Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminarul 3

Capitolul I. Spații de probabilitate

I.17 Într-o urnă sunt 5 bile albe și 5 bile negre. Se scot trei bile (fără revenirea lor în urnă). Care este probabilitatea[1] obținerii a trei bile albe? Dar probabilitatea obținerii a două bile albe și a uneia negre? Care este probabilitatea obținerii a cel puțin două bile albe? Dar a cel puțin unei bile albe?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i, introdusă în seminariile precedente, $i = \overline{1,3}$, adică să notăm cu A_i evenimentul ca bila să fie albă la extragerea $i = \overline{1,3}$.

Avem imediat că $\mathbb{P}(A_1) = 5/10$, $\mathbb{P}(A_2|A_1) = 4/9$, $\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = 3/8$ (în acest caz este util și reprezentarea celor trei extrageri sub forma unei structuri de tip arbore).

Acum, folosind a doua formulă probabilistă, i.e. regula de înmulțire a probabilităților obținem

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}.$$

A doua probabilitate cerută este a evenimentului $A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$ sau $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$ sau $\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$. Cele trei mulțimi de intersecție sunt evenimente disjuncte, prin urmare obținem

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right)\right] \\
&= \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) + \mathbb{P}\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) + \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \\
&= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_3|A_1 \cap A_2\right) + \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_2|A_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_3|A_1 \cap \bar{A}_2\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_2|\bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_3|\bar{A}_1 \cap A_2\right) \\
&= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Într-adevăr, de exemplu, $\mathbb{P}\left(\bar{A}_3|A_1 \cap A_2\right) = 5/8$ este probabilitatea să extragi o bilă neagră în ipoteza că evenimentul $A_1 \cap A_2$ este realizat, adică urna conține 3 bile albe și 5 bile negre. Apoi $\mathbb{P}\left(A_3|A_1 \cap \bar{A}_2\right) = 4/8$ este probabilitatea să extragi o bilă albă în ipoteza că evenimentul $A_1 \cap \bar{A}_2$ este realizat, adică urna conține 4 bile albe și 4 bile negre.

A treia probabilitate cerută este a evenimentului

$$\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Se va obține suma celor două probabilități precedente.

Pentru al patrulea eveniment cerut trebuie determinată, mai întâi, probabilitatea obținerii unei bile albe și a două negre:

$$\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right).$$

Evenimentul obținerii a cel puțin unei bile albe este atunci

$$\begin{aligned}
&\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \\
&\cup \left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3),
\end{aligned}$$

iar probabilitatea lui este suma probabilităților fiecărui termen al reuniunii.

Este mai ușor obținerea evenimentului contrar evenimentului patru: nu se obține nici o bilă albă. Acesta este deci $\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right)$ iar apoi se va calcula $\mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right)$.

[1] Probabilitatea se poate calcula folosind și schema hipergeometrică.

I.18 Într-un lot de 48 de piese 3 sunt defecte iar în alt lot de 50 de piese 3 sunt defecte. Din fiecare lot se iau câte 3 piese. Care este probabilitatea ca, din primul lot, primele două piese să fie bune și a treia să fie defectă iar, din al doilea lot, toate trei să fie bune?

Rezolvare:

Să notăm evenimentele:

$A = \{$din primul lot primele două piese luate sunt bune iar a treia este defectă$\}$,

$B = \{$din al doilea lot toate cele 3 piese luate sunt bune$\}$,

$A_i = \{$piesa i din primul lot este bună$\}, \quad i = \overline{1,3}$,

$B_j = \{$piesa j din al doilea lot este bună$\}, \quad j = \overline{1,3}$.

Avem, A, B fiind independente, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. Pe de altă parte

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_3|A_1 \cap A_2\right) \\ &= \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{3}{46}\end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) \\ &= \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48}.\end{aligned}$$

Deci $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48} = \frac{297}{6273}$.

I.19 O urnă conține trei bile albe și patru bile negre iar altă urnă conține patru bile albe și cinci bile negre. Se extrage o bilă la întâmplare din una din cele două urne. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă?

Rezolvare:

Să notăm evenimentele

$$\begin{aligned}X &= \{\text{bila aleasă este albă}\}, \\ A_1 &= \{\text{urna aleasă este prima}\}, \\ A_2 &= \{\text{urna aleasă este a doua}\} = \bar{A}_1.\end{aligned}$$

Este mai dificil de spus imediat cine este $\mathbb{P}(X)$. Dar, conform enunțului, avem că $\mathbb{P}(X|A_1) = \frac{3}{7}$, $\mathbb{P}(X|A_2) = \frac{4}{9}$. Folosind a treia formulă probabilistă, i.e. formula probabilității totale, obținem și probabilitatea cerută:

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(X|A_1) + \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(X|A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{55}{126}.$$

I.20 Într-un depozit se aduc piese de la trei ateliere. Primul are două mașini care fabrică aceste piese și dă 3% rebut. Al doilea are două mașini și dă 2% rebut. Al treilea are trei mașini și dă 3% rebut. Care este probabilitatea ca o piesă luată din depozit, la întâmplare, să fie defectă? (fiecare mașină produce același număr de piese în unitatea de timp)

Rezolvare:

Avem

$$\begin{aligned}X &= \{\text{piesa aleasă este defectă}\}, \\ A_1 &= \{\text{piesa provine de la primul atelier}\}, \\ A_2 &= \{\text{piesa provine de la al doilea atelier}\}, \\ A_3 &= \{\text{piesa provine de la al treilea atelier}\}.\end{aligned}$$

