Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminarul 9

Capitolul III. Varibile aleatoare continue

III.14 Fie două v.a. independente $X, Y \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, cu $\lambda > 0$, și ϵ o v.a. discretă de tip uniform, independentă de X, Y dată de $\mathbb{P}(\epsilon = 1) = \mathbb{P}(\epsilon = -1) = 1/2$.
(a) Să se calculeze densitatea de repartiție a v.a. $U = \epsilon X$.

(b) Să se determine legea v.a. $V = \begin{cases} X, & \epsilon = 1, \\ -Y, & \epsilon = -1. \end{cases}$

Rezolvare:
(a) Să calculăm funcția de repartiție a lui U :

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}(\epsilon X \le u) = \mathbb{P}(\epsilon X \le u, \epsilon = 1) + \mathbb{P}(\epsilon X \le u, \epsilon = -1) \\ &= \mathbb{P}(X \le u)\,\mathbb{P}(\epsilon = 1) + \mathbb{P}(X \ge -u)\,\mathbb{P}(\epsilon = -1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X \le u) + \mathbb{P}(X \ge -u)\right) = \frac{1}{2}\left(F_X(u) + 1 - F_X(-u)\right). \end{aligned}$$

Dacă $u \le 0$, atunci $F_Y(u) = \frac{1}{2}(1 - F_X(-u))$ iar dacă $u > 0$, atunci $F_Y(u) = \frac{1}{2}(1 + F_X(u))$.

Deci dacă $u \le 0$, atunci

$$f_U(u) = F_U'(u) = \frac{1}{2} F_X'(-u) = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y},$$

iar dacă $u > 0$, atunci

$$f_U(u) = F_U'(u) = \frac{1}{2} F_X'(u) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y}.$$

Obținem că $U = \epsilon X$ are densitatea $f_U(u) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$, deci este distribuită Laplace de parametri $\frac{1}{\lambda}$ și 0.
(b) Să calculăm funcția de repartiție a lui V :

$$\begin{aligned} F_V(v) &= \mathbb{P}(V \le v) = \mathbb{P}(V \le v, \epsilon = 1) + \mathbb{P}(V \le v, \epsilon = -1) \\ &= \mathbb{P}(X \le v, \epsilon = 1) + \mathbb{P}(-Y \le v, \epsilon = -1) \\ &= \mathbb{P}(X \le v)\,\mathbb{P}(\epsilon = 1) + \mathbb{P}(-Y \le v)\,\mathbb{P}(\epsilon = -1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X \le v) + \mathbb{P}(Y \ge -v)\right) = