Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminarul 4

Capitolul I. Spații de probabilitate

I.24 Avem trei loturi de câte 100 de piese. În primul lot trei piese sunt defecte, în al doilea lot patru piese sunt defecte, iar în al treilea lot cinci piese sunt defecte. Din fiecare lot se ia câte o piesă. Care este probabilitatea obținerii a două piese bune și a uneia defecte?

Rezolvare:

Să folosim notația standard $A_i\,,\ i=\overline{1,3}\,$, introdusă în seminariile precedente, adică să notăm cu A_i evenimentul extragerii unei piese bune din lotul $L_i\,,\ i=\overline{1,3}\,$.

Acestea sunt evenimente independente. Probabilitatea $p_i=\mathbb{P}(A_i)$, deci $p_1=97/100$, $p_2=96/100$, $p_3=95/100$ și respectiv $q_1=1-p_1=3/100$, $q_2=4/100$, $q_3=5/100$. Atunci, conform schemei lui Poisson, probabilitatea ca două din cele trei piese să fie bune (i.e. $k=2$ piese bune și $(3-2)$ piese defecte) este coeficientul corespunzător lui x^2 din polinomul

$$\begin{aligned} Q(x) &= (p_1x+q_1)(p_2x+q_2)(p_3x+q_3) \\ &= p_1p_2p_3x^3+(p_1p_2q_3+p_1p_3q_2+p_2p_3q_1)\,x^2 \\ &\quad +(p_1q_2q_3+p_2q_1q_3+p_3q_1q_2)\,x+q_1q_2q_3, \end{aligned}$$

adică probabilitatea cerută este $p_1p_2q_3+p_1p_3q_2+p_2p_3q_1\,$.

I.25 Patru arcași trag asupra unei ținte. Primul atinge ținta cu probabilitatea $2/3$, al doilea cu probabilitatea $3/4$, al treilea cu probabilitatea $4/5$ iar al patrulea cu probabilitatea $5/6$. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de 3 ori?

Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel puțin 2 ori? Dar probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel mult 2 ori?

Rezolvare:

Să folosim notația standard $A_i\,,\ i=\overline{1,4}\,$, adică să notăm cu A_i evenimentul atingerii țintei de către arcașul i, $i=\overline{1,4}\,$.

Acestea sunt evenimente independente. Probabilitatea $p_i=\mathbb{P}(A_i)$, deci $p_1=2/3$, $p_2=3/4$, $p_3=4/5$, $p_4=5/6$ și respectiv $q_1=1-p_1=1/3$, $q_2=1/4$, $q_3=1/5$, $q_4=1/6$.

Să folosim și notația standard $X_k\,,\ k=\overline{0,4}\,$, introdusă în seminariile precedente, adică să notăm cu X_k evenimentul ca ținta să fie atinsă de k ori, unde $k=\overline{0,4}\,$.

Atunci putem calcula probabilitatea $\mathbb{P}(X_0)$ folosind și scrierea lui X_0

$$X_0=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4\,.$$

De asemenea, folosind schema lui Poisson (în cazul $k=0$ atingeri și $(4-0)$ ratări), probabilitatea ca ținta să nu fie atinsă niciodată este coeficientul corespunzător lui x^0 din polinomul

$$\begin{aligned} Q(x) &= (p_1x+q_1)(p_2x+q_2)(p_3x+q_3)(p_4x+q_4) \\ &= \left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right). \end{aligned}$$

Deci

$$\mathbb{P}(X_0)=q_1q_2q_3q_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{360}\,.$$

Putem calcula probabilitatea $\mathbb{P}(X_1)$ folosind și scrierea lui X_1

$$\begin{aligned} X_1 = & \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4\right) \\ & \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4\right). \end{aligned}$$

De asemenea, folosind schema lui Poisson (în cazul $k = 1$ atingeri și $(4-1)$ ratări), probabilitatea ca ținta să fie atinsă o singură dată este coeficientul corespunzător lui x^1 din polinomul $Q(x)$. Deci

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1) & = p_1q_2q_3q_4 + p_2q_1q_3q_4 + p_3q_1q_2q_4 + p_4q_1q_2q_3 \\ & = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{180}. \end{aligned}$$

Putem calcula probabilitatea $\mathbb{P}(X_2)$ folosind și scrierea lui X_2

$$\begin{aligned} X_2 = & \left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4\right) \\ & \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4\right) \\ & \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4\right). \end{aligned}$$

De asemenea, folosind schema lui Poisson (în cazul $k = 2$ atingeri și $(4-2)$ ratări), probabilitatea $\mathbb{P}(X_2)$ este coeficientul corespunzător lui x^2 din polinomul $Q(x)$. Deci

