Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminarul 8

Capitolul III. Varibile aleatoare continue

III.1 Să se determine a, b astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = a + b \arctan(x)$ să fie o funcție de repartiție.

Rezolvare:

Impunând condițiile $F(-\infty) = 0$ și $F(+\infty) = 1$ obținem $a = \frac{1}{2}$ și $b = \frac{1}{\pi}$ (ceea ce este suficient ca F să satisfacă și celelate condiții ale unei funcții de repartiție).

III.2 Se dă funcția

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Să se determine a astfel încât F să fie o funcție de repartiție și să se scrie densitatea de repartiție corespunzătoare. Dacă X este o v.a. cu funcția de repartiție F, să se calculeze $\mathbb{P}(0.25 \le X < 0.5)$.

Rezolvare:

Trebuie $a = 1$.

Densitatea de repartiție este dată de $f(x) = F'(x) = 2x\,\mathbb{1}_{[0,1)}(x)$ (există $F'(0) = 0$, dar $F'(1)$ nu există).

Are loc

$$\mathbb{P}(0.25 \le X < 0.5) = F(0.5) - F(0.25) = 0.5.$$

III.3 Să se determine c astfel încât funcția

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = cx\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2-x)\,\mathbb{1}_{(1,2]}(x)$$

să fie o densitate de repartiție. Dacă X este o v.a. cu densitatea f, să se calculeze $F_X(1/2)$.

Rezolvare:

Impunem ca

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 cxdx + \int_1^2 (2-x)\,dx = c\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{c}{2} + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

și obținem $c = 1$.

Avem și

$$F_X(1/2) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1/2} = 1/8\,.$$

III.4 Fie v.a. X cu densitatea de repartiție

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\,.$$

Să se calculeze $\mathbb{P}(1/4 \le X \le 1/2)$.

Rezolvare:

Avem

$$\mathbb{P}(1/4 \le X \le 1/2) = F_X(1/2) - F_X(1/4) = \int_{1/4}^{1/2} f(x)\,dx = \int_{1/4}^{1/2} 2xdx = x^2\Big|_{x=1/4}^{x=1/2} = 3/16\,.$$

III.5 Se dă funcția

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să se determine a astfel încât f să fie o densitate de repartiție. Să se calculeze $\mathbb{P}(X < 1, Y \leq 1)$ și $\mathbb{P}(X < 1, Y \geq 1)$, unde X, Y sunt două v.a. independente care au densitatea f.

Rezolvare:

Obținem $a = 2/\pi$. Într-adevăr, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{e^x+e^{-x}} dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ și se va face substituția $e^x = t$, deci $dt = e^x dx$ și apoi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{e^x + e^{-x}}\, dx = a \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = a\,\pi/2.$$

Deoarece X, Y sunt două observații independente avem, mai întâi,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} f_Y(t)\, dt = F_Y(x).$$

Apoi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 1, Y \leq 1) &= \mathbb{P}(X < 1)\,\mathbb{P}(Y \leq 1) = F_X(1)\, F_Y(1) = (F_X(1))^2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{1} f(x)\, dx\right)^2 = \frac{4}{\pi^2}\left(\int_{-\infty}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx\right)^2 = \\ &= \frac{4}{\pi^2}\left(\arctan(e^x)\Big|_{x=-\infty}^{x=1}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2}\arctan^2(e).\end{aligned}$$

Apoi, folosind $\mathbb{P}(Y \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y < 1)$,

$$\mathbb{P}(X < 1, Y \geq 1) = \mathbb{P}(X < 1)\,\mathbb{P}(Y \geq 1) = F_X(1) \cdot (1 - F_X(1)).$$

III.6 Timpul de viață al unei particule este o v.a distribuită exponențial cu densitatea dată de $f(x) = \dfrac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}\, \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$. Să se determine media de viață a particulei și apoi probabilitatea ca particula să trăiască cel mult 7 de ani.

Rezolvare:

Deoarece X este distribuită exponențial obținem $\lambda = 10^{-1}$. Media de viață este $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 10$ ani.

Probabilitatea cerută este

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 7) = \int_0^7 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = -e^{-\frac{x}{10}}\Big|_{x=0}^{x=7} = 1 - e^{-0.7} \simeq 0.5.$$

III.7 Fie v.a. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Să se arate că pentru orice $s, t > 0$ are loc

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t). \tag{1}$$

Rezolvare:

Folosind forma exactă a funcției de repartiție asociată unei v.a. de tip exponențial avem $\mathbb{P}(X \geq t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}$, pentru orice $t > 0$.

