Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminarul 1

Capitolul I. Spații de probabilitate

I.1 Amestecăm un pachet de 10 cărți de joc numerotate cu $1, 2, \ldots, 10$. Care este probabilitatea ca deasupra să fie cartea 1? Dar probabilitatea ca pe primele două poziții să fie cărțile 1 și 2?

Rezolvare:

Cele 10 cărți pot fi aranjate în $A_{10}^{10} = 10!$ moduri posibile. Cazul favorabil este orice aranjare în care pe primul loc se află numărul 1 iar apoi celelalte 9 numere (indiferent de ordine). Deci numărul cazurilor favorabile este $9!$, deci probabilitatea ca prima carte să fie 1 este $\dfrac{9!}{10!} = \dfrac{1}{10}$.

Putem formaliza și scrie și sub forma: **mulțimea Ω a tuturor evenimentelor elementare poate fi văzută ca fiind o mulțime de $n-$upluri de tipul**

$$\Omega = \{(CJP1, CJP2, \ldots, CJP10) : \quad CJPi \in \{1, 2, \ldots, 10\}, \\ CJPi \neq CJPj, \quad i, j = \overline{1, 10}, \text{ cu } i \neq j\}$$

iar numărul tuturor cazurilor posibile este $\operatorname{card}(\Omega) = 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 = A_{10}^{10} = 10!$ (deoarece prima poziție a $24-$uplului are 10 variante posibile, a doua poziție are 9 variante posibile etc.).

Primul eveniment avut în vedere este

$$A = \{(\mathbf{CJ1}, CJP2, \ldots, CJP10) \in \Omega : \quad CJPi \in \{2, \ldots, 10\}, \\ i = \overline{2, 10}\}$$

iar $\operatorname{card}(A) = A_9^9 = 9!$. Deci $\mathbb{P}(A) = \dfrac{A_9^9}{A_{10}^{10}} = \dfrac{1}{10}$.

Putem face și direct: să observăm că pe primul loc poate fi oricare din cele 10 cărți, deci avem zece cazuri posibile. Dintre acestea unul singur este favorabil (apariția cărții 1). Deci probabilitatea este $1/10$.

Al doilea eveniment avut în vedere este

$$B = \{(\mathbf{CJ1}, \mathbf{CJ2}, CJP3, \ldots, CJP10) \in \Omega : \quad CJPi \in \{3, \ldots, 10\}, \\ i = \overline{3, 10}\}$$

iar $\operatorname{card}(B) = A_8^8 = 8!$. Deci $\mathbb{P}(B) = \dfrac{A_8^8}{A_{10}^{10}} = \dfrac{1}{90}$.

Putem face și direct: să observăm că pe primele două poziții poate fi orice pereche ordonată de numere, deci numărul cazurilor posibile este de $A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 90$. Dintre acestea unul singur este favorabil (apariția cărților 1 și 2). Deci probabilitatea este $1/90$.

I.2 Un număr de telefon este compus din șase cifre. Care este probabilitatea ca toate cifrele să fie diferite una de alta? (toate cifrele pot avea una dintre valorile $0, 1, \ldots, 9$).

Rezolvare:

Formalizăm, văzând **mulțimea Ω a tuturor evenimentelor elementare ca pe o mulțime de $6-$upluri:**

$$\Omega = \{(TP1, TP2, \ldots, TP6) : \quad TPi \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \quad i = \overline{1, 6}\}$$

iar numărul tuturor cazurilor posibile (toate numerele de telefon din șase cifre, nu neapărat diferite) este $\operatorname{card}(\Omega) = 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10 = 10^6$ (deoarece prima poziție a $6-$uplului are 10 variante posibile, a doua poziție are tot 10 variante posibile etc.).

Eveniment avut în vedere este

$$A = \{(TP1, TP2, \ldots, TP6) \in \Omega : \quad TPi \neq TPj, \quad i, j = \overline{1,6}\,, \\ \text{cu } i \neq j\,\}$$

iar $\operatorname{card}(A) = 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 5 = A_{10}^6$ (deoarece prima poziție a $6-$uplului are 10 variante posibile, a doua poziție are 9 variante posibile etc.).

