se scrie sub forma $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, adică se consideră că parametrii sunt $\mu\in\mathbb{R}$ și $\sigma>0$.

III.1.6.1 Densitatea de repartiție

Propoziţia III.1.50 *Funcția f este o densitate de repartiție.*

Demonstraţie. Evident, $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Dacă facem schimbarea de variabilă $\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}=t$ sau echivalent $x=\sqrt{2}\,\sigma\,t+\mu$, atunci $dx=\sqrt{2}\,\sigma\,dt$ și

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\sqrt{2}\,\sigma\,dt\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=1,\end{aligned}$$

deoarece avem următoarea valoare a **integralei Gauss** (sau Euler-Poisson)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}\,.}\tag{III.1.20}$$

Să demonstrăm (III.1.20).

Are loc $e^y>1+y$, pentru orice $y>0$, deci

$$e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}\,,\quad\text{pentru orice } x\in\mathbb{R},$$

dar $\int_0^\infty\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(\infty)-\arctan(0)=\pi/2$ adică este convergentă. Deci integrala improprie $I_1\stackrel{\text{def}}{=}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ este și ea convergentă.

Pe de altă parte,

$$(I_1)^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \iint_{x,y\geq 0} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

Pentru calculul acestei integrale duble se va folosi trecerea la coordonate polare $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ cu determinantul Jacobian $J = \rho$. Obținem

$$(I_1)^2 = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^\infty e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\rho^2}}{-2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=\infty}\,d\theta = \frac{\pi}{4}\,.$$

Deci $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2I_1 = \sqrt{\pi}.$ ■

Remarca III.1.51 Referitor la graficul densității de repartiție f :

(i) Graficul este cunoscut sub numele de **clopotul lui Gauss** și este simetric în raport cu dreapta $x = \mu$ (adică X este v.a. simetrică în raport cu μ)

(ii) Parametrul σ^2 dă gradul de turtire al graficului (sau gradul de împrăștiere al valorilor lui X față de valoarea medie μ).

(iii) Graficul are axa Ox drept asimptotă orizontală la $\pm\infty$ deoarece avem $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

(iv) Graficul admite un maxim în punctul $M\Big(m, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\Big)$ și două puncte de inflexiune date de $\mu - \sigma$ și $\mu + \sigma$.

Într-adevăr, derivata

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{x-\mu}{-\sigma^2} = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}\,f(x)\,.$$

Punctele de extrem sunt date de

$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \mu.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}\left(e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + (x-\mu)\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{x-\mu}{-\sigma^2}\right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{\sigma^2-(x-\mu)^2}{\sigma^2} = -\frac{\sigma^2-(x-\mu)^2}{\sigma^4}\,f(x)\,. \end{aligned}$$

Deci punctele de inflexiune sunt date de

$$f''(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \mu\pm\sigma.$$

◇

Remarca III.1.52 Luând $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$ se obțin v.a. distribuite de tip $\mathcal{N}(0,1)$, numite și v.a. distribuite normal standard, cu densitatea

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,,\quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Graficul densității de repartiție este simetric în raport cu axa Oy (adică densitatea f este funcție pară și, prin urmare, X este v.a. simetrică în raport cu 0) și admite un maxim în punctul $M\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

De asemenea, $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \simeq 0.3989$ și $f(3.99) = f(-3.99) \simeq 10^{-4} \simeq 0$. Deci valorile $f(x)$ pentru $|x| > 4$ sunt neglijabile, adică curba se apropie foarte repede de axa absciselor Ox când x crește. $\diamond$

Propoziția III.1.53 *Media și dispersia v.a. distribuite normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sunt date de*

$$\mathbb{E}(X) = \mu \qquad \text{și} \qquad \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 .$$

Remarca III.1.54 Deci, în cazul unei v.a. de tip $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, parametrii ei reprezintă chiar media și dispersia v.a.. $\diamond$

Demonstrație. Utilizăm (III.1.20) și obținem, luând $x = \sqrt{2}\,\sigma\, t + \mu$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\,\sigma\, t + \mu) e^{-t^2} \sqrt{2}\,\sigma\, dt \\
&= \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2}\, dt + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \\
&= \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{-2} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 0 + \mu
\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\,\sigma\, t + \mu)^2 e^{-t^2} \sqrt{2}\,\sigma\, dt \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt + \frac{2\sqrt{2}\mu\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2}\, dt + \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\, t\, \frac{e^{-t^2}}{-2} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{-2}\, dt + 0 + \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \\
&= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{t}{e^{t^2}} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2.
\end{aligned}$$

Deci $\mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$. ■

III.1.6.2 Funcția de repartiție

Funcția de repartițieFuncția de repartiție asociată v.a. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ se notează cu Φ, i.e.

$$\boxed{\Phi(x) \overset{\text{not}}{=} F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\,, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},}$$

pentru care există tabele cu valori ale ei.

Pe de altă parte, funcția de repartiție $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} f_X(t)\, dt$ reprezintă aria domeniului din plan cuprins între $x = z$, axa Ox și curba $y = f_X(x)$.