Evenimentele A_1, A_2 și A_3 formează un sistem complet de evenimente. Avem

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{7}, \quad \mathbb{P}(A_2) = \frac{2}{7}, \quad \mathbb{P}(A_3) = \frac{3}{7}.$$

iar

$$\mathbb{P}(X|A_1) = \frac{3}{100}, \quad \mathbb{P}(X|A_2) = \frac{2}{100}, \quad \mathbb{P}(X|A_3) = \frac{3}{100}.$$

Deci, folosind a treia formulă probabilistă, i.e. formula probabilității totale, obținem și probabilitatea cerută:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X) &= \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(X|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\cdot\mathbb{P}(X|A_2) + \mathbb{P}(A_3)\cdot\mathbb{P}(X|A_3)\\ &= \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{100} + \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{100} + \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{100} = \frac{19}{700}.\end{aligned}$$

I.21 O urnă conține trei bile albe și patru bile negre iar altă urnă conține patru bile albe și cinci bile negre. Se extrage o bilă la întâmplare din una din cele două urne. Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din prima urnă?

Rezolvare:

Se cere $\mathbb{P}(A_1|X)$ (vezi notațiile Exercițiului 1.19). Avem că $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1/2$. Folosind a patra formulă probabilistă, i.e. formula lui Bayes, obținem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1|X) &= \frac{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(X|A_1)}{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(X|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(X|A_2)}\\ &= \frac{1/2\cdot 3/7}{1/2\cdot 3/7 + 1/2\cdot 4/9} = \frac{27}{55}.\end{aligned}$$

I.22 Într-un depozit se aduc piese de la trei ateliere. Primul are două mașini care fabrică aceste piese și dă 3% rebut. Al doilea are două mașini și dă 2% rebut. Al treilea are trei mașini și dă 3% rebut. Din depozit a fost luată o piesă, la întâmplare, care s-a dovedit a fi defectă. Care este probabilitatea ca piesa luată din depozit să provină de la al doilea atelier? Dar probabilitatea ca piesa luată din depozit să provină de la al treilea atelier?

Rezolvare:

Se cer $\mathbb{P}(A_2|X)$ și $\mathbb{P}(A_3|X)$ (vezi notațiile Exercițiului 1.20). Folosind a patra formulă probabilistă, i.e. formula lui Bayes, obținem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2|X) &= \frac{\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(X|A_2)}{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(X|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(X|A_2) + \mathbb{P}(A_3)\,\mathbb{P}(X|A_3)}\\ &= \frac{2/7\cdot 2/100}{2/7\cdot 3/100 + 2/7\cdot 2/100 + 3/7\cdot 3/100} = \frac{4}{19}\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_3|X) &= \frac{\mathbb{P}(A_3)\,\mathbb{P}(X|A_3)}{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(X|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(X|A_2) + \mathbb{P}(A_3)\,\mathbb{P}(X|A_3)}\\ &= \frac{3/7\cdot 3/100}{2/7\cdot 3/100 + 2/7\cdot 2/100 + 3/7\cdot 3/100} = \frac{9}{19}.\end{aligned}$$

I.23 Patru urne au următoarele distribuții: prima urnă conține 7 bile albe și 2 bile negre, a doua urnă conține 8 bile albe și 4 bile negre, a treia conține 10 bile albe și 12 bile negre iar a patra urnă conține 8 bile albe și 12 bile negre. Se extrage o bilă la întâmplare din una din cele patru urne. Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă?

Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din cea de a treia urnă?

Rezolvare:

Să notăm evenimentele $X = \{\text{bila aleasă este albă}\}$, $A_i = \{\text{urna aleasă este } i\,\}$, $i = \overline{1,4}$. Evenimentele $(A_i)_{i=\overline{1,4}}$ formează un sistem complet de evenimente.

Avem că $\mathbb{P}(A_i) = 1/4$, $i = \overline{1,4}$ iar $\mathbb{P}(X|A_1) = 7/9$, $\mathbb{P}(X|A_2) = 8/12$, $\mathbb{P}(X|A_3) = 10/22$, $\mathbb{P}(X|A_3) = 8/20$.

Mai întâi se cere $\mathbb{P}(X)$. Folosind a treia formulă probabilistă, i.e. formula probabilității totale, obținem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X) &= \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(X|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\cdot\mathbb{P}(X|A_2)\\ &\quad + \mathbb{P}(A_3)\cdot\mathbb{P}(X|A_3) + \mathbb{P}(A_4)\cdot\mathbb{P}(X|A_4)\\ &= 1/4\cdot 7/9 + 1/4\cdot 8/12 + 1/4\cdot 10/22 + 1/4\cdot 8/20 = 569/990\,.\end{aligned}$$

Apoi se cere $\mathbb{P}(A_3|X)$. Folosind a patra formulă probabilistă, i.e. formula lui Bayes, obținem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_3|X) &= \frac{\mathbb{P}(A_3)\,\mathbb{P}(X|A_3)}{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(X|A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_4)\,\mathbb{P}(X|A_4)}\\ &= \frac{1/4\cdot 10/22}{1/4\cdot 7/9 + 1/4\cdot 8/12 + 1/4\cdot 10/22 + 1/4\cdot 8/20} = \frac{225}{1138}\,.\end{aligned}$$