Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminarul 6

Capitolul II. Variabile aleatoare discrete

II.1 Să considerăm experiența care constă în aruncarea a două zaruri. Fie X v.a. ale cărei valori reprezintă numărul maxim de puncte apărute pe cele două fețe. Să se scrie tabloul de repartiție și funcția de repartiție. Să se determine media și dispersia v.a. X.

Rezolvare:

Vom lucra pe spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, unde

$$\Omega = \{\omega = (i,j) : i,j \in \{1,2,\ldots,6\}\}$$

și $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{(i,j)\}) = 1/36$ (evenimentele elementare sunt echiprobabile).

Atunci v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este definită de $X(\omega) = \max(i,j)$, pentru orice $\omega = (i,j) \in \Omega$.

Deci

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/36 & 3/36 & 5/36 & 7/36 & 9/36 & 11/36 \end{pmatrix},$$

deoarece

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}\big(\{\,(1,1)\,\}\big) = 1/36, \\ \mathbb{P}(X=2) &= \mathbb{P}\big(\{\,(1,2),(2,1),(2,2)\,\}\big) = 3/36, \\ \mathbb{P}(X=3) &= \mathbb{P}\big(\{\,(1,3),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2)\,\}\big) = 5/36 \end{aligned}$$

ș.a.m.d.

Obținem[1]

$$\mathbb{E}(X) = \sum\nolimits_{k=1}^{6} k \cdot \frac{2k-1}{36} = \frac{1}{18}\sum\nolimits_{k=1}^{6} k^2 - \frac{1}{36}\sum\nolimits_{k=1}^{6} k = \frac{161}{36}.$$

Apoi

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum\nolimits_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{2k-1}{36} = \frac{1}{18}\sum\nolimits_{k=1}^{6} k^3 - \frac{1}{36}\sum\nolimits_{k=1}^{6} k^2 = \frac{791}{36}.$$

Dispersia este

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296}.$$

II.2 Dintr-o urnă se extrage o bilă albă cu probabilitatea p. Se fac două extrageri punându-se bila înapoi după extragere. Fie X, Y v.a. ce reprezintă numărul de bile albe obținute la prima extragere, respectiv la a doua extragere. Să se scrie tabloul de repartiție al v.a. $X, Y, X+Y, XY$ și apoi $X^2, X^3, 5X, X-2$. Să se determine și media și dispersia v.a. obținute.

Rezolvare:

Avem că

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \text{ unde } q = 1-p,$$

adică X, Y sunt două v.a. de tip Bernoulli, mai precis, $X, Y \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$.

[1] Sunt utile formulele:

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum\nolimits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum\nolimits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Deci

$$X+Y:\begin{pmatrix} 0+0 & 0+1 & 1+0 & 1+1 \\ q^2 & pq & pq & p^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{pmatrix},$$

deoarece

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X+Y=0) &= \mathbb{P}(X=0,Y=0)=\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0)=q^2,\\ \mathbb{P}(X+Y=1) &= \mathbb{P}(\{X=0,Y=1\}\cup\{X=1,Y=0\})\\ &= \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=0)=pq+pq=2pq,\\ \mathbb{P}(X+Y=2) &= \mathbb{P}(X=1,Y=1)=\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1)=p^2. \end{aligned}$$

Similar

$$X\cdot Y:\begin{pmatrix} 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \\ q^2 & pq & pq & p^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q^2+2pq & p^2 \end{pmatrix},$$

deoarece

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(XY=0) &= \mathbb{P}(\{X=0,Y=0\}\cup\{X=0,Y=1\}\cup\{X=1,Y=0\})\\ &= \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=0)=q^2+2pq,\\ \mathbb{P}(XY=1) &= \mathbb{P}(X=1,Y=1)=\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1)=p^2. \end{aligned}$$

În final

$$X^2=X\cdot X:\begin{pmatrix} 0\cdot 0 & 1\cdot 1 \\ q & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},$$

deoarece

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X^2=0\right) &= \mathbb{P}(X=0)=q,\\ \mathbb{P}\left(X^2=1\right) &= \mathbb{P}(X=1)=p. \end{aligned}$$

Valoarea medie este

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=0\cdot q+1\cdot p=p,$$

iar $\mathbb{E}(X+Y)=0\cdot q^2+1\cdot 2pq+2\cdot p^2=2p(p+q)=2p.$

Apoi obținem $\mathbb{E}(X\,Y)=0\cdot\left(q^2+2pq\right)+1\cdot p^2=p^2$ iar $\mathbb{E}\left(X^2\right)=0\cdot q+1\cdot p=p.$

II.3 Fie X o v.a. de tip Bernoulli cu parametrul $1/3$. Fie $Y=1-X$. Să se scrie tabloul de repartiție al v.a. Y și să se calculeze $\mathrm{D}^2(Y)$.