Remarca III.1.55 Evident, dacă folosim interpretarea cu ajutorul ariei funcției Φ, observăm că

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

și, folosind simetria graficului funcției de densitate f_X, obținem că

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad \text{pentru orice } x > 0,$$

prin urmare este suficient să cunoaștem doar valorile funcției Φ în argumente strict pozitive. $\diamond$

Remarca III.1.56 Avem că $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$. Dacă folosim tabelele, citim următoarele valori:

$$\Phi(1.00) \simeq 0.841345, \quad \Phi(2.00) \simeq 0.977250, \quad \Phi(3.00) \simeq 0.998650,$$
$$\Phi(3.80) \simeq 0.999928, \quad \Phi(3.90) \simeq 0.999952, \quad \Phi(3.98) \simeq 0.999966.$$

$\diamond$

Exemplul III.1.57 Fie v.a. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Citim din tabele valoarea $\Phi(1.68) \simeq 0.954$, deci probabilitatea ca X să ia valori mai mici decât 1.68 reprezintă aproximativ 95% din întreaga arie mărginită de densitatea de repartiție și de axa Ox. $\diamond$

Propoziţia III.1.58 *Fie $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Are loc următoarea legătură între funcția de repartiție F_X și funcția de repartiție Φ pentru care există tabele de valori:*

$$F(x) = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big), \quad \textit{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{III.1.21}$$

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Acum se va face schimbarea de variabilă

$$\frac{t-\mu}{\sigma} = s \quad \Leftrightarrow \quad t = \sigma s + \mu \quad \Rightarrow \quad dt = \sigma\, ds$$

deci

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}}\, \sigma\, ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big).$$

$\blacksquare$

Remarca III.1.59 Deoarece $\Phi(0) = 1/2$ obținem că

$$F(\mu) = \frac{1}{2},$$

deci $\mu = x_{1/2}$ este mediana distribuției, deoarece împarte mulțimea valorilor în două părți egale, i.e.

$$\mathbb{P}(X \le \mu) = \mathbb{P}\big(X \le x_{1/2}\big) = 1/2$$

iar

$$\mathbb{P}(X > \mu) = 1 - \mathbb{P}\big(X \le x_{1/2}\big) = 1/2.$$

$\diamond$

Propoziţia III.1.60 *Fie $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Atunci, pentru orice $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, $\epsilon > 0$ și $k > 0$,*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big), \\
(ii) \quad & \mathbb{P}(|X-\mu| \leq \epsilon) = F(\mu+\epsilon) - F(\mu-\epsilon) \\
& \qquad = \Phi\Big(\frac{\epsilon}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(-\frac{\epsilon}{\sigma}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{\epsilon}{\sigma}\Big) - 1, \qquad \text{(III.1.22)} \\
(iii) \quad & \mathbb{P}(|X-\mu| \leq k\sigma) = 2\Phi(k) - 1, \\
(iv) \quad & \mathbb{P}(|X-\mu| > k\sigma) = 2(1-\Phi(k)).
\end{aligned}$$

Exemplul III.1.61 Fie v.a. $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Să calculăm $\mathbb{P}(|X| \leq \sigma)$.

Luând $k = 1$ în (III.1.22) obținem (vezi și Remarca III.1.56):

$$\mathbb{P}(|X| \leq \sigma) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.841345 - 1 = 0.6826.$$

Deci probabilitatea ca X să ia valori în intervalul $(-\sigma, \sigma)$ reprezintă aproximativ 68% din aria mărginită de densitatea de repartiție și de axa Ox. ◇

Remarca III.1.62 Fie $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Să calculăm

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \leq \sigma), \quad \mathbb{P}(|X-\mu| \leq 2\sigma), \quad \mathbb{P}(|X-\mu| \leq 2\sigma).$$

Luând $k = 3$ în (III.1.22) obținem (vezi și Remarca III.1.56):

$$\mathbb{P}(|X-\mu| > 3\sigma) = 2(1-\Phi(3)) \simeq 2 \cdot 0.00135 = 0.0027.$$

Având în vedere că valoarea 0.0027 poate fi neglijată, obținem că o v.a. repartizată normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ia valori semnificative în intervalul $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ (numită și *„regula celor* 3σ"), i.e.

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \leq 3\sigma) = \mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 99.73\%.$$

Similar se va obține

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \leq \sigma) = \mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 68.26\%,$$

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \leq 2\sigma) = \mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \simeq 95.45\%.$$

◇

Remarca III.1.63 Fie X o v.a oarecare (discretă sau continuă) cu media μ și dispersia σ^2. Putem obține o estimare a probabilității $\mathbb{P}(|X-\mu| < 3\sigma)$ și cu ajutorul inegalității lui Cebâșev:

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{3^2} \simeq 0.1111$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}(|X-m| < 3\sigma) \geq \frac{8}{9} \simeq 0.8889.$$

Observăm că, în cazul particular al unei v.a. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, marginea superioară obținută este mult mai mare decât valoarea exactă a probabilității.