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2) & = p_1p_2q_3q_4 + p_1p_3q_2q_4 + p_2p_3q_1q_4 + p_1p_4q_2q_3 \\ & \quad + p_2p_4q_1q_3 + p_3p_4q_1q_2 \\ & = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \\ & \quad + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{71}{360}. \end{aligned}$$

Putem calcula probabilitatea $\mathbb{P}(X_3)$ folosind și scrierea

$$\begin{aligned} X_3 = & \left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4\right) \cup \left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4\right) \\ & \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right). \end{aligned}$$

De asemenea, folosind schema lui Poisson (în cazul $k = 3$ atingeri și $(4-3)$ ratări), probabilitatea $\mathbb{P}(X_3)$ este coeficientul corespunzător lui x^3 din polinomul $Q(x)$. Deci

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_3) & = p_1p_2p_3q_4 + p_1p_2p_4q_3 + p_1p_3p_4q_2 + p_2p_3p_4q_1 \\ & = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{77}{180}. \end{aligned}$$

Apoi $X_4 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$. Folosind schema lui Poisson (în cazul $k = 4$), probabilitatea $\mathbb{P}(X_4)$ este coeficientul corespunzător lui x^4 din polinomul $Q(x)$. Deci

$$\mathbb{P}(X_4) = p_1p_2p_3p_4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{6}.$$

Să definim Y ca fiind evenimentul ca ținta să fie atinsă de cel puțin 2 ori. Atunci $Y = X_2 \cup X_3 \cup X_4$ iar $(X_i)_{i=\overline{0,4}}$ sunt evenimente disjuncte, deci $\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X_2 \cup X_3 \cup X_4) = \mathbb{P}(X_2) + \mathbb{P}(X_3) + \mathbb{P}(X_4)$, și se vor folosi rezultatele precedente.

Să definim Z ca fiind evenimentul ca ținta să fie atinsă de cel mult 2 ori. Atunci $Z = X_0 \cup X_1 \cup X_2$, deci $\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X_0 \cup X_1 \cup X_2) = \mathbb{P}(X_0) + \mathbb{P}(X_1) + \mathbb{P}(X_2)$, și se vor folosi rezultatele precedente (sau $\bar{Z} = X_3 \cup X_4$ iar $\mathbb{P}(Z) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{Z}\right) = 1 - \mathbb{P}(X_3) - \mathbb{P}(X_4)$).

Să observăm în final că evenimentele $(X_i)_{i=\overline{0,4}}$ formează un sistem complet, deci $\bigcup_{i=0}^{5} X_i = \Omega$ (cu valorile obținute mai sus se poate face proba că, într-adevăr, $\sum_{i=0}^{5} \mathbb{P}(X_i) = 1$).

I.26 Trei arcași trag asupra unei ținte. Probabilitatea să atingă ținta este pentru fiecare arcaș în parte p_1, p_2 și respectiv p_3. După trageri s-a constatat că ținta a fost atinsă o singură dată. Care este probabilitatea ca ținta să fi fost atinsă de primul arcaș?

Rezolvare:

Fie A_i evenimentul nimeririi țintei de către arcașul i, cu $i = \overline{1,3}$ și B evenimentul că un singur arcaș nimerește ținta.

Se cere $\mathbb{P}(A_1|B)$ care este dată de formula $\mathbb{P}(A_1|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Mai întâi observăm că are loc $A_1 \cap B = A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$, deci, evenimentele fiind independente,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap B) = \mathbb{P}\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right)\mathbb{P}\left(\bar{A}_3\right) = p_1 q_2 q_3\,,$$

unde $q_2 = 1 - p_2$, $q_3 = 1 - p_3$.

Pe de altă parte $\mathbb{P}(B)$ se obține din schema lui Poisson și este egală cu coeficientul lui x^1 din polinomul

$$\begin{aligned} Q(x) &= (p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)(p_3 x + q_3) \\ &= p_1 p_2 p_3 x^3 + (p_1 p_2 q_3 + p_1 p_3 q_2 + p_2 p_3 q_1)\, x^2 \\ &\quad + (p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2)\, x + q_1 q_2 q_3\,. \end{aligned}$$

Deci probabilitatea cerută este $\mathbb{P}(A_1|B) = \dfrac{p_1 q_2 q_3}{p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2}$.

Similar se pot determina probabilitățile $\mathbb{P}(A_2|B)$ și $\mathbb{P}(A_3|B)$.

