Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Conf. dr. Lucian MATICIUC

Seminarul 7

Capitolul II. Varibile aleatoare discrete

II.12 Fie două v.a. X, Y, de tip i.i.d. cu $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$. Să se determine $\mathbb{P}(X = Y)$ și $\mathbb{P}(X \leq Y)$.

Rezolvare:

Avem

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)\, \mathbb{P}(Y = k) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

iar

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq Y) &= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y \in \{k, k+1, \dots, n\}) \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) \sum\nolimits_{j=k}^{n} \mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{n^2} \sum\nolimits_{k=1}^{n} \sum\nolimits_{j=k}^{n} 1 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum\nolimits_{k=1}^{n} (n - k + 1) = \frac{1}{n^2}\left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

II.13 Presupunem că probabilitatea unei mașini de a funcționa este de 0.8. Într-un atelier se află cinci mașini. Să se scrie tabloul de repartiție și funcția de repartiție a v.a. X care reprezintă numărul de mașini care funcționează la un moment dat. Să se determine și media v.a. X.

Rezolvare:

Probabilitatea să lucreze k mașini, $0 \leq k \leq 5$, este, conform schemei binomiale, $p_k = C_5^k (0.8)^k (0.2)^{5-k}$. Deci dacă scriem sub forma unui tablou atunci v.a. este dată de

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.0003 & 0.0064 & 0.0512 & 0.2048 & 0.4096 & 0.3277 \end{pmatrix}$$

deoarece

$$\mathbb{P}(X = 1) = C_5^1 (0.8) (0.2)^4 = 0.0064,$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = C_5^2 (0.8)^2 (0.2)^3 = 10 (0.8)^2 (0.2)^3 = 0.0512$$

ș.a.m.d.

Obținem $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.0003 + 1 \cdot 0.0064 + 2 \cdot 0.0512 + \ldots = 4.$

Evident, putem să observăm direct că X este distribuită binomial, i.e. $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, unde $n = 5$ și $p = 0.8$

$$X : \begin{pmatrix} k \\ C_5^k\, p^k q^{5-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,5}}, \text{ cu } q = 0.2.$$

Folosind formulele pentru media și dispersia unei v.a. distribuite binomial obținem imediat:

$$\mathbb{E}(X) = np = 5 \cdot 0.8 = 4$$

$$\mathrm{D}^2(X) = npq = 5 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.8.$$

II.14 Fie A un eveniment cu probabilitatea de realizare $p \in (0,1)$. Fie f_n numărul de realizări ale evenimentului A atunci când repetăm de n ori experiența. Să se arate, folosind inegalitatea lui Cebâșev, că, pentru orice $\epsilon > 0$, are loc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{f_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Să se interpreteze rezultatul.

Rezolvare:

Aplicăm inegalitatea lui Cebâșev v.a. $\dfrac{f_n}{n}$. Evident, $f_n \sim \mathscr{B}(n,p)$, deci

$$\mathbb{E}\Big(\frac{f_n}{n}\Big) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(f_n) = \frac{np}{n} = p$$
$$\mathrm{D}^2\Big(\frac{f_n}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}\mathrm{D}^2(f_n) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}.$$

Obținem $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{f_n}{n} - \mathbb{E}\Big(\dfrac{f_n}{n}\Big)\right| \geq \epsilon\right) \leq \dfrac{pq/n}{\epsilon^2}$, deci

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{f_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{pq}{n\epsilon^2} \to 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

II.15 Fie f_n frecvența absolută de apariție a stemei (adică numărul total de apariții ale stemei) la n aruncări ale unei monede. Definim $X_1 \overset{\text{def}}{=} f_1$, $X_{n+1} \overset{\text{def}}{=} f_{n+1} - f_n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Să se scrie și să se justifice tablourile v.a. f_1, f_2, f_3, f_n și X_1, X_2, X_3, X_n, pentru $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Care e semnificația v.a. X_1, X_2, X_3, X_n.

(b) Să se calculeze $\mathbb{E}(f_n), \mathrm{D}^2(f_n)$ și $\mathbb{E}(X_n), \mathrm{D}^2(X_n)$.

(c) Să se arate, folosind inegalitatea lui Cebâșev, că pentru orice $\epsilon > 0$ are loc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{f_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Să se interpreteze rezultatul.