Deci

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) &= \frac{\mathbb{P}(\{X \geq s+t\} \cap \{X \geq s\})}{\mathbb{P}(X \geq s)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{X \geq s+t\})}{\mathbb{P}(X \geq s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X \geq t),\end{aligned}$$

deoarece $\{X \geq s + t\} \subset \{X \geq s\}$.

Dacă avem în vedere timpul de așteptare pentru apariția unui eveniment anume, timp care să presupunem că urmează o distribuție de tip exponențial, atunci proprietatea de a fi „fără memorie” înseamnă că trecutul (până la momentul $X = s$) nu are nici un efect asupra comportamentului viitor. Astfel dacă am ști că timpul de așteptare pentru apariția acelui eveniment este α, atunci, indiferent cât timp ai așteptat deja, timpul până la producerea următorului eveniment este tot α, ca și cum s-ar restarta de fiecare dată.

III.8 Fie o v.a. repartizată uniform $X \sim \mathcal{U}(0,1)$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde:

$$(a)\ U = \ln \frac{1}{X}, \quad (b)\ U = -\frac{1}{\lambda} \ln(X), \quad (c)\ U = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-X),$$
$$(d)\ U = X^2, \quad (e)\ U = X^3, \quad (f)\ U = \sqrt{X},$$
$$(g)\ U = \frac{1}{X}.$$

Rezolvare:

În multe situații este comod să găsim densitatea de repartiție a noii v.a. calculând mai întâi funcția de repartiție a noii v.a. (obținute printr-o transformare simplă, dar nu neapărat bijectivă, a unei alte v.a.). Acest lucru se va face folosind funcția de repartiție a vechii v.a..

Funcția de repartiție a v.a. X este dată de

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \le 0, \\ x, & \text{dacă } x \in (0,1], \\ 1, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

(a) Funcția de repartiție a v.a. U este

$$F_U(u) = \mathbb{P}(U \le u) = \mathbb{P}\left(X \ge e^{-u}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < e^{-u}\right) = 1 - F_X\left(e^{-u}\right),$$

deci

$$F_U(u) = \begin{cases} 1 - e^{-u}, & \text{dacă } e^{-u} \le 1 \\ 1 - 1, & \text{dacă } e^{-u} > 1. \end{cases}$$

Obținem

$$f_U(u) = F_U'(u) = e^{-u}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(u),$$

adică $U \sim \text{Exp}(1)$.

În alte situații este comod să găsim densitatea de repartiție a noii v.a. folosind o formulă de legătura cu densitatea de repartiție a vechii v.a. (noua v.a. este obținute printr-o transformare simplă, dar obligatoriu bijectivă, a unei alte v.a.).

Astfel, putem să determinăm f_U aplicând și formula (2)[1] cu $u = \ln \frac{1}{x}$, deci $x = \Phi(u) = e^{-u}$ și $J(u) = \Phi'(u) = -e^{-u}$, unde $\Phi : [0,\infty) \to (0,1]$.

(b) Similar ca la punctul precedent se obține $f_U(u) = \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(u)$, adică $U \sim \text{Exp}(\lambda)$.

(d) Dacă $u \le 0$, atunci funcția de repartiție este 0 și dacă $u > 0$, atunci

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}\left(X^2 \le u\right) = \mathbb{P}\left(-\sqrt{u} \le X \le \sqrt{u}\right) \\ &= F_X(\sqrt{u}) - F_X(-\sqrt{u}) = F_X(\sqrt{u}), \end{aligned}$$

deci

$$F_U(u) = \begin{cases} \sqrt{u}, & \text{dacă } \sqrt{u} \le 1, \\ 1, & \text{dacă } \sqrt{u} > 1. \end{cases}$$

Obținem

$$f_U(u) = F_U'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\, \mathbb{1}_{(0,1)}(u).$$

---

[1] **Transformări de v.a.**: fie v.a. $X : \Omega \to \mathcal{D}$ și

$$\Phi : \Delta \subset \mathbb{R} \to \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$$

astfel încât $\Phi \in C^1(\Delta)$, inversabilă, atunci $\Phi^{-1}(X)$ este tot o v.a. notată cu U, i.e.

$$U = \Phi^{-1}(X) \quad \Leftrightarrow \quad X = \Phi(U),$$

și are loc următoarea formulă care exprimă **densitatea v.a.** U **folosind densitatea v.a.** X :

$$f_U(u) = f_X(\Phi(u))\left|\Phi'(u)\right|, \quad \text{a.p.t. } u \in \Delta. \tag{2}$$

.