Deci probabilitatea cerută este $\mathbb{P}(A) = \dfrac{A_{10}^6}{10^6} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{10^6} = 0.1512\,.$

I.3 Într-un oraș se găsesc 10000 de biciclete numerotate de la 0000 la 9999. Care este probabilitatea ca numărul primei biciclete întâlnite să nu conțină cifra 8?

Rezolvare:

Formalizăm, văzând **mulțimea Ω a tuturor evenimentelor elementare ca pe o mulțime de $4-$upluri:**

$$\Omega = \{(BP1, BP2, BP3, BP4) : \quad BPi \in \{0, 1, \ldots, 9\}\,, \quad i = \overline{1,4}\,\}$$

iar numărul tuturor cazurilor posibile este $\operatorname{card}(\Omega) = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$ (deoarece prima poziție a $4-$uplului are 10 variante posibile, a doua poziție are tot 10 variante posibile etc.).

Eveniment avut în vedere este

$$A = \{(BP1, BP2, BP3, BP4) \in \Omega : \quad BPi \neq 8, \quad i = \overline{1,4}\,\}$$

iar $\operatorname{card}(A) = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4$ (deoarece prima poziție a $4-$uplului are 9 variante posibile, a doua poziție are 9 variante posibile etc.).

Deci probabilitatea cerută este $\mathbb{P}(A) = \dfrac{9^4}{10^4} = (0.9)^4 = 0.6561\,.$

I.4 Care este probabilitatea ca într-un grup de n persoane să existe cel puțin 2 care să-și aniverseze ziua de naștere în aceeași zi a anului? (se presupune că anul are 365 de zile)

Rezolvare:

Evident, dacă $n > 365$, atunci probabilitatea cerută este 1. Să presupunem că $n \leq 365$. Este mai ușor de calculat probabilitatea evenimentului contrar, notat $\bar{A}$, adică evenimentul ca fiecare din cele n persoane își aniverseze ziua de naștere într-o zi diferită de ziua celorlalte $(n-1)$ persoane.

Mulțimea evenimentelor elementare (sau mulțimea rezultatelor posibile) se poate scrie sub forma

$$\Omega = \left\{(ZNP1, ZNP2, \ldots, ZNPn) : \quad ZNPi \in \{1, 2, \ldots, 365\}\,,\ i = \overline{1,n}\right\}$$

iar $\operatorname{card}(\Omega) = 365^n$ (se poate aplica principiul multiplicării) care reprezintă numărul cazurilor posibile.

Evenimentul contrar este dat de

$$\bar{A} = \{(ZNP1, ZNP2, \ldots, ZNPn) \in \Omega : \quad ZNPi \neq ZNPj, \quad i, j = \overline{1,n}\,, \\ \text{cu } i \neq j\,\}$$

iar $\operatorname{card}\left(\bar{A}\right) = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1) = A_{365}^n$ (deoarece prima poziție a $n-$uplului are 365 de variante posibile, a doua poziție are 364 de variante posibile etc.).

Deci probabilitatea cerută este $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \dfrac{A_{365}^n}{365^n}\,.$

Să observăm că **putem scrie Ω și cu ajutorul funcțiilor**:

$$\Omega = \{f : \{ZNP1, ZNP2, \ldots, ZNPn\} \to \{1, 2, \ldots, 365\} : \quad f \text{ este funcție}\}$$

iar $\mathrm{card}\,(\Omega) = 365^n$ (care este numărul tuturor posibilelor funcții între două mulțimi de cardinal finit).

Scrisă în acest fel, evenimentul $\bar{A}$ este, de fapt,

$$\bar{A} = \{f : \{ZNP1, ZNP2, \ldots, ZNPn\} \to \{1, 2, \ldots, 365\} : \quad f \text{ este funcție injectivă} \}$$

iar $\mathrm{card}\left(\bar{A}\right) = A_{365}^n$ (care este numărul tuturor posibilelor funcții injective între două mulțimi de cardinal finit).

Deci probabilitatea evenimentului cerut este $\mathbb{P}\,(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \dfrac{A_{365}^n}{365^n}$.