II.16 Fie v.a. $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Să definim v.a. Y prin $Y = 0$, dacă X este par și $Y = \dfrac{X+1}{2}$, dacă X este impar. Să se scrie tabloul de repartiție al v.a. Y.

Rezolvare:

Avem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=0) &= \mathbb{P}(X \text{ este par}) = \sum\nolimits_{\substack{k=0\\ k \text{ par}}}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=2i) = \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2i}}{(2i)!}\, e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

Pentru $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X=2k-1) = \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}\, e^{-\lambda}.$$

Se verifică și condiția $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k) = 1$:

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k) &= \mathbb{P}(Y=0) + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k) \\ &= \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2i}}{(2i)!}\, e^{-\lambda} + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}\, e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = 1.\end{aligned}$$

II.17 Fie v.a. $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Să definim v.a. Y prin $Y = \dfrac{X}{2}$, dacă X este par și $Y = \dfrac{1-X}{2}$, dacă X este impar. Să se scrie tabloul de repartiție al v.a. Y.

Rezolvare:

Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Dacă $X = 2k$, atunci $Y = k$, iar dacă $X = 2k+1$, atunci $Y = -k$,

Deci, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X=2k) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\, e^{-\lambda}$$

și

$$\mathbb{P}(Y=-k) = \mathbb{P}(X=2k+1) = \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\, e^{-\lambda}$$

iar

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = e^{-\lambda} + \frac{\lambda}{1!}\, e^{-\lambda} = (1+\lambda)\, e^{-\lambda}.$$

Se verifică și faptul că $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(Y=k) = 1$, deoarece

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(Y=k) &= \mathbb{P}(Y=0) + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y=-k) + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k) \\ &= (1+\lambda)\, e^{-\lambda} + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\, e^{-\lambda} + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\, e^{-\lambda} \\ &= (1+\lambda)\, e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum\nolimits_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = (1+\lambda)\, e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \left(\sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} - 1 - \frac{\lambda}{1!} \right) = 1.\end{aligned}$$

II.18 Probabilitatea unui arcaș de a atinge ținta este de $1/3$.

(a) Să se determine tabloul v.a. care are drept valori numărul de trageri înregistrate până când ținta este lovită (prima dată). Să se determine numărul mediu de trageri ce trebuie făcute până când ținta este atinsă.

(b) Aceleași cerințe și în cazul în care v.a. are drept valori numărul de eșecuri înregistrate până când ținta este atinsă.

(c) Să se determine tabloul v.a. care are drept valori numărul de trageri înregistrate până când ținta este atinsă de două ori.

Rezolvare:

(a) Dacă numărăm încercările până la primul succes, atunci v.a. este distribuită geometric cu tabloul

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\frac{1}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} & \ldots & \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Pentru a calcula media și dispersia acesteia folosim seria geometrică (și alte serii obținute imediat din seria geometrică):

$$\mathbb{E}(X) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} = \frac{1}{p} = 3\,,$$

$$\mathrm{D}^2(X) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} - 3^2 = \frac{q}{p^2} = 6.$$

(b) Dacă numărăm eșecurile până la primul succes, atunci v.a. este dată de

$$X : \begin{pmatrix} k \\ pq^k \end{pmatrix}_{k\in\mathbb{N}}.$$

II.19 O urnă conține a bile albe și b bile negre. Se extrag bile din urnă (punând după fiecare extragere bila înapoi). Fie Y_k v.a. care drept valori numărul de bile albe obținute la extragerea $k \in \mathbb{N}^*$ și fie

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

numărul total de bile albe obținute în $n \in \mathbb{N}^*$ extrageri. De asemenea, definim[1]

$$N_1 = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : S_n = 1\}.$$

(a) Să se scrie și să se justifice tablourile v.a. Y_k, S_n și N_1.

(b) Să se arate, folosind semnificația lui S_n și a lui N_1, relația:

$$\{N_1 \leq n\} = \{S_n \geq 1\}$$

[1] Astfel, putem spune că N_1 este **numărul de extrageri necesare până la prima apariție a succesului** (definit ca fiind evenimentul obținerii unei bile albe) sau că N_1 este **rangul extragerii la care se obține pentru prima dată succesul** sau că N_1 este **momentul primei apariții a succesului** sau că N_1 este **timpul de așteptare până la apariția primului succes** într-un șir de încercări independente de tip Bernoulli, cu probabilitatea p de obținere a succesului.