Să menționăm că putem utiliza și formula lui Bayes:

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(B|A_1)}{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(B|A_2) + \mathbb{P}(A_3)\,\mathbb{P}(B|A_3)}\,,$$

unde

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B|A_1) &= \mathbb{P}\left(\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) = \mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right)\cdot\mathbb{P}\left(\bar{A}_3\right) = q_2 q_3\,, \\ \mathbb{P}(B|A_2) &= \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3\right) = \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(\bar{A}_3\right) = q_1 q_3\,, \\ \mathbb{P}(B|A_3) &= \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2\right) = \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right) = q_1 q_2\,. \end{aligned}$$

I.27 Doi arcași trag asupra unei ținte. Probabilitatea fiecăruia de a nimeri ținta este de $1/3$. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă cel puțin o dată?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i, $i = \overline{1,2}$, dată în seminariile precedente, adică să notăm cu A_i evenimentul atingerii țintei de către arcașul $i = \overline{1,2}$.

Acestea sunt evenimente independente. Probabilitatea p de apariție a succesului $p = \mathbb{P}(A_i) = 1/3$ și respectiv $q = 2/3$.

Să folosim și notația standard X_k, $k = \overline{0,2}$, dată în seminariile precedente, adică să notăm cu X_k evenimentul ca ținta să fie atinsă de k ori, unde $k = \overline{0,2}$.

Evenimentul cerut este $X = X_1 \cup X_2$ sau, echivalent, $\bar{X} = X_0$, unde

$$X_0 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2, \qquad X_1 = \left(A_1 \cap \bar{A}_2\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2\right), \qquad X_2 = A_1 \cap A_2\,,$$

adică $X = \left(A_1 \cap \bar{A}_2\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2\right) \cup (A_1 \cap A_2)$ sau, echivalent, $\bar{X} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$. Folosind prima formulă probabilistă dar și independența evenimentelor $(A_i)_{i=\overline{1,2}}$ obținem

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X) &= \mathbb{P}\left(\left(A_1 \cap \bar{A}_2\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2\right) \cup (A_1 \cap A_2)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(A_1 \cap \bar{A}_2\right) + \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap A_2\right) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right) + \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right)\cdot\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2) \\ &= p\cdot q + q\cdot p + p^2 = p^2 + 2pq \end{aligned}$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}(X) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{X}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right) = 1 - q^2.$$

De asemenea, putem folosi schema binomială și obținem direct

$$\mathbb{P}(X) = C_2^1 p^1 q^1 + C_2^2 p^2 q^0 = 2pq + p^2 \quad \text{sau, echivalent,}$$
$$\mathbb{P}(X) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{X}\right) = 1 - C_2^0 p^0 q^2 = 1 - q^2$$

deoarece X reprezintă evenimentul ca succesul să apară cel puțin o dată din două încercări.

I.28 Dintr-un lot de 1000 piese, alegem la întâmplare 100 de piese (punând de fiecare dată piesa înapoi). Știind că 2% dintre piese sunt defecte, care este probabilitatea ca printre piesele alese cel puțin 3 să fie defecte?

Rezolvare:

Evenimentul A constă în alegerea unei piese defecte iar $p = \mathbb{P}(A) = 0.02$. Avem $3 \leq k \leq 20$ și $n = 100$. Atunci probabilitatea evenimentului cerut este, conform schemei binomiale,

$$\mathbb{P}(X) = \sum\nolimits_{k=3}^{20} C_{100}^k (0.02)^k (0.98)^{100-k} .$$

Se poate determina și probabilitatea evenimentului contrar, de a obține maxim două piese defecte. Astfel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{X}) &= \sum\nolimits_{k=0}^{2} C_{100}^k (0.02)^k (0.98)^{100-k}\\ &= C_{100}^0 (0.02)^0 (0.98)^{100} + C_{100}^1 (0.02)^1 (0.98)^{99} + C_{100}^2 (0.02)^2 (0.98)^{98}\\ &= (0.98)^{100} + 100 \cdot 0.02 \cdot (0.98)^{99} + \frac{100 \cdot 99}{2} (0.02)^2 (0.98)^{98} = 0.677,\end{aligned}$$

deci $\mathbb{P}(X) = 0.323$.

I.29 Se consideră experiența aruncării a două zaruri de opt ori. Care este probabilitatea obținerii sumei 7 de trei ori?

Rezolvare:

Să definim A ca fiind evenimentul apariției sumei 7 la aruncarea unei perechi de zaruri. Probabilitatea $p = \mathbb{P}(A) = 6/36$ (sunt 36 de perechi posibile și 6 perechi sunt favorabile). Avem $k = 3$ și $n = 8$. Atunci, conform schemei binomiale, $\mathbb{P}(X) = C_8^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^5$.

I.30 Dacă se aruncă de patru ori un zar, care este probabilitatea să apară cel puțin o dată fața unu?