$\diamond$

Propoziţia III.1.64 *Fie* $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. *Atunci, pentru orice* $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$,

(i) *aria regiunii cuprinsă între* $x = -a$ *și* $x = a$, *unde* $a > 0$, *este*

$$\mathscr{A} = \int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\, dt = 2\Phi(a) - 1,$$

iar, pe de altă parte, $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = \mathbb{P}(-a \leq X \leq a)$, *deci*

$$\mathscr{A} = \mathbb{P}(|X| \leq a) = 2\Phi(a) - 1, \quad \textit{pentru orice } a > 0;$$

(ii) *aria regiunii cuprinsă între* $x = -\infty, x = -a$ *și, respectiv,* $x = a, x = +\infty$, *unde* $a > 0$, *este*

$$\mathscr{A} = \int_{-\infty}^{-a} f(t)\, dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt - \int_{-a}^{a} f(t)\, dt$$
$$= 2(1 - \Phi(a)),$$

iar, pe de altă parte,

$$\int_{-\infty}^{-a} f(t)\, dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)\, dt = \mathbb{P}(\{X \leq -a\} \cup \{X \geq a\}) = \mathbb{P}(|X| \geq a),$$

deci

$$\mathscr{A} = \mathbb{P}(|X| \geq a) = 2(1 - \Phi(a)), \quad \textit{pentru orice } a > 0;$$

(iii) *aria regiunii cuprinsă între* $x = a$ *și* $x = b$ *este*

$$\mathscr{A} = \int_{a}^{b} f(t)\, dt = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Pentru demonstrarea următoarelor rezultate vezi și Corolarul III.1.21.

Propoziţia III.1.65 *Are loc*[6]

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Remarca III.1.66 Dacă X este o v.a., atunci spunem că noua v.a.

$$\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(X)}} \quad \text{se numește } \textbf{standardizarea} \text{ v.a. } X.$$

De exemplu, dacă $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, atunci v.a. $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(X)}}$ este chiar standardizarea v.a. X. $\diamond$

[6] Vezi și demonstrația alternativă dată de formula (III.1.30).

Demonstraţie. Să notăm cu $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Avem

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} \le y\Big) = \mathbb{P}(X \le \sigma y + \mu) = F_X(\sigma y + \mu).$$

Deci

$$f_Y(y) = (F_Y(y))' = (F_X(\sigma y + \mu))' = \sigma\, f_X(\sigma y + \mu) = \sigma\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(\sigma y)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}},$$

adică Y corespunde unei v.a. distribuite normal standard. ■

Remarca III.1.67 Similar se arată că

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}\big(\mu, \sigma^2\big).$$

◇

Propoziţia III.1.68 *Are loc:*

$$X \sim \mathcal{N}\big(\mu, \sigma^2\big) \quad \Leftrightarrow \quad aX + b \sim \mathcal{N}\big(a\mu + b, a^2\sigma^2\big).$$

Demonstraţie. Să notăm cu $Y = aX + b$. Avem

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(aX + b \le y) = \mathbb{P}\Big(X \le \frac{y-b}{a}\Big) = F_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big).$$

Deci

$$\begin{aligned} f_Y(y) = (F_Y(y))' &= \Big(F_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big)\Big)' = \frac{1}{|a|}\, f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big) \\ &= \frac{1}{|a|}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, a^2\sigma^2}}\, e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}}, \end{aligned}$$

adică Y corespunde unei v.a. distribuite normal $\mathcal{N}\big(a\mu + b, a^2\sigma^2\big)$. ■

Demonstrarea următorului rezultat se poate face folosind formula (III.1.31) de calcul a densitatii sumei a doua v.a. sau cu ajutorul funcției caracteristice.

Propoziţia III.1.69 *Suma a două v.a. independente care urmează o distribuție de tip normal este o v.a care urmează o distribuție tot de tip normal. Mai precis,*

$$X_i \sim \mathcal{N}\big(\mu_i, \sigma_i^2\big),\ i = \overline{1,2}, \quad \textit{indep.} \quad \Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}\big(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\big).$$

Remarca III.1.70 Distribuția normală este cazul limită al multor distribuții (în acest sens vezi Teorema Limită Centrală și Teorema lui Moivre-Laplace). Deci pentru valori mari ale lui n putem folosi doar tabele de valori ale distribuției normale. ◇

III.1.7 Vectori aleatori

Definiţia III.1.71 *Fie spaţiul de probabilitate* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. *Funcţia*

$$\mathbf{X} : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$$

se numeşte **variabilă aleatoare** $n-$**dimensională** *sau* **vector aleator** $n-$**dimensional** *dacă este o funcţie măsurabilă.*

Remarca III.1.72 Dacă $n = 1$, vom spune că $\mathbf{X}$ este variabilă aleatoare reală sau, mai simplu, **variabilă aleatoare**. Dacă $n \geq 2$, vom spune că $\mathbf{X}$ este vector aleator $n-$dimensional sau, mai simplu, **vector aleator**. ◇

Remarca III.1.73 Funcţia

$$\mathbf{X} : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)), \quad \text{cu} \quad \mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n),$$

este vector aleator dacă şi numai dacă fiecare componentă $X_i : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ este v.a. reală, cu $i = \overline{1, n}$. ◇

Definiţia III.1.74 *Fie* $\mathbf{X} : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ *un vector aleator dat de* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. *Funcţia*

$$F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, 1],$$

definită prin

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) &= F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n), \quad \textit{pentru } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

se numeşte **funcţia de repartiţie comună** *(sau* **funcţia de distribuţie comună** *sau* **funcţia comună de distribuţie cumulativă***) asociată vectorului aleator* $\mathbf{X}$.