Se va arăta că N_1 urmează distribuția geometrică de parametru p.

și apoi să se deducă tabloul de repartiție al v.a. N_1.

(c) Să se calculeze $\mathbb{E}(Y_k), \mathrm{D}^2(Y_k)$ și să se arată că

$$\mathbb{E}(S_n) = n\,\frac{a}{a+b}, \quad \mathrm{D}^2(S_n) = n\,\frac{ab}{(a+b)^2}$$

și

$$\mathbb{E}(N_1) = \frac{a+b}{a}, \quad \mathrm{D}^2(N_1) = \frac{b(a+b)}{a^2}.$$

II.20 Fie v.a. $X \sim \mathscr{G}(p)$. Să se arate că pentru orice $k, n \in \mathbb{N}$ are loc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = n+k | X > n) = \mathbb{P}(X = k).} \tag{II.0.1}$$

Rezolvare:

În cazul în care $k = 0$ se obține egalitatea.

Să luăm $k > 0$. Folosind tabloul distribuției geometrice precum și forma funcției de repartiție din acest caz, obținem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n+k | X > n) &= \frac{\mathbb{P}(\{X = n+k\} \cap \{X > n\})}{\mathbb{P}(X > n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = n+k)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{pq^{n+k-1}}{q^n} = pq^{k-1} = \mathbb{P}(X = k),\end{aligned}$$

deoarece $\{X = n+k\} \subset \{X > n\}$.

Știm că o v.a. $X \sim \mathscr{G}(p)$ reprezintă numărul de încercări (extrageri, cu revenire, a unei bile dintr-o urnă) până când se obține pentru prima dată evenimentul A, cu $\mathbb{P}(A) = p$ dată. Egalitatea (II.0.1) arată că dacă A nu s-a produs până la încercarea n, atunci numărul k de încercări rămase pentru obținerea pentru prima dată a lui A are aceeași distribuție ca numărul de încercări pentru obținerea lui A într-o distribuție geometrică nouă (ca și cum nu s-ar fi făcut deja cele n încercări). Deci distribuția geometrică este „**fără memorie**”[2]. Acest fapt este legat de jocurile de noroc, deoarece, conform egalității obținute, nici o strategie bazată pe rezultatele obținute în trecut nu poate ajuta jucătorul în deciziile viitoare.

II.21 Fie X, Y două v.a. independente astfel încât $X \sim \mathscr{G}(p_1)$ și $Y \sim \mathscr{G}(p_2)$. Să se determine funcția de repartiție asociată v.a. U precum și legea v.a. U

$$U = \min(X, Y).$$

Rezolvare:

Funcția de repartiție a v.a. U este

$$\begin{aligned}F_U(n) &= 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > n) = 1 - \mathbb{P}(X > n, Y > n) = 1 - \mathbb{P}(X > n) \cdot \mathbb{P}(Y > n) \\ &= 1 - (1 - F_X(n))(1 - F_Y(n)) = 1 - q_1^n\, q_2^n,\end{aligned}$$

[2] Distribuția geometrică este singura distribuție discretă „fără memorie”. În cazul continuu, singura distribuție „fără memorie” este cea exponențială.

deoarece F_X , F_Y corespund unor distribuții geometrice.

Prin urmare, $F_U(n) = 1 - (q_1\, q_2)^n$, deci $U \sim \mathscr{G}(1 - q_1\, q_2)$.

II.22 Fie vectorul aleator discret[3] (X, Y) dat de tabloul bidimensional următor:

$Y \backslash X$	2	4	5
3	0.05	0.05	0.10
5	0.15	0.20	0.15
6	0.10	0.15	0.05

(a) Să se studieze dacă v.a. X, Y sunt independente și apoi să se calculeze covarianța celor două v.a. Să se determine și $F_{(X,Y)}(3, 5)$.

(b) Să se determine covarianța dintre X și Y.

(c) Să se scrie formula de calcul pentru dispersia $\mathrm{D}^2(X - Y)$ și apoi să se determine valoarea acestei dispersii (fără a folosi tabloul v.a. $X - Y$).

(d) Să se determine tabloul v.a. $Z = X - Y$.