Rezolvare:

Dacă $X\sim$ Bernoulli $(1/3)$, atunci

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y=1) &= \mathbb{P}(X=0)=2/3,\\ \mathbb{P}(Y=0) &= \mathbb{P}(X=1)=1/3, \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că $Y\sim$ Bernoulli $(2/3)$.

Dispersia este $\mathrm{D}^2(Y)=1\cdot 2/3\cdot 1/3=2/9.$

II.4 Fie X o v.a. discretă dată de: $\mathbb{P}(X=-1)=1/8$, $\mathbb{P}(X=0)=1/4$, $\mathbb{P}(X=1)=a$. Să se determine a astfel încât X să fie o v.a. Să se determine tipul de distribuție al v.a. $Y=X^2$ și $Z=|X|$. Să se calculeze dispersia și deviația standard a v.a. $1-X$.

Rezolvare:

Să calculăm

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y=1) &= \mathbb{P}(\{X=-1\}\cup\{X=1\})=\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=1)=3/4\\ \mathbb{P}(Y=0) &= \mathbb{P}(X=0)=1/4, \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că $Y\sim$ Bernoulli $(3/4)$.

Similar se obține $Z\sim$ Bernoulli $(3/4)$.

Prin urmare, am obținut două v.a. cu același tablou de repartiție, adică identic distribuite.

Dar, evident, cele două v.a. nu sunt independente.

II.5 Se dau trei urne. Prima conține o bilă albă și una neagră, a doua conține două bile albe și șapte negre iar a treia conține o bilă albă și trei negre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă.

Se cere media și dispersia v.a. care are drept valori numărul de bile albe apărute în cele trei extrageri.

Rezolvare:

V.a. X_i desemnează numărul de bile albe obținute la extragerea din urna $i = \overline{1,3}$ și au tablourile

$$X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7/9 & 2/9 \end{pmatrix}, \quad X_3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Mediile sunt

$$\mathbb{E}(X_1) = 1/2, \quad \mathbb{E}(X_2) = 2/9, \quad \mathbb{E}(X_3) = 1/4$$

iar dispersiile

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2(X_1) &= 1^2 \cdot 1/2 - (1/2)^2 = 1/4, \\ \mathrm{D}^2(X_2) &= 1^2 \cdot 2/9 - (2/9)^2 = 14/81, \\ \mathrm{D}^2(X_3) &= 1^2 \cdot 1/4 - (1/4)^2 = 3/16. \end{aligned}$$

Atunci numărul total de bile albe apărute în cele trei extrageri definește v.a. $X = X_1 + X_2 + X_3$. Obținem

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 1/2 + 2/9 + 1/4 = 35/36$$

și, deoarece X_1, X_2 și X_3 sunt independente,

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{D}^2(X_1) + \mathrm{D}^2(X_2) + \mathrm{D}^2(X_3) = 1/4 + 14/81 + 3/16 = 0.61.$$

II.6 Se dau trei urne. Prima conține o bilă albă și una neagră, a doua conține două bile albe și șapte negre iar a treia conține o bilă albă și trei negre. Din prima urnă se extrage o bilă și se introduce în cea de a doua urnă. Apoi se extrage o bilă din a doua urnă și se introduce în cea de a treia. La sfârșit se extrage o bilă din a treia urnă.

Se cere media și dispersia v.a. care are drept valori numărul de bile albe apărute în cele trei extrageri.

Rezolvare:

V.a. X_i desemnează numărul de bile albe obținute la extragerea din urna $i = \overline{1,3}$. V.a. X_1, X_2 și X_3 nu sunt independente. Numărul total de bile albe apărute în cele trei extrageri definește v.a. $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Tabloul v.a. X_1 este $X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Pentru a determina X_2 folosim formula probabilității totale. Atunci $X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ deoarece

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} = \frac{3}{4}$$

și

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{4}.$$

Similar, $X_3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ deoarece

$$\mathbb{P}(X_3 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 0 | X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 0 | X_2 = 1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{4}$$

și

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 1 | X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 1 | X_2 = 1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4}.$$

Media este
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 1/2 + 1/4 + 1/4 = 1.$$
Pentru dispersie determinăm mai întâi tabloul
$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 8/25 & 21/50 & 1/5 & 3/50 \end{pmatrix}$$
deoarece
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=0) &= \mathbb{P}(X_1=0, X_2=0, X_3=0) = \mathbb{P}(X_1=0)\cdot\mathbb{P}(X_2=0|X_1=0)\cdot\mathbb{P}(X_3=0|X_1=0,X_2=0)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{25}\end{aligned}$$
și
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}(\{X_1=1, X_2=X_3=0\}\cup\{X_1=X_3=0, X_2=1\}\cup\{X_1=X_2=0, X_3=1\})\\ &= \mathbb{P}(X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_2=0|X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_3=0|X_1=1,X_2=0)\\ &\quad+\mathbb{P}(X_1=0)\cdot\mathbb{P}(X_2=1|X_1=0)\cdot\mathbb{P}(X_3=0|X_1=0,X_2=1)\\ &\quad+\mathbb{P}(X_1=0)\cdot\mathbb{P}(X_2=0|X_1=0)\cdot\mathbb{P}(X_3=1|X_1=0,X_2=0)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{5} = \frac{21}{50}\end{aligned}$$
și
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2) &= \mathbb{P}(\{X_1=X_2=1, X_3=0\}\cup\{X_1=X_3=1, X_2=0\}\cup\{X_2=X_3=1, X_1=0\})\\ &= \mathbb{P}(X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_2=1|X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_3=0|X_1=1,X_2=1)\\ &\quad+\mathbb{P}(X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_2=0|X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_3=1|X_1=1,X_2=0)\\ &\quad+\mathbb{P}(X_1=0)\cdot\mathbb{P}(X_2=1|X_1=0)\cdot\mathbb{P}(X_3=1|X_1=0,X_2=1)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$
și
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=3) &= \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1, X_3=1)\\ &= \mathbb{P}(X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_2=1|X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_3=1|X_1=1,X_2=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{50}.\end{aligned}$$

II.7 Fie v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$, independente și care urmează aceeași distribuție[2], cu tablourile date de
$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,n}\,.$$
Fie $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine $\mathbb{E}(S_n)$ și $\mathrm{D}^2(S_n)$.

Rezolvare:

Media este $\mathbb{E}(X_i) = 0\cdot 1/4 + 1\cdot 1/2 + 2\cdot 1/4 = 1$ iar $\mathbb{E}\left(X_i^2\right) = 0^2\cdot 1/4 + 1^2\cdot 1/2 + 2^2\cdot 1/4 = 3/2$, deci $\mathrm{D}^2(X_i) = 3/2 - 1 = 1/2$.

Media este $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = n$ și, deoarece v.a. X_i sunt independente, dispersia este $\mathrm{D}^2(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{D}^2(X_i) = n/2$.

II.8 V.a. X desemnează numărul de produse cumpărate de cineva dintr-un magazin. Știm că
$$\mathbb{P}(0 \le X \le 1) = 8/12, \quad \mathbb{P}(1 \le X \le 2) = 7/12,$$
$$\mathbb{P}(0 \le X < 3) = 10/12, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4)\,.$$

[2] Dacă v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt independente și urmează aceeași distribuție atunci vom scrie prescurtat că v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt **i.i.d.** **(independente și identic distribuite)**.

(a) Să se determine tabloul de repartiție al v.a. X și $2-X$ și $(2-X)^2$.

(b) Să se calculeze media $\mathbb{E}\left(\frac{1}{3X-2}\right)$ și dispersia $\mathrm{D}^2(3X-2)$.

(c) Să se determine și funcția de repartiție F_X.

Rezolvare:

Avem

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(0\le X\le 1)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)=8/12\\
&\mathbb{P}(1\le X\le 2)=\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)=7/12\\
&\mathbb{P}(0\le X<3)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)=10/12.
\end{aligned}$$

Obținem $\mathbb{P}(X=0)=3/12$, $\mathbb{P}(X=1)=5/12$, $\mathbb{P}(X=2)=2/12$.

Apoi

$$\begin{aligned}
1&=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\\
&=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=4)=\frac{3}{12}+\frac{5}{12}+\frac{2}{12}+2\mathbb{P}(X=3),
\end{aligned}$$

deci $\mathbb{P}(X=3)=\mathbb{P}(X=4)=1/12$.

