Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminarul 2

Capitolul I. Spații de probabilitate

I.8 Într-un tramvai cu trei vagoane urcă nouă pasageri. Care este probabilitatea ca în primul vagon să urce trei persoane, în al doilea două persoane și în ultimul celelalte patru persoane? Dar ca într-un vagon să urce trei persoane, în alt vagon două persoane și în alt vagon patru persoane?

Care este probabilitatea ca în primul vagon să urce trei persoane? Dar ca în primul vagon să urce trei persoane, în al doilea trei persoane și în ultimul celelalte trei persoane? Dar ca în fiecare vagon să urce trei persoane?

Rezolvare:

Sunt nouă pasageri iar fiecare poate alege oricare din cele trei vagoane, deci sunt 3^9 cazuri posibile (fiecare persoană din cele 9 are câte 3 variante posibile).

Trei persoane pot urca în primul vagon în C_9^3 moduri. Apoi, din cele șase persoane care au rămas, două persoane pot urca în al doilea vagon în C_6^2 moduri; deci cele patru persoane rămase pot urca în al treilea vagon în C_4^4 moduri. Prin urmare, numărul de cazuri favorabile este (vezi și definiția coeficientului multinomial)

$$C_9^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^4 = \frac{9!}{3!\,2!\,4!} = C_9^{3,2,4}\,,$$

deci prima probabilitate cerută este $\dfrac{C_9^{3,2,4}}{3^9}$.

În ceea ce privește al doilea eveniment, diferența față de cazul precedent este că nu se știe vagonul exact al fiecărui grup în parte. Avem, prin urmare, următoarele $3!$ posibile structuri în cele trei vagoane:

$$(3,2,4)\,,(3,4,2)\,,(2,3,4)\,,(2,4,3)\,,(4,2,3)\,,(4,3,2)\,.$$

Fiecare structură este un eveniment de tipul celui precedent, deci numărul de cazuri favorabile este

$$3!\cdot C_9^{3,2,4}\,.$$

Prin urmare, a doua probabilitate cerută este $\dfrac{3!\cdot C_9^{3,2,4}}{3^9}$.

În ceea ce privește al treilea eveniment, trei persoane într-un vagon pot urca în C_9^3 moduri. Dacă trei persoane s-au urcat în primul vagon, atunci celelalte șase pot urca în celelalte două vagoane în 2^6 moduri. Deci numărul de cazuri favorabile este $C_9^3\cdot 2^6$ iar a treia probabilitate cerută este $\dfrac{C_9^3\cdot 2^6}{3^9}$.

Probabilitatea celui de-al patrulea eveniment este

$$\frac{C_9^3\cdot C_6^3\cdot C_3^3}{3^9} = \frac{C_9^{3,3,3}}{3^9}\,.$$

Probabilitatea celui de-al cincilea eveniment este $\dfrac{3!\cdot C_9^{3,3,3}}{3^9}$.

I.9 Să se determine, în două moduri, numărul tuturor grupelor (de orice mărime) care se pot forma cu maxim n persoane? Să se deducă apoi identitatea

$$1 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Rezolvare:

Formalizăm, văzând mulțimea Ω a tuturor evenimentelor elementare ca pe o mulțime de $n-$upluri:

$$\Omega = \{(PP1, PP2, \ldots, PPn) : \quad PPi \in \{1, 2\}, \quad i = \overline{1, n}\}$$

(PPi poate să facă parte dintr-un grup sau nu, deci sunt două variante posibile pentru fiecare PPi).

Astfel numărul tuturor cazurilor posibile este $\text{card}(\Omega) = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

Pe de altă parte, toate submulțimile care se pot forma cu cele n persoane (considerăm și mulțimea vidă) și este dată de $1 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.

Identificând, obținem, folosind astfel analiza combinatorie, următoarea identitate $1 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

I.10 Într-un lot de 100 de piese 5 sunt defecte. Se aleg la întâmplare 5 piese din acest lot. Care este probabilitatea ca printre piesele alese cel puțin una să fie defectă?

Rezolvare:

Să observăm că un sistem complet de evenimente este format de sistemul de evenimente $(X_k)_{k=\overline{0,5}}$, unde X_k este dat de **notația standard**

$$\begin{aligned} X_k &= \{k \text{ succese, } (n-k) \text{ eșecuri}\} \\ &= \{k \text{ succese din } n \text{ încercări}\}, \quad k = \overline{0, n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Deci

$$\begin{aligned} X_0 &= \{\text{nici o piesă nu este defectă}\}, \\ X_1 &= \{\text{o piesă este defectă, patru sunt bune}\}, \\ X_2 &= \{\text{două piese sunt defecte, trei sunt bune}\}, \\ X_3 &= \{\text{trei piese sunt defecte, două sunt bune}\}, \\ X_4 &= \{\text{patru piese sunt defecte, una este bună}\}, \\ X_5 &= \{\text{toate piesele alese sunt defecte}\}. \end{aligned}$$

Evenimentul cerut este $A = X_1 \cup \ldots \cup X_5$. Deci

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X_1 \cup \ldots \cup X_5) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X_i).$$

Pe de altă parte, observăm că $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(X_0)$ iar $\mathbb{P}(X_0)$ este mai ușor de calculat.