Rezolvare:

(a) Să calculăm, mai întâi, **distribuțiile marginale** ale lui X și respectiv Y :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 5) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 6) = 0.05 + 0.15 + 0.1 = 0.3$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 4, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 5) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 6) = 0.05 + 0.2 + 0.15 = 0.4$$

$$\mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(X = 5, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 5) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 6) = 0.1 + 0.15 + 0.05 = 0.3$$

și

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 3) = 0.05 + 0.05 + 0.1 = 0.2$$

$$\mathbb{P}(Y = 5) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 5) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 5) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 5) = 0.15 + 0.2 + 0.15 = 0.5$$

$$\mathbb{P}(Y = 6) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 6) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 6) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 6) = 0.1 + 0.15 + 0.05 = 0.3.$$

Deci v.a. X, Y nu sunt independente[4] deoarece, de exemplu,

$$\mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 3) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06 \neq 0.05 = \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) .$$

[3] Această problemă face parte din Secțiunea 3.4 **Vectori aleatori discreți**, din carte; această Secțiune **nu este prezentată în cadrul Cursului ci doar în cadrul Seminarului (prin aceste exemple concrete).**

[4] Are loc următoarea caracterizare a independenței: dacă $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator discret, atunci

$$X, Y \text{ independente} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y), \quad \text{pentru orice } x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega) .$$

Tablourile v.a. X, Y sunt

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

(b) Pentru a determina covarianța, determinăm mai întâi mediile $\mathbb{E}(X) = 3.7$, $\mathbb{E}(Y) = 4.9$.

Formula de calcul a covarianței[5] este dată de:

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)\ .}$$

unde $\mathbb{E}(XY)$ este dată, în cazul unui vector aleator discret, de formula de calcul:

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} x\, y\, \mathbb{P}(X = x, Y = y)\ ,}$$

deci

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= 2 \cdot 3 \cdot 0.05 + 2 \cdot 5 \cdot 0.15 + 2 \cdot 6 \cdot 0.10 + 4 \cdot 3 \cdot 0.05 + 4 \cdot 5 \cdot 0.20 + 4 \cdot 6 \cdot 0.15 \\ &\quad + 5 \cdot 3 \cdot 0.10 + 5 \cdot 5 \cdot 0.15 + 5 \cdot 6 \cdot 0.05 \\ &= 3.0 + 8.2 + 6.75 = 17.95\,. \end{aligned}$$

Deci $\operatorname{Cov}(X, Y) = 17.95 - 3.7 \cdot 4.9 = -0.18$.

(c) Se utilizează formula

$$\boxed{\mathrm{D}^2(aX + bY) = a^2\,\mathrm{D}^2(X) + b^2\,\mathrm{D}^2(Y) + 2ab\operatorname{Cov}(X, Y)\,, \quad \text{pentru orice } a, b \in \mathbb{R}.}$$

(d) Având în vedere tabloul vectorului aleator (X, Y), tabloul v.a. $Z = X - Y$ este dat de

$$Z : \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.15 & 0.15 & 0.3 & 0.15 & 0.05 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

De exemplu,

$$\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 5) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 6) = 0.05 + 0.2 + 0.05 = 0.3.$$

II.23 Fie (X, Y) un vector aleator discret cu tabloul de repartiție

$Y \backslash X$	2	4
1	a	0.1
2	0.1	0.3
3	a	$3a$

[5] Dacă $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator, atunci **covarianța** dintre X și Y este definită de:

$$\operatorname{Cov}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))\,(Y - \mathbb{E}(Y))\right].$$

(a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât tabloul de mai sus să fie asociat unui vector aleator și apoi să se determine distribuțiile marginale ale v.a. X și Y.

(b) Să se determine și să se justifice tabloul v.a. X^2, $X + 3$ și $2X - 0.5Y + 1$ și să se calculeze dispersia $\mathrm{D}^2\left(2 - 3X\right)$.

(c) Să se calculeze $\mathbb{P}(X + Y \leq 4),\ \mathbb{P}(X \geq 2,\, Y \geq 3),\ \mathbb{P}(Y \leq 3|\, X \geq 2)$ și $F_{(X,Y)}(2, 3)$ (unde $F_{(X,Y)}$ este funcția de repartiție asociată lui (X, Y)).

(d) Să se studieze dacă X și Y sunt independente.