II.9 V.a. X desemnează numărul de produse cumpărate de cineva dintr-un magazin. Știm că

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(0\le X\le 1)=8/12,\quad \mathbb{P}(1\le X\le 2)=7/12,\\
&\mathbb{P}(0\le X<3)=10/12,\quad \mathbb{P}(X=3)=\mathbb{P}(X\ge 4).
\end{aligned}$$

(a) Să se scrie tabloul de repartiție al v.a. X și $2-X$ și $(2-X)^2$.

(b) Să se scrie și funcția de repartiție F_X.

II.10 Fie X o v.a. discretă dată de

$$X:\begin{pmatrix}-3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ a & 5/32 & b & 5/16 & c & 1/32\end{pmatrix}.$$

Se știe că $\mathbb{E}(X)=-1/2$ și că $\mathrm{D}^2(X)=5/4$. Să se determine a,b,c și să se calculeze $\mathrm{D}^2(3-2X)$.

Rezolvare:

Deoarece $\sum_{k=-3}^{2}\mathbb{P}(X=k)=1$, $\mathbb{E}(X)=-1/2$ și $\mathbb{E}(X^2)=\mathrm{D}^2(X)+(\mathbb{E}(X))^2=5/4+1/4=3/2$, obținem

$$\begin{cases}
a+\dfrac{5}{32}+b+\dfrac{5}{16}+c+\dfrac{1}{32}=1\\
-3a-2\cdot\dfrac{5}{32}-b+0\cdot\dfrac{5}{16}+c+2\cdot\dfrac{1}{32}=-\dfrac{1}{2}\\
(-3)^2a+(-2)^2\cdot\dfrac{5}{32}+(-1)^2b+0^2\cdot\dfrac{5}{16}+c+2^2\cdot\dfrac{1}{32}=\dfrac{3}{2}
\end{cases}$$

sau echivalent

$$\begin{cases}
a+b+c=\dfrac{1}{2}\\
-3a-b+c=-\dfrac{1}{4}\\
9a+b+c=\dfrac{3}{4}.
\end{cases}$$

Obținem $a=1/32$, $b=5/16$, $c=5/32$.

Să calculăm

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2(3-2X)&=\mathbb{E}(3-2X)^2-(\mathbb{E}(3-2X))^2=9-12\mathbb{E}(X)+4\mathbb{E}(X^2)-9+12\mathbb{E}(X)-4(\mathbb{E}(X))^2\\
&=4\,\mathrm{D}^2(X)=5.
\end{aligned}$$

II.11 Fie funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $F(x) = \begin{cases} 1+a, & x < 0\,, \\ 2b, & x \in [0,2)\,, \\ c+b, & x \in [2,3)\,, \\ d, & x \geq 3. \end{cases}$

(a) Să se precizeze restricțiile pentru a, b, c, d astfel încât F să fie o funcție de repartiție.

(b) Să se determine a, b, c, d dacă se știe că $\mathbb{P}(X \geq 2.5) = 0.45$ și $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1.5) = 0.50$.

(c) Să se determine și să se justifice tabloul de repartiție al v.a. X astfel încât F să fie funcția ei de repartiție.

Rezolvare:

Din proprietățile funcției de repartiție obținem $a = -1$, $d = 1$ și $b \leq c$. În plus trebuie să impunem ca $2b, c + b \in [0, 1]$.

Avem

$$0.45 = \mathbb{P}(X \geq 2.5) = 1 - \mathbb{P}(X < 2.5) = 1 - F(2.5 - 0) = 1 - c - b$$

și

$$0.50 = \mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1.5) = F(1.5) - F(-1 - 0) = 2b - 1 - a = 2b.$$

Obținem $b = 0.25$ și $c = 0.30$.

Determinăm acum

$$\mathbb{P}(X = 0) = F(0) - F(0 - 0) = 0.50,$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = F(2) - F(2 - 0) = 0.05,$$
$$\mathbb{P}(X = 3) = F(3) - F(3 - 0) = 0.45.$$

Evident, $\mathbb{P}(X = \alpha) = 0$, pentru orice $\alpha \neq 0, 2, 3$ iar tabloul v.a. X este dat de

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0.50 & 0.05 & 0.45 \end{pmatrix}.$$