Dacă se aruncă două zaruri de 24 de ori, care este probabilitatea să apară cel puțin o dată fața unu pe ambele zaruri (i.e. cel puțin o dată dubla $(1, 1)$)?

Dar cel puțin de două ori fața unu pe ambele zaruri (i.e. cel puțin de două ori dubla $(1, 1)$)?

Dar cel puțin de două ori fața unu (pe cel puțin unul din cele două zaruri) (i.e. cel puțin o dată fața unu pe cel puțin două perechi de zaruri)?

Dar cel puțin de două ori fața unu (pe unul singur din cele două zaruri) (i.e. o singură față unu pe cel puțin două perechi de zaruri)?

Rezolvare:

În primul caz, fie A evenimentul de a apărea fața unu. Atunci $\bar{A}$ este evenimentul de a nu apărea fața unu (deci $\bar{A}$ este evenimentul de a apărea doar celalte fețe), iar $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 5/6$. Repetăm experiența de $n = 4$ ori și să definim X ca fiind evenimentul ca $\bar{A}$ să apară de $k = 4$ ori. Conform schemei binomiale,

$$\mathbb{P}(X) = C_4^4 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 .$$

Deci probabilitatea să apară măcar o dată fața unu este $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0.5178$.

În al doilea caz, fie B evenimentul de a apărea fața unu pe ambele zaruri. Atunci $\bar{B}$ este evenimentul de a nu apărea fața unu pe ambele zaruri, iar $\mathbb{P}(\bar{B}) = \frac{35}{36}$. Repetăm experiența de $n = 24$ ori și să definim Y ca fiind evenimentul ca $\bar{B}$ să apară de $k = 24$ ori. Conform schemei binomiale,

$$\mathbb{P}(Y) = C_{24}^{24} \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \left(\frac{1}{36}\right)^{0}.$$

Evident, putem gândi similar Y ca fiind evenimentul ca B să apară de $k = 0$ ori, deci obținem că $\mathbb{P}(Y) = C_{24}^{0} \left(\frac{1}{36}\right)^{0} \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Prin urmare, probabilitatea să apară măcar o dată fața unu pe ambele zaruri este $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0.4914$.

În al treilea caz, fie C evenimentul de a apărea fața unu pe ambele zaruri, iar $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{36}$. Repetăm experiența de $n = 24$ ori și să definim Z ca fiind evenimentul ca C să apară de $k = 0$ sau de $k = 1$ ori. Conform schemei binomiale, $\mathbb{P}(Z) = C_{24}^{0} \left(\frac{1}{36}\right)^{0} \left(\frac{35}{36}\right)^{24} + C_{24}^{1} \left(\frac{1}{36}\right)^{1} \left(\frac{35}{36}\right)^{23}$. Deci probabilitatea să apară cel puțin de două ori fața unu pe ambele zaruri este $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} - 24 \left(\frac{1}{36}\right) \left(\frac{35}{36}\right)^{23} \simeq 0.1427$.

În al patrulea caz, fie D evenimentul de a apărea fața unu, pe cel puțin unul dintre cele două zaruri. Avem $\mathbb{P}(D) = \frac{11}{36}$. Repetăm experiența de $n = 24$ ori și să definim T ca fiind evenimentul ca D să apară de $k = 0$ sau de $k = 1$ ori. Conform schemei binomiale, $\mathbb{P}(T) = C_{24}^{0} \left(\frac{11}{36}\right)^{0} \left(\frac{25}{36}\right)^{24} + C_{24}^{1} \left(\frac{11}{36}\right)^{1} \left(\frac{25}{36}\right)^{23}$. Deci probabilitatea să apară cel puțin o dată fața unu pe cel puțin două perechi de zaruri este $1 - \left(\frac{25}{36}\right)^{24} - 24 \frac{11}{36} \left(\frac{25}{36}\right)^{23} \simeq 0.9943$.

În al cincilea caz, fie E evenimentul de a apărea fața unu, pe un singur zar dintre cele două zaruri. Avem $\mathbb{P}(E) = \frac{10}{36}$. Repetăm experiența de $n = 24$ ori și să definim U ca fiind evenimentul ca E să apară de $k = 0$ sau de $k = 1$ ori. Conform schemei binomiale, $\mathbb{P}(T) = C_{24}^{0} \left(\frac{10}{36}\right)^{0} \left(\frac{26}{36}\right)^{24} + C_{24}^{1} \left(\frac{10}{36}\right)^{1} \left(\frac{26}{36}\right)^{23}$. Deci probabilitatea să apară o singură față unu pe cel puțin două perechi de zaruri este $1 - \left(\frac{26}{36}\right)^{24} - 24 \frac{10}{36} \left(\frac{26}{36}\right)^{23} \simeq 0.986$.