Facultatea de Matematică
*Teoria Probabilităților*, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

# Seminarul 5

## Capitolul I. Spații de probabilitate

**I.31** Într-o urnă sunt $2n$ bile, dintre care $n$ bile albe și $n$ bile negre. Se extrag $n$ bile deodată. Care este probabilitatea extragerii a $k$ bile albe?

Să se deducă apoi identitatea[1]

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^{n-1}\right)^2 + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n .$$

***Rezolvare:***

Să folosim și notația standard $X_k$ , $k = \overline{0, n}$ , introdusă în seminariile precedente, adică să notăm cu $X_k$ este evenimentul ca să fie extrase $k$ bile albe și $(n-k)$ bile negre. Atunci, conform schemei hipergeometrice,

$$\mathbb{P}(X_k) = \frac{C_n^k \cdot C_n^{n-k}}{C_{2n}^n} = \frac{\left(C_n^k\right)^2}{C_{2n}^n} .$$

Pe de altă parte, evenimentele $(X_k)_{k=\overline{0,n}}$ formează un sistem complet de evenimente. Prin urmare,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n X_k\right) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_k) .$$

Deci, ca o consecință, vom obține[2]

$$\sum_{k=0}^n \frac{\left(C_n^k\right)^2}{C_{2n}^n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n .$$

**I.32** Într-un set de $100$ de bilete există $3$ bilete câștigătoare. Un jucător cumpără $40$ de bilete. Care este probabilitatea ca să cumpere un bilet câștigător? Dar probabilitatea ca el să cumpere cel puțin un un bilet câștigător?

***Rezolvare:***

Folosim notația standard: fie $X_r$ evenimentul de a extrage $r$ bilete câștigătoare și a $(40 - r)$ bilete necâștigătoare, $r = \overline{40 - (40 \wedge 96), 40 \wedge 3} = \overline{0, 3}$ .

Probabilitatea de a avea 1 bilet câștigător este, conform schemei hipergeometrice, $\mathbb{P}(X_1) = \dfrac{C_3^1 \cdot C_{97}^{39}}{C_{100}^{40}}$ .

Evenimentul de a extrage cel puțin $1$ un bilet câștigător este $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ , iar probabilitatea este dată de

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 \cup X_2 \cup X_3) &= \mathbb{P}(X_1) + \mathbb{P}(X_2) + \mathbb{P}(X_3) \\ &= \frac{C_3^1 \cdot C_{97}^{39}}{C_{100}^{40}} + \frac{C_3^2 \cdot C_{97}^{38}}{C_{100}^{40}} + \frac{C_3^3 \cdot C_{97}^{37}}{C_{100}^{40}} . \end{aligned}$$

Să observăm că evenimentele $(X_r)_{r=\overline{0,3}}$ formează un sistem complet de evenimente. Prin urmare,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=0}^3 X_r\right) = \sum_{r=0}^3 \mathbb{P}(X_r) .$$

[1] Identitatea se poate demostra folosind și analiza combinatorie.

[2] Să observăm că identitatea cerută se poate obține și direct din identificarea coeficienților lui $x^n$ din scrierea $(a+b)^n (a+b)^n = (a+b)^{2n}$ .

Dar $\mathbb{P}(X_r) = \dfrac{C_3^r \cdot C_{97}^{40-r}}{C_{100}^{40}}$. Prin urmare, obținem următoarea identitate[3],

$$\sum_{r=0}^{3} \frac{C_3^r \cdot C_{97}^{40-r}}{C_{100}^{40}} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad C_3^0 \cdot C_{97}^{40} + C_3^1 \cdot C_{97}^{40-1} + C_3^2 \cdot C_{97}^{40-2} + C_3^3 \cdot C_{97}^{40-3} = C_{100}^{40},$$

care este formula/identitatea algebrică dată în Nota 3, scrisă în cazul $3 = n < k = 40 \le m = 97$.

**I.33** Într-un set de 12 bilete există 8 bilete câștigătoare. Un jucător cumpără 5 bilete. Să se deducă formula/identitatea algebrică dată în Nota 3.

***Rezolvare:***

Folosim notația standard: fie $X_r$ evenimentul de a extrage $r$ bilete câștigătoare și a $(5-r)$ bilete necâștigătoare, cu $r = \overline{5-(5\wedge 4), 5\wedge 8} = \overline{1,5}$.

Să observăm că evenimentele $(X_r)_{r=\overline{1,5}}$ formează un sistem complet de evenimente. Prin urmare,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{5} X_r\right) = \sum_{r=1}^{5} \mathbb{P}(X_r).$$

Dar $\mathbb{P}(X_r) = \dfrac{C_8^r \cdot C_4^{5-r}}{C_{12}^5}$. Astfel vom obține identitatea

$$\sum_{r=1}^{5} \frac{C_8^r \cdot C_4^{5-r}}{C_{12}^5} = 1$$

sau, echivalent,

$$C_8^1 \cdot C_4^4 + C_8^2 \cdot C_4^3 + C_8^3 \cdot C_4^2 + C_8^4 \cdot C_4^1 + C_8^5 \cdot C_4^0 = C_{12}^5,$$

care este formula/identitatea algebrică dată în Nota 3 scrisă în cazul în care $4 = m < k = 5 \le n = 8$.