Avem C_{100}^5 moduri în care putem lua câte 5 piese din totalul de 100 și C_{95}^5 moduri în care putem lua câte 5 piese din cele 95 de piese bune. Deci $\mathbb{P}(X_0) = \dfrac{C_5^0 \cdot C_{95}^5}{C_{100}^5}$ și, prin urmare, $\mathbb{P}(A) = 1 - \dfrac{C_5^0 \cdot C_{95}^5}{C_{100}^5}$.

I.11 Dacă se aruncă de patru ori un zar, care este probabilitatea să apară cel puțin o dată fața șase?

Dacă se aruncă două zaruri de 24 de ori, care este probabilitatea să apară cel puțin o dată fața șase pe ambele zaruri (i.e. cel puțin o dată dubla $(6, 6)$)?

Dar să apară cel puțin o dată o față șase (pe cel puțin unul dintre zaruri)?

Dar să apară o singură dată fața șase?

Să se scrie și spațiul de probabilitate în care se lucrează.

Rezolvare:

Dacă se aruncă de patru ori un zar, atunci numărul rezultatelor posibile este de 6^4. Evenimentul să apară, la patru aruncări, măcar o dată fața șase este complementar evenimentului de a nu apărea niciodată fața șase (apar doar fețele cu $1, 2, 3, 4$ sau 5 puncte). Deci numărul rezultatelor posibile să apară una din cele cinci fețe, la patru aruncări, este de 5^4. Prin urmare, probabilitatea ca la patru aruncări să nu apară niciodată fața șase este $\dfrac{5^4}{6^4}$, iar probabilitatea să apară măcar o dată fața șase este atunci $1 - \dfrac{5^4}{6^4}$.

Dacă se aruncă două zaruri, atunci numărul rezultatelor posibile este 36, deci dacă se aruncă de 24 de ori, atunci numărul rezultatelor posibile este 36^{24} (adică $24-$upluri în care fiecare poziție este o pereche de fețe de două zaruri, deci fiecare poziție are 36 variante posibile).

La o aruncare, numărul posibil de perechi diferite de dubla $(6,6)$ este 35 și deci, dacă se aruncă de 24 de ori, atunci numărul rezultatelor posibile în care nu apare niciodată dubla $(6,6)$ este 35^{24} (fiecare poziție a $24-$uplului are 35 variante posibile). Probabilitatea ca să nu apară, la 24 de aruncări, niciodată dubla $(6,6)$ este deci de $\dfrac{35^{24}}{36^{24}}$.

Prin urmare, probabilitatea ca să apară, la 24 de aruncări, cel puțin o dată dubla $(6,6)$ este de $1-\dfrac{35^{24}}{36^{24}} \simeq 0.4914$.

La o aruncare, numărul posibil de perechi care nu conțin fața șase este 25 (sunt 11 perechi care conțin măcar o față de șase puncte) deci, dacă se aruncă de 24 de ori, atunci numărul rezultatelor posibile în care nu apare niciodată o față șase este 25^{24} (fiecare poziție a $24-$uplului are 25 variante posibile). Prin urmare, probabilitatea ca să apară, la 24 de aruncări, cel puțin o dată o față șase este de $1-\dfrac{25^{24}}{36^{24}} \simeq 0.9998$.

La o aruncare, numărul posibil de perechi care conțin fața șase o singură dată este 10 iar numărul posibil de perechi care nu conțin nici o față șase sau două fețe șase este 26 (sunt 25 variante fără nici o față cu șase puncte și 1 variante cu două fețe de șase puncte). Dacă se aruncă de 24 de ori, atunci numărul rezultatelor posibile în care apare o singură dată fața șase este dat de raționamentul următor: o poziție a $24-$uplului (oricare din cele 24 de poziții) care are o singură față cu șase puncte are 10 variante posibile; apoi celelalte 23 de poziții nu mai au voie să conțină o singură față cu șase puncte, deci sunt 26^{23} variante posibile. Prin urmare, probabilitatea ca să apară, la 24 de aruncări, o singură dată fața șase este $C_{24}^{1}\,\dfrac{10\cdot 26^{23}}{36^{24}}$.

Să menționam că probabilitatea se poate calcula folosind și schema binomială; astfel probabilitatea cerută este $C_{24}^{1}\left(\frac{10}{36}\right)^{1}\left(\frac{26}{36}\right)^{23}$.

I.12 O urnă conține trei bile albe și patru bile negre. Se extrag simultan (i.e. succesiv și fără revenirea în urnă a bilei extrase) două bile din urnă. Care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albă, în ipoteza că prima este albă?

Rezolvare:

Să folosim **notația standard**

$$A_i = \{\text{la extragerea } i \text{ apare succesul}\}\,, \quad i=\overline{1,2}\,, \tag{2}$$

adică să notăm cu A_i evenimentul obținerii unei bile albe la extragerea $i=\overline{1,2}$.