În final menționăm că dacă, de exemplu, $n = 23$, atunci se obține

$$\mathbb{P}\,(A) = 1 - \frac{343 \cdot 345 \cdot \ldots \cdot 364 \cdot 365}{365^{23}} = 0.5072$$

iar dacă $n = 50$, atunci se obține $\mathbb{P}\,(A) = 1 - \dfrac{316 \cdot 317 \cdot \ldots \cdot 364 \cdot 365}{365^{50}} = 0.9703$.

I.5 Numerele $1, 2, \ldots, n$ sunt așezate la întâmplare. Care este probabilitatea ca numerele 1 și 2 să fie așezate în șir în ordine crescătoare și consecutive?

Rezolvare:

Cele n numere se pot scrie în $n!$ moduri.

Într-adevăr, formalizăm, văzând mulțimea Ω a tuturor evenimentelor elementare ca pe o mulțime de $n-$upluri:

$$\Omega = \{(NP1, NP2, \ldots, NPn) : \quad NPi \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad NPi \neq NPj, \quad i, j = \overline{1, n}, \text{ cu } i \neq j\}$$

iar numărul tuturor cazurilor posibile este $\mathrm{card}\,(\Omega) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = A_n^n = n!$ (deoarece prima poziție a $n-$uplului are n variante posibile, a doua poziție are $(n-1)$ variante posibile etc.).

Evenimentul avut în vedere conține $n-$upluri în care apare, pe de o parte, $(1, 2)$ în $(n-1)$ variante posibile și, pe de altă parte, celelalte $(n-2)$ numere în $(n-2)$ poziții posibile, deci în $A_{n-2}^{n-2} = (n-2)!$ variante posibile. Prin urmare, $\mathrm{card}\,(A) = (n-1) \cdot A_{n-2}^{n-2}$, deci $\mathbb{P}\,(A) = \dfrac{(n-1) \cdot A_{n-2}^{n-2}}{A_n^n} = \dfrac{1}{n}$.

I.6 Într-o cameră întunecoasă sunt cinci perechi de pantofi de aceeași mărime. Alegem la întâmplare cinci pantofi. Care este probabilitatea ca printre pantofii aleși să fie cel puțin o pereche?

Rezolvare:

Avem C_{10}^5 cazuri posibile de a alege cinci pantofi. Evenimentul contrar, de a nu fi nici măcar o pereche, are două cazuri favorabile (cinci pantofi stângi sau cinci pantofi drepți). Deci probabilitatea cerută este $1 - \dfrac{2}{C_{10}^5}$.

I.7 Într-o cameră întunecoasă sunt cinci perechi de pantofi de mărimi diferite. Alegem la întâmplare cinci pantofi. Care este probabilitatea ca printre pantofii aleși să fie cel puțin o pereche de aceeași mărime?

Rezolvare:

Vom studia probabilitatea evenimentului contrar, de a nu fi nici măcar o pereche de aceeași mărime. Sunt C_{10}^5 cazuri posibile. Să presupunem că avem $(D1, D2, D3, D4, D5)$ și $(S1, S2, S3, S4, S5)$ și să numărăm cazurile favorabile.

Avem un număr de C_5^5 variante de tipul $(D1, D2, D3, D4, D5)$.

Avem C_5^4 variante[1] de tipul $(D1, D2, D3, D4, S5)$, apoi C_5^3 variante de tipul $(D1, D2, D3, S4, S5)$, apoi C_5^2 variante de tipul $(D1, D2, S3, S4, S5)$, apoi C_5^1 variante de tipul $(D1, S2, S3, S4, S5)$ și C_5^0 variante de tipul $(S1, S2, S3, S4, S5)$. Deci numărul cazurilor favorabile este $C_5^5 + C_5^4 + C_5^3 + C_5^2 + C_5^1 + C_5^0 = (1+1)^5$. Prin urmare, probabilitatea cerută este $1 - \dfrac{2^5}{C_{10}^5}$.

[1] Variantele sunt $(D1, D2, D3, D4, S5)$, $(D1, D2, D3, D5, S4)$, $(D1, D2, D4, D5, S3)$, $(D1, D3, D4, D5, S2)$, $(D2, D3, D4, D5, S1)$.