Remarca III.1.75 Putem scrie şi sub forma

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in B) = \mathbb{P}\left(\mathbf{X}^{-1}(B)\right) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(B),$$

unde $B = (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n] \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ iar $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ este legea asociată vectorului aleator $\mathbf{X}$. ◇

Propoziţia III.1.76 *Au loc următoarele proprietăţi ale funcţiei de repartiţie* $F_{\mathbf{X}}$:

(i) *Funcţia* $F_{\mathbf{X}}$ *este monoton nedescrescătoare (i.e. crescătoare dar nu neapărat strict crescătoare) în fiecare argument al ei.*

(ii) *Funcţia* $F_{\mathbf{X}}$ *este continuă la dreapta în fiecare argument al ei.*

(iii) *Dacă* $i = \overline{1, n}$, *atunci*

$$\lim_{x_i \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0, \quad \textit{pentru orice}$$
$$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{x_1 \to +\infty, \ldots, x_n \to +\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = 1.$$

(iv) *Pentru orice* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ *cu* $i = \overline{1, n}$,

$$\mathbb{P}(a_1 < X_1 \leq b_1, \ldots, a_n < X_n \leq b_n)$$
$$= F_{\mathbf{X}}(b_1, \ldots, b_n) - \sum_{i=1}^{n} F_{\mathbf{X}}(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \ldots, b_n)$$
$$+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} F_{\mathbf{X}}(b_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, b_n) - \ldots + (-1)^n F_{\mathbf{X}}(a_1, \ldots, a_n).$$

(v) *În cazul particular* $n = 2$ *punctul* (iv) *devine: pentru orice* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *avem*

$$\mathbb{P}(a < X_1 \leq b, X_2 \leq c) = F_{\mathbf{X}}(b, c) - F_{\mathbf{X}}(a, c),$$
$$\mathbb{P}(X_1 \leq a, b < X_2 \leq c) = F_{\mathbf{X}}(a, c) - F_{\mathbf{X}}(a, b),$$
$$\mathbb{P}(a < X_1 \leq b, c < X_2 \leq d) = F_{\mathbf{X}}(b, d) - F_{\mathbf{X}}(a, d)$$
$$- F_{\mathbf{X}}(b, c) + F_{\mathbf{X}}(a, c).$$

Definiţia III.1.77 *Dacă* $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *este un vector aleator bidimensional iar* $F_{(X,Y)}$ *este funcția de repartiție asociată, atunci **funcțiile marginale de repartiție** sunt date de*

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = F_{(X,Y)}(x, +\infty),$$
$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = F_{(X,Y)}(+\infty, y).$$

Remarca III.1.78 Dacă știm funcția de repartiție a vectorului aleator atunci putem determina și funcția marginală de repartiție a fiecărei componente. Reciproca nu este adevărată: dacă știm funcția marginală de repartiție a fiecărui v.a. componente atunci nu putem obține funcția de repartiție a vectorului aleator în întregime. ◇

Avem următoarea caracterizare a independenței unor v.a..

Propoziţia III.1.79 *Dacă* $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *este un vector aleator, atunci*

$$X, Y \textit{ independente} \quad \Leftrightarrow \quad F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) F_Y(y),$$
$$\textit{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Propoziţia III.1.80 *Dacă* $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *este un vector aleator discret, atunci*

$$X, Y \textit{ independente} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\, \mathbb{P}(Y = y),$$
$$\textit{pentru orice } x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega).$$

Exemplul III.1.81 Se aruncă două zaruri simultan. Fie vectorul aleator bidimensional (X, Y) unde X, Y iau drept valori numărul de puncte apărute la aruncarea primului și respectiv celui de al doilea zar.

Atunci

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \sum\nolimits_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ x_i \leq x}} \sum\nolimits_{\substack{y_i \in Y(\Omega) \\ y_i \leq y}} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_i)$$

De exemplu,

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(3, 2) &= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 2) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 2) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 2) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

◇

În cazul unui vector aleator $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, în caz că există media componentelor, definim **media vectorului aleator X** ca fiind

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}\big((X_1, \ldots, X_n)\big) \overset{\text{def}}{=\!=} \big(\mathbb{E}(X_1), \ldots, \mathbb{E}(X_n)\big).$$

De asemenea, se poate defini covarianța $\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$ a v.a. componente X_i și X_j. Prin urmare introducem următoarea notație.

Remarca III.1.82 Dacă $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator discret, atunci probabilitățile din tabloul lui trebuie să satisfacă restricțiile:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) \geq 0 \quad \text{și} \quad \sum\nolimits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1.$$

◇

Remarca III.1.83 Dacă $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator discret, atunci **tablourile** (sau **distribuțiile**) **marginale** sunt date de:

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum\nolimits_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

și de

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum\nolimits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

◇

Media unei funcții aplicată unui vector aleator discret poate fi calculată folosind următorul rezultat.