Atunci $\mathbb{P}(A_1)=3/7$ iar $\mathbb{P}(A_1\cap A_2)=6/42$, deoarece numărul cazurilor posibile este $A_7^2=42$ iar cel al cazurilor favorabile este $A_3^2=6$. Conform definiției probabilității condiționate, probabilitatea cerută este dată de $\mathbb{P}(A_2|A_1)=\dfrac{\mathbb{P}(A_1\cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)}=\dfrac{1/7}{3/7}=1/3$.

Pe de altă parte, se poate vedea și direct (în acest caz este util și reprezentarea celor două extrageri sub forma unei structuri de tip arbore) că $\mathbb{P}(A_2|A_1)=2/6$ deoarece sunt 6 cazuri posibile (după ce s-a extras prima bilă și este albă în urnă au rămas două bile albe și patru bile negre) și 2 cazuri favorabile.

I.13 O urnă conține 16 bile numerotate de la 1 la 16. Primele trei bile sunt albe, următoarele zece sunt negre iar ultimele trei sunt roșii. Se extrage o bilă din această urnă. Să notăm evenimentele $A=\{$bila extrasă este neagră$\}$, $B=\{$bila extrasă are numărul mai mic sau egal decât $9\}$. Să se calculeze $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A|B)$ și $\mathbb{P}(B|A)$.

Aceleași cerințe în cazul în care eliminăm ultima bilă roșie (cea cu numărul 16).

Rezolvare:

Avem $\mathbb{P}(A)=10/16$, $\mathbb{P}(B)=9/16$, $\mathbb{P}(\bar{A})=6/16$, $\mathbb{P}(\bar{B})=7/16$. Avem și $\mathbb{P}(A\cap B)=6/16$, deci $\mathbb{P}(B|A)=6/10$. De asemenea, putem determina și direct $\mathbb{P}(B|A)=6/10$ iar $\mathbb{P}(B|\bar{A})=3/6$. Pe de altă parte, $\mathbb{P}(A|B) = 6/9$ iar $\mathbb{P}\left(A|\bar{B}\right) = 4/7$. Deci observăm că fiecare din evenimentele A sau B își schimbă probabilitatea în funcție de realizarea sau nu a celuilalt. Deci aceste două sunt dependente unul de celălalt.

I.14 Se aruncă un zar o singură dată. Se consideră evenimentele $A = \{$se obține una dintre fețele $1, 2$ sau $3\}$, $B = \{$se obține una dintre fețele $2, 3, 4$ sau $5\}$. Sunt independente cele două evenimente?

Rezolvare:

Avem $\mathbb{P}(A) = 3/6$, $\mathbb{P}(B) = 4/6$ și $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/6$. Deci este verificată relația $\mathbb{P}(A \cap B) = 3/6 \cdot 4/6 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, ceea ce înseamnă că cele două evenimente sunt independente.

I.15 Doi arcași trag asupra unei ținte. Primul nimerește această țintă cu probabilitatea de $7/9$ iar al doilea cu probabilitatea $9/11$. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă cel puțin o dată?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i , $i = \overline{1,2}$, dată de (2), adică să notăm cu A_i evenimentul nimeririi țintei la de către arcașul $i = \overline{1,2}$.

Să observăm că aceste evenimente sunt independente dar nu sunt și disjuncte (sunt compatibile).

Trebuie determinat $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$. Folosind prima formulă probabilistă, i.e. formula probabilității unei reuniuni de evenimente obținem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2) = \frac{7}{9} + \frac{9}{11} - \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{11} .\end{aligned}$$

I.16 Trei arcași trag asupra unei ținte. Primul nimerește această țintă cu probabilitatea de $2/3$, al doilea cu probabilitatea $3/4$ iar al treilea cu probabilitatea $4/5$. Care este probabilitatea[1] ca ținta să fie atinsă de trei ori? Dar probabilitatea ca ținta să fie atinsă de două ori? Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă cel puțin o dată?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i , $i = \overline{1,3}$, dată de (2), adică să notăm cu A_i evenimentul nimeririi țintei la de către arcașul $i = \overline{1,3}$.

Avem $\mathbb{P}(A_1) = 2/3$, $\mathbb{P}(A_2) = 3/4$, $\mathbb{P}(A_3) = 4/5$.

Prima probabilitate cerută este $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) = 2/5$ (deoarece evenimentele sunt independente).

A doua probabilitate cerută este a evenimentului $A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$ sau $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$ sau $\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$. Cele trei mulțimi de intersecție sunt evenimente disjuncte iar evenimentele A_1, A_2, A_3 sunt independente, prin urmare, obținem

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right)\right] \\ &= \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) + \mathbb{P}\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) + \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_3\right) + \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right) \cdot \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{13}{30} .\end{aligned}$$

Pentru a treia probabilitate cerută este mai ușor să calculăm probabilitatea evenimentului contrar lui $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, care este $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$. Deci, evenimentele indicate fiind independente, obținem

$$\mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) = \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_3\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{60} .$$

Deci probabilitatea evenimentului cerut este

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) = 1 - \frac{1}{60} .$$

[1] Probabilitatea se poate calcula folosind și schema lui Poisson.