(e) $f_U(u) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\, \mathbb{1}_{(0,1]}(u)$.

(f) $f_U(u) = 2u\, \mathbb{1}_{(0,1]}(u)$.

(g) $f_U(u) = \dfrac{1}{u^2}\, \mathbb{1}_{[1,\infty)}(u)$.

III.9 Fie o v.a. repartizată uniform $X \sim \mathcal{U}[-1,1]$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde:

$$(a)\ U = e^X\,, \quad (b)\ U = 2X+1, \quad (c)\ U = 2X^2+1.$$

Rezolvare:

Funcția de repartiție a v.a. X este dată de

$$F_X(u) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < -1, \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{dacă } x \in [-1,1), \\ 1, & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Funcția de repartiție a v.a. U este

$$F_U(u) = F_X(\ln u) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \ln u \leq -1, \\ \dfrac{1+\ln u}{2}, & \text{dacă } \ln u \in (-1,1], \\ 1, & \text{dacă } \ln u > 1. \end{cases}$$

Obținem

$$f_U(u) = F_U'(u) = \frac{1}{2u}\, \mathbb{1}_{(e^{-1},e]}(u).$$

Putem să calculăm f_U aplicând și formula (2) cu $u = e^x$.

(b) Funcția de repartiție a v.a. U este

$$F_U(u) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{u-1}{2}\right) = F_X\left(\frac{u-1}{2}\right),$$

deci

$$f_U(u) = F_U'(u) = \frac{1}{4}\, \mathbb{1}_{(-1,3)}(u).$$

Putem să calculăm f_U aplicând și formula (2) cu $u = 2x+1$.

(c) Funcția de repartiție a v.a. U este $F_U(u) = 0$, pentru $u < 1$. Pentru $u > 1$ avem

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}\left(X^2 \leq \frac{u-1}{2}\right) = \mathbb{P}\Big(-\sqrt{\frac{u-1}{2}} \leq X \leq \sqrt{\frac{u-1}{2}}\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(X \leq \sqrt{\frac{u-1}{2}}\Big) - \mathbb{P}\Big(X < -\sqrt{\frac{u-1}{2}}\Big) \\ &= F_X\Big(\sqrt{\frac{u-1}{2}}\Big) - F_X\Big(-\sqrt{\frac{u-1}{2}}\Big) = \int_{-\sqrt{\frac{u-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{u-1}{2}}} f_X(t)\, dt, \end{aligned}$$

deci, derivând în raport cu u, avem

$$f_U(u) = F_U'(u) = \Big(\int_{-\sqrt{\frac{u-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{u-1}{2}}} f_X(t)\, dt\Big)_u'.$$

Vom aplica o **teoremă de derivare a integralei cu parametru**. Astfel obținem

$$f_U(u) = \Big(\sqrt{\frac{u-1}{2}}\Big)' f_X\Big(\sqrt{\frac{u-1}{2}}\Big) - \Big(-\sqrt{\frac{u-1}{2}}\Big)' f_X\Big(-\sqrt{\frac{u-1}{2}}\Big)$$

și deci
$$f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{2(u-1)}} \mathbb{1}_{(1,3)}(u),$$
deoarece $0 < \sqrt{\frac{u-1}{2}} < 1$ este echivalent cu $u \in (1,3)$.

Avem și calculul direct:
$$\begin{aligned} f_U(u) = F_U'(u) &= \left[F_X\left(\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)\right]' - \left[F_X\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)\right]' \\ &= F_X'\left(\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)' - F_X'\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2(u-1)}}\left[f_X\left(\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right) + f_X\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Să se studieze și posibilitatea aplicării formulei (2) cu $u = 2x^2 + 1$.

III.10 Fie v.a. $X \sim \mathscr{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde
$$(a)\ U = \cos X, \quad (b)\ U = \tan(X).$$

Rezolvare:

Avem $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi} \mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)$.