Teorema III.1.84 (Formula de transfer) *Fie (X, Y) un vector aleator discret. Fie $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție măsurabilă. Atunci $h(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a. și această v.a. admite medie dacă și numai dacă*

$$\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} |h(x, y)| \, \mathbb{P}(X = x, Y = y) < +\infty.$$

În cazul în care $h(X, Y)$ admite medie, aceasta este dată de:

$$\boxed{\mathbb{E}(h(X, Y)) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} h(x, y) \, \mathbb{P}(X = x, Y = y) \ .}$$

Remarca III.1.85 Prin urmare, dacă $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator discret, atunci covarianța dintre X și Y se calculează folosind formula:

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right] \\ &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} (x - \mathbb{E}(X))(y - \mathbb{E}(Y)) \, \mathbb{P}(X = x, Y = y) \ . \end{aligned} \tag{III.1.23}$$

$\diamond$

Definiţia III.1.86 *Funcția $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o densitate de repartiție dacă:*

(i) *$f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.*

(ii) *f este integrabilă cu $\displaystyle\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n = 1$.*

Definiţia III.1.87 *Să considerăm un vector aleator $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ pentru care există o densitate de repartiție $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ astfel încât, pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n) \, dt_1 \ldots dt_n \, , \tag{III.1.24}$$

unde $F_{\mathbf{X}}$ este funcția de repartiție asociată lui $\mathbf{X}$.

Atunci funcția $f_{\mathbf{X}}$ se numește **densitatea comună de repartiție** *asociată vectorului aleator $\mathbf{X}$ iar vectorul aleator $\mathbf{X}$ se numește* **vectorul aleator de tip continuu**.

Media unei funcții aplicată unui vector aleator discret poate fi calculată folosind următorul rezultat.

Teorema III.1.88 (Formula de transfer) *Fie (X, Y) un vector aleator care admite densitatea $f_{(X,Y)}$. Fie $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție măsurabilă. Atunci $h(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a. și această v.a. admite medie dacă și numai dacă*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |h(x, y)| \, f_{(X,Y)}(x, y) \, dxdy < +\infty.$$

În cazul în care $h(X, Y)$ admite medie, aceasta este dată de:

$$\boxed{\mathbb{E}(h(X, Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \, f_{(X,Y)}(x, y) \, dxdy \, .}$$

Remarca III.1.89 Prin urmare, dacă $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator continuu, atunci covarianța dintre X și Y definită de (III.1.13) se calculează folosind formula:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(X, Y) &= \mathbb{E}\,[(X - \mathbb{E}\,(X))\,(Y - \mathbb{E}\,(Y))] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (x - \mathbb{E}\,(X))\,(y - \mathbb{E}\,(Y))\; f_{(X,Y)}\,(x, y)\; dxdy\,.\end{aligned} \tag{III.1.25}$$

$\diamond$

Propoziţia III.1.90 *Dacă $\mathbf{X} = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un vector aleator care admite densitatea de repartiție $f_{\mathbf{X}}$, atunci $F_{\mathbf{X}}$ admite derivată parțială mixtă de ordinul doi în orice punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ în care $f_{\mathbf{X}}$ este continuă și*

$$f_{\mathbf{X}}\,(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{X}}}{\partial x \partial y}\,(x, y)\,.$$

Remarca III.1.91 Dacă vectorul aleator $\mathbf{X}$ admite densitatea $f_{\mathbf{X}}$, atunci

$$\mathbb{P}\,((X_1, \ldots, X_n) \in B) = \int \cdots \int_B f_{\mathbf{X}}\,(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n\,,$$

pentru orice mulțime $B \in \mathscr{B}\,(\mathbb{R}^n)$. $\diamond$

Remarca III.1.92 De exemplu, dacă vectorul aleator (X, Y) admite densitatea $f_{(X,Y)}$, atunci (vezi și (III.1.4))

$$\mathbb{P}\,((X, Y) \in \mathscr{D}) = \iint_{\mathscr{D}} f_{(X,Y)}\,(x, y)\, dx\, dy\,, \tag{III.1.26}$$

pentru orice domeniu $\mathscr{D} \in \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$. $\diamond$

Exemplul III.1.93 (a) Fie vectorul aleator continuu (X, Y) cu densitatea $f_{(X,Y)}$. Să se arate că

$$\mathbb{P}\,(X = Y) = 0.$$

Într-adevăr, folosind formula (III.1.26) obținem

$$\mathbb{P}\,(X = Y) = \mathbb{P}\,((X, Y) \in \mathscr{D}) = \iint_{\mathscr{D}} f_{(X,Y)}\,(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

unde $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}$, deoarece integrala dublă se calculează pe o mulțime $\mathscr{D}$ de măsură Lebesgue 0.

Putem raționa și astfel: v.a. $X - Y$ este și ea de tip continuu, cu densitatea dată de (III.1.34), deci $\mathbb{P}\,(X - Y = 0) = 0$.