**I.34** Într-un set de 52 de bile, 4 sunt albe. Bilele se împart în patru grupe egale. Care este probabilitatea ca fiecare grupă să conțină o bilă albă?

***Rezolvare:***

Grupele sunt de câte 13 bile. Probabilitatea ca prima grupă să conțină o bilă albă este, conform schemei hipergeometrice, $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}}$.

Să observăm că cele patru evenimente $A_1, A_2, A_3$ și $A_4$ nu sunt independente (notațiile sunt cele standard).

După formarea primei grupe au rămas 39 de bile dintre care 3 albe. În această condiție, probabilitatea ca a doua grupă să conțină o bilă albă este $\mathbb{P}(A_2|A_1) = \dfrac{C_3^1 \cdot C_{36}^{12}}{C_{39}^{13}}$.

După formarea celei de doua grupe au rămas 26 de bile dintre care 2 albe. În aceste condiții, probabilitatea ca a treia grupă să conțină o bilă albă[4] este $\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \dfrac{C_2^1 \cdot C_{24}^{12}}{C_{26}^{13}}$.

[3] În ceea ce privește restricțiile asupra coeficienților, să **reamintim convenția**:

$$C_b^a = 0 \quad \text{ori de câte ori} \quad a < 0 \quad \text{sau} \quad a > b.$$

Cu această convenție formula se poate scrie sub forma mai simplă

$$\sum_{r=0}^{n+m} C_n^r \cdot C_m^{k-r} = C_{n+m}^k.$$

[4] Să observăm că, în condițiile problemei, probabilitatea ca a patra grupă formată să conțină o bilă albă este $\mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dfrac{C_1^1 \cdot C_{12}^{12}}{C_{13}^{13}} = 1$.

Probabilitatea cerută este atunci

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) \\ &= \frac{C_4^1 \cdot C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}} \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_{36}^{12}}{C_{39}^{13}} \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_{24}^{12}}{C_{26}^{13}}\,.\end{aligned}$$

**I.35 (Problema concordanțelor)** O urnă conține $n$ bile numerotate de la $1$ la $n$. Se extrag la întâmplare, una câte una, toate aceste bile. Spunem că s-a produs o concordanță dacă la extragerea $k$ s-a obținut bila cu numărul $k$. Care este probabilitatea obținerii a cel puțin unei concordanțe?

***Rezolvare:***

Să reamintim notația standard

$$A_i = \{\text{la extragerea } i \text{ apare succesul}\}\,, \quad i = \overline{1,n}\,,$$

adică să notăm cu $A_i$ evenimentul obținerii unei concordanțe la extragerea $i = \overline{1,n}\,.$

Prin urmare, evenimentul obținerii a cel puțin unei concordanțe este dat de $\bigcup_{i=1}^n A_i\,.$

Deci ne interesează calculul probabilității $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big)$.

Sunt $n!$ moduri posibile de a ieși cele $n$ bile. Dacă fixăm poziția $i$, atunci celelalte $(n-1)$ poziții se pot aranja în $(n-1)!$ moduri, adică există $(n-1)!$ de cazuri favorabile. Deci $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$. Se poate raționa și direct: la extragerea $i$ pe poziția $i$ poate apărea oricare din cele $n$ bile, iar numărul cazurilor favorabile este unul singur, prin urmare $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{1}{n}\,.$

Dacă fixăm doi indici $i, j = \overline{1,n}$ astfel încât $i < j$, atunci celelalte $(n-2)$ poziții se pot aranja în $(n-2)!$ moduri, adică există $(n-2)!$ de cazuri favorabile. Deci $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}\,.$ Se poate raționa și direct: la extragerile $i$ și $j$, perechea ordonată $(i,j)$ poate apărea în $A_n^2$ moduri, iar numărul cazurilor favorabile este unul singur, prin urmare $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \dfrac{1}{A_n^2}\,.$

Putem extinde și obținem $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \dfrac{(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{A_n^k}$, unde $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$.

Utilizăm prima formula probabilistă, i.e. probabilitatea unei reuniuni de evenimente:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_i A_i\Big) &= \sum\nolimits_i \mathbb{P}(A_i) - \sum\nolimits_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum\nolimits_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1}\, \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)\,.\end{aligned}$$

Deoarece

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}\,, \quad i = \overline{1,n}$$

sunt în număr de $C_n^1$,

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}\,, \quad i, j = \overline{1,n}\,, \quad \text{astfel încât } i < j,$$

sunt în număr de $C_n^2$,

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!}\,, \quad i, j, k = \overline{1,n}\,, \quad \text{astfel încât } i < j < k,$$

sunt în număr de $C_n^3$, și așa mai departe,

vom obține

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_i A_i\Big) &= C_n^1 \cdot \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \cdot \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \cdot \frac{(n-3)!}{n!} - \ldots \\ &+ (-1)^{n-1}\, C_n^n \cdot \frac{0!}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\, \frac{1}{n!}\,.\end{aligned}$$

Dacă dorim să determinăm probabilitatea de a nu avea nici o concordanță, atunci calculăm

$$\mathbb{P}\Big(\overline{\bigcup_i A_i}\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \, .$$

Reamintim dezvoltarea $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ care devine

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots \, .$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\overline{\bigcup_{i=\overline{1,n}} A_i}\Big) = e^{-1},$$

adică probabilitatea ca să nu se obțină nici măcar o concordanță este, la limită, $e^{-1}$.