(a) Pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funcția $u = \cos x$ nu este inversabilă. Avem
$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}(\cos X \le u) = \mathbb{P}(\cos X \le u,\ X \in (-\pi/2, 0)) + \mathbb{P}(\cos X \le u,\ X \in (0, \pi/2)) \\ &= \mathbb{P}(X \in (-\pi/2, -\arccos u)) + \mathbb{P}(X \in (\arccos u, \pi/2)) \\ &= \int_{-\pi/2}^{-\arccos u} f_X(x)\,dx + \int_{\arccos u}^{\pi/2} f_X(x)\,dx. \end{aligned}$$

Apoi $f_U(u) = F_U'(u) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

(b) Pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funcția $u = \tan(x)$ este inversabilă. Avem
$$F_U(u) = \mathbb{P}(X \le \arctan(u)) = \int_{-\infty}^{\arctan(u)} \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)\,dx.$$

Obținem $f_U(u) = F_U'(u) = (\frac{1}{\pi}\arctan(u) + \frac{1}{2})' = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2}$, adică v.a. $\tan(X)$ este distribuită Cauchy de tip $\mathscr{C}(0,1)$.

III.11 Fie o v.a. $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = e^{-X}$.

Rezolvare:

Densitatea de repartiție a v.a. X este $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Aplicăm formula (2) luând $u = e^{-x}$, deci $\Phi'(u) = -1/u$, unde $\Phi : [0,\infty) \to (0,1]$.

Obținem, pentru $u \in (0,1]$,
$$f_U(u) = \left|\frac{-1}{u}\right| \lambda\, e^{-\lambda(-\ln u)} = \frac{1}{u} \lambda\, e^{\lambda \ln u} = \lambda u^{\lambda-1}.$$

III.12 Fie o v.a. repartizată normal $X \sim \mathscr{N}(0,1)$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde:
$$(a)\ U = 3|X|, \quad (b)\ U = e^{X^2}.$$

Rezolvare:

Densitatea de repartiție a v.a. X este $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(a) Funcția de repartiție a v.a. U este $F_U(u) = 0$, pentru $u < 0$. Pentru $u > 0$ avem

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}(|X| \le u/3) = \mathbb{P}(-u/3 \le X \le u/3) \\ &= F_X(u/3) - F_X(-u/3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u/3}^{u/3} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

Obținem

$$f_U(u) = F_U'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{3} e^{-\frac{(u/3)^2}{2}} - \frac{-1}{3} e^{-\frac{(-u/3)^2}{2}} \right) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} 2e^{-\frac{u^2}{18}}.$$

(b) Funcția de repartiție a v.a. U este $F_U(u) = 0$, pentru $u < 1$. Pentru $\ln u > 0$ sau echivalent $u > 1$,

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}\left(X^2 \le \ln u\right) = \mathbb{P}\big(-\sqrt{\ln u} \le X \le \sqrt{\ln u}\big) \\ &= F_X\big(\sqrt{\ln u}\big) - F_X\big(-\sqrt{\ln u}\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\ln u}}^{\sqrt{\ln u}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

Obținem

$$\begin{aligned} f_U(u) = F_U'(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\ln u}} \frac{1}{u} e^{-\frac{(\sqrt{\ln u})^2}{2}} - \frac{-1}{2\sqrt{\ln u}} \frac{1}{u} e^{-\frac{(-\sqrt{\ln u})^2}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{u\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln u}} e^{-\frac{\ln u}{2}} = \frac{1}{u\sqrt{u}\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln u}}. \end{aligned}$$

Să se studieze și posibilitatea aplicării formulei (2) cu $u = e^{x^2}$, respectiv $u = 3|x|$.

III.13 Fie o v.a. repartizată normal standard $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = \dfrac{1}{1+X^2}$.

Rezolvare:

Funcția de repartiție a v.a. U este, pentru $u \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}\left(X^2 \ge \tfrac{1-u}{u}\right) = \mathbb{P}\Big(\Big\{X \ge \sqrt{\tfrac{1-u}{u}}\Big\} \cup \Big\{X \le -\sqrt{\tfrac{1-u}{u}}\Big\}\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(X \ge \sqrt{\tfrac{1-u}{u}}\Big) + \mathbb{P}\Big(X \le -\sqrt{\tfrac{1-u}{u}}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{1-u}{u}}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{1-u}{u}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{1-u}{u}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2F_X\left(-\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right), \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} f_U(u) = F_U'(u) &= \left(2F_X\left(-\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right)\right)' \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(-\sqrt{\tfrac{1-u}{u}}\right)' e^{-\frac{\left(-\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{u\sqrt{u(1-u)}} e^{-\frac{1-u}{2u}}. \end{aligned}$$

Să se studieze și posibilitatea aplicării formulei (2) cu $u = \frac{1}{1+x^2}$.