(b) Fie v.a. independente X, Y astfel încât X e de tip continuu iar Y e de tip discret. Să se arate că

$$\mathbb{P}\,(X = Y) = 0.$$

Într-adevăr, folosind independența obținem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=Y) &= \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{i\in I}\{X=x_i, Y=x_i\}\right) = \sum\nolimits_{i\in I}\mathbb{P}(\{X=x_i, Y=x_i\}) \\ &= \sum\nolimits_{i\in I}\mathbb{P}(X=x_i)\cdot\mathbb{P}(Y=x_i) = \sum\nolimits_{i\in I}0p_i = 0.\end{aligned}$$

◇

Definiția III.1.94 *Dacă $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ este un vector aleator bidimensional iar $f_{(X,Y)}$ este densitatea asociată, atunci **densitățile marginale** sunt date de*

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \qquad \text{și} \qquad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx. \tag{III.1.27}$$

Exemplul III.1.95 Funcția

$$f(x,y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)}\,\mathbb{1}_{[a,b]\times[c,d]}(x,y)$$

este o densitate de repartiție. Într-adevăr

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,d]}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\,dxdy = 1.$$

Funcția de repartiție unui vector aleator (X,Y) cu densitatea f este

$$\begin{aligned}F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\,\mathbb{1}_{[a,b]\times[c,d]}(t,s)\,dtds \\ &= \frac{1}{(b-a)(d-c)}(x-a)(y-c), \quad \text{pentru } (x,y)\in[a,b]\times[c,d].\end{aligned}$$

Apoi $F_{(X,Y)}(x,y)=0$, pentru $x<a$ sau $y<c$, și $F_{(X,Y)}(x,y)=1$, pentru $x>b$ sau $y>d$.

Vectorul (X,Y) reprezintă coordonatele unui punct distribuit uniform în dreptunghiul $[a,b]\times[c,d]$ iar $F_{(X,Y)}$ este distribuția rectangulară pe $[a,b]\times[c,d]$.

Densitățile marginale sunt date de formulele (III.1.27), deci obținem, pentru orice $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$,

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\,\mathbb{1}_{[a,b]\times[c,d]}(x,y)\,dy = \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_c^d dy\,, \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\,\mathbb{1}_{[a,b]\times[c,d]}(x,y)\,dx = \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b dx\,.\end{aligned}$$

Deci se obține

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{și} \quad f_Y(y) = \frac{1}{d-c}\,.$$

◇

Exemplul III.1.96 În cazul particular $f_{(X,Y)}(x,y) = \dfrac{1}{6}\,\mathbb{1}_{[0,2]\times[0,3]}(x,y)$ să calculăm probabilitatea $\mathbb{P}(1\le X\le 3, -1\le Y\le 2)$.

Utilizând Remarca III.1.91 obținem

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3, -1 \leq Y \leq 2) = \int_1^3 \int_{-1}^2 \frac{1}{6} \mathbb{1}_{[0,2]\times[0,3]}(x,y)\, dxdy$$
$$= \int_1^2 \int_0^2 \frac{1}{6}\, dxdy = \frac{1}{6} \cdot x\Big|_{x=1}^{x=2} \cdot y\Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{3}.$$

$\diamond$

Exemplul III.1.97 Dacă $\mathcal{D}$ este discul cu centrul în origine și de rază 1, atunci funcția

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(x,y)$$

este o densitate de repartiție.

Vectorul (X,Y) reprezintă coordonatele unui punct distribuit uniform în discul $\mathcal{D}$. $\diamond$

Propoziţia III.1.98 *Dacă $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator care admite densitatea de repartiție $f_{(X,Y)}$, atunci*

$$X,Y \text{ independente} \quad \Leftrightarrow \quad f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \text{pentru orice } x,y \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Știm că v.a. X,Y sunt independente dacă și numai dacă

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\,\mathbb{P}(Y \leq y), \quad \text{pentru orice } x,y \in \mathbb{R}.$$

Dacă v.a. X,Y sunt independente, atunci, pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(u,v)\, dudv = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\,\mathbb{P}(Y \leq y)$$
$$= \int_{-\infty}^x f_X(u)\, du \cdot \int_{-\infty}^y f_Y(v)\, dv$$
$$= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_X(u) f_Y(v)\, dudv.$$

Reciproc, dacă $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, atunci, pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(u,v)\, dudv$$
$$= \int_{-\infty}^x f_X(u)\, du \cdot \int_{-\infty}^y f_Y(v)\, dv = \mathbb{P}(X \leq x)\,\mathbb{P}(Y \leq y).$$

$\blacksquare$

Remarca III.1.99 De fapt, are loc următorul rezultat: dacă $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator care admite densitatea de repartiție $f_{(X,Y)}$ și dacă există două funcții $g,h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât are loc scrierea

$$f_{(X,Y)}(x,y) = g(x) \cdot h(y), \quad \text{pentru orice } x,y \in \mathbb{R},$$

atunci v.a. X,Y sunt independente și densitățile marginale sunt date de $f_X = g$ și $f_Y = h$. $\diamond$

III.1.7.1 Transformări ale vectorilor aleatori

Fie $(X,Y) : \Omega \to \mathscr{D}$ un vector aleator care admite densitatea de repartiție $f_{(X,Y)}$ astfel încât $\operatorname{Supp}(f) \subset \mathscr{D}$. Să considerăm transformarea

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2,$$

dată de

$$\begin{cases} x = \Phi_1(u,v), \\ y = \Phi_2(u,v), \quad (u,v) \in \Delta, \end{cases}$$

astfel încât

(i) Φ este bijecție,

(ii) Φ și Φ^{-1} admit derivate parțiale de ordinul întâi pe Δ și respectiv $\mathscr{D}$,

(iii) $J_\Phi(u,v) \overset{\text{def}}{=\!=} \dfrac{D(\Phi_1,\Phi_2)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad$ pentru $(u,v) \in \Delta$

(J_Φ se numește **determinantul Jacobian** al transformării Φ).

Atunci $\Phi^{-1}(X,Y)$ este tot un vector aleator notat cu (U,V), i.e.

$$\boxed{(U,V) = \Phi^{-1}(X,Y) \quad \Leftrightarrow \quad (X,Y) = \Phi(U,V).}$$

Să notăm cu $f_{(X,Y)}$ și $f_{(U,V)}$ densitățile de repartiție corespunzătoare vectorilor aleatori (X,Y) și respectiv (U,V).

Fie acum $\Delta' \subset \Delta$ arbitrar ales și $\Phi(\Delta) = \mathscr{D}' \subset \mathscr{D}$. Folosind schimbarea de variabilă în integrala dublă obținem

$$\iint_{\mathscr{D}'} f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy = \iint_{\Delta'} f_{(X,Y)}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv. \tag{III.1.28}$$

Dar probabilitatea ca (X,Y) să ia valori în $\mathscr{D}'$ coincide cu probabilitatea ca (U,V) să ia valori în Δ', i.e.

$$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathscr{D}') = \mathbb{P}((U,V) \in \Delta'),$$

deci

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta'} f_{(U,V)}(u,v)\,dudv &= \mathbb{P}((U,V) \in \Delta') = \mathbb{P}((X,Y) \in \mathscr{D}') \\ &= \iint_{\mathscr{D}'} f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_{\Delta'} f_{(X,Y)}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv. \end{aligned}$$

Având în vedere că $\Delta' \subset \Delta$ este ales arbitrar, **din egalitatea celor două integrale calculate pe Δ', deducem egalitatea integranzilor**, adică următoarea formulă care exprimă **densitatea vectorului aleator** (U, V) **folosind densitatea vectorului aleator** (X, Y) :

$$\boxed{f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v))\,|J(u,v)| \quad \text{a.p.t. } (u,v) \in \Delta.} \tag{III.1.29}$$

Remarca III.1.100 Să menționăm că egalitatea precedentă nu are loc pentru toți $(u, v) \in \Delta$, ci are loc aproape pentru toți $(u, v) \in \Delta$, în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}^2$. $\diamond$

Remarca III.1.101 Teorema III.1.19 reprezintă un caz particular al acestei formule. Astfel, dacă luăm

$$\Phi : \Delta \subset \mathbb{R} \to \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$$

astfel încât $\Phi \in C^1(\Delta)$, inversabilă, atunci $\Phi^{-1}(X)$ este tot o v.a. notată cu U, i.e.

$$\boxed{U = \Phi^{-1}(X) \quad \Leftrightarrow \quad X = \Phi(U),}$$

și are loc următoarea formulă care exprimă **densitatea v.a.** U **folosind densitatea v.a.** X :

$$\boxed{f_U(u) = f_X(\Phi(u))\,|\Phi'(u)|, \quad \text{a.p.t. } u \in \Delta.} \tag{III.1.30}$$

$\diamond$

Exemplul III.1.102 Dacă $X \sim \mathcal{U}[0,1]$, atunci v.a. $Y = a + (b-a)X \sim \mathcal{U}[a,b]$, deoarece $X = \dfrac{Y-a}{b-a}$ și legătura dintre densități este dată de relația (vezi și Corolarul III.1.21)

$$f_Y(y) = \frac{1}{b-a} f_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[0,1]}\left(\frac{y-a}{b-a}\right) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(y),$$

deoarece $0 \le \dfrac{y-a}{b-a} \le 1$ dacă și numai dacă $a \le y \le b$. $\diamond$

Remarca III.1.103 Similar putem demonstra (vezi și Propoziția III.1.43 și Propoziția III.1.68 unde demonstrația se face cu ajutorul funcției de repartiție):

$$\begin{aligned}
&(a) \quad X \sim \mathcal{U}[0,1] \quad \text{dacă și numai dacă} \quad (b-a)X + a \sim \mathcal{U}[a,b];\\
&(b) \quad X \sim \mathcal{U}[a,b] \quad \text{dacă și numai dacă} \quad \frac{X-a}{b-a} \sim \mathcal{U}[0,1];\\
&(c) \quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{dacă și numai dacă} \quad \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1);\\
&(d) \quad X \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{dacă și numai dacă} \quad \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2);\\
&(e) \quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{dacă și numai dacă} \quad aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).
\end{aligned}$$

$\diamond$

Propoziţia III.1.104 (Densitatea sumei a două v.a.) *Fie X, Y două v.a. independente ale căror densități de repartiție sunt f_X și respectiv f_Y.*

Atunci[7]

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-v)\, f_Y(v)\, dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v)\, f_Y(u-v)\, dv, \quad \text{a.p.t. } u \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{III.1.31}$$

și

$$\begin{aligned} f_{X-Y}(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u+v)\, f_Y(u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\, f_Y(u-v)\, du, \quad \text{a.p.t. } v \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{III.1.32}$$

Remarca III.1.105 A doua egalitate din (III.1.31) se obține ușor făcând schimbarea de variabilă $u-v=v'$, deci $v=u-v'$ și $dv=-dv'$.

Similar și pentru a doua egalitate din (III.1.32): se notează $u+v=u'$, deci $u=u'-v$ și $du=du'$. $\diamond$

Demonstraţie. Alegem transformarea

$$\begin{cases} u = x+y, \\ v = x-y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \Phi_1(u,v) = \frac{1}{2}(u+v), \\ y = \Phi_2(u,v) = \frac{1}{2}(u-v). \end{cases}$$

Să calculăm determinantul Jacobian $J(u,v) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2.$

Deci, a.p.t. $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, are loc relația

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)\Big|\frac{-1}{2}\Big|.$$

Densitatățile marginale pentru U, V sunt date de formulele (III.1.27):

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(U,V)}(u,v)\, dv, \quad f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(U,V)}(u,v)\, du, \tag{III.1.33}$$

deci obținem

$$f_U(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)\Big|\frac{-1}{2}\Big| dv.$$

Dacă notăm $\frac{u-v}{2} = v'$ sau echivalent $v = u - 2v'$, integrala devine

$$f_U(u) = \frac{1}{2}\int_{+\infty}^{-\infty} f_{(X,Y)}(u-v', v')\,(-2)\, dv',$$

[7] Reamintim definiția **convoluției dintre două funcții** g și h: $(g * h)(u) = \int_{\mathbb{R}} g(u-v)\, h(v)\, dv$. Astfel deducem că densitatea sumei a două v.a. este chiar convoluția dintre funcțiile densitate a celor două v.a., i.e. $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.

deci obținem relația

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(u-v,v)\,dv, \quad \text{a.p.t. } u \in \mathbb{R}.$$

Deci, în cazul în care v.a. sunt independente, se obține formula

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-v)\, f_Y(v)\,dv, \quad \text{a.p.t. } u \in \mathbb{R}.$$

Apoi

$$f_{X-Y}(v) = f_V(v) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)\,du.$$

Dacă notăm $\frac{u-v}{2} = u'$ sau echivalent $u = 2u' + v$, integrala devine

$$f_{X-Y}(v) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(u'+v,u')\,2du' = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(u+v,u)\,du. \qquad \text{(III.1.34)}$$

Deci, în cazul în care v.a. sunt independente, se obține formula

$$f_{X-Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u+v)\, f_Y(u)\,du, \quad \text{a.p.t. } v \in \mathbb{R}.$$

■

Remarca III.1.106 Alegând transformarea $\begin{cases} u = x+y, \\ v = y, \end{cases}$ se obține, de asemenea, că densitatea marginală a v.a. $U = X+Y$ este dată de prima egalitate din (III.1.31).

Alegând transformarea $\begin{cases} u = x+y, \\ v = x, \end{cases}$ se obține, de asemenea, că densitatea marginală a v.a. $U = X+Y$ este dată de a doua egalitate din (III.1.31).

◇

Remarca III.1.107 Alegând transformarea $\begin{cases} u = x-y, \\ v = y, \end{cases}$ se obține, de asemenea, că densitatea marginală a v.a. $U = X-Y$ este dată de prima egalitate din (III.1.32).

Alegând transformarea $\begin{cases} u = x-y, \\ v = x, \end{cases}$ se obține, de asemenea, că densitatea marginală a v.a. $U = X-Y$ este dată de a doua egalitate din (III.1.32). ◇

Propoziţia III.1.108 *Fie X, Y două v.a. independente ale căror densități de repartiție sunt f_X și respectiv f_Y.*

Atunci

$$\boxed{f_{X\cdot Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|v|} f_X\Big(\frac{u}{v}\Big)\, f_Y(v)\,dv, \quad \text{a.p.t. } u \in \mathbb{R}} \qquad \text{(III.1.35)}$$

și

$$\boxed{f_{\frac{X}{Y}}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|\, f_X(uv)\, f_Y(u)\,du, \quad \text{a.p.t. } v \in \mathbb{R}.} \qquad \text{(III.1.36)}$$

Demonstraţie. Alegem o transformare bijectivă $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Delta \to \mathscr{D}$ dată de

$$\begin{cases} u = x \cdot y, \\ \\ v = y, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{u}{v}\,, \\ \\ y = v. \end{cases}$$

Să calculăm determinantul Jacobian $J(u, v) = \begin{vmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1/v.$

Deci, a.p.t. $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, are loc relația

$$f_{(U,V)}(u, v) = f_{(X,Y)}(u/v, v) \left|\frac{1}{v}\right| = \left|\frac{1}{v}\right| f_X(u/v)\, f_Y(v)\,,$$

deoarece X, Y sunt independente.

Densitățile marginale pentru U, V sunt date de (III.1.27), deci obținem

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|v|} f_X\left(\frac{u}{v}\right) f_Y(v)\, dv, \quad \text{a.p.t. } u \in \mathbb{R}.$$

Similar, alegând o transformare bijectivă $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Delta \to \mathscr{D}$ dată de

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{y}\,, \\ \\ v = y, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = uv\,, \\ \\ y = v. \end{cases}$$

se va obține densitatea marginală a v.a. $U = \dfrac{X}{Y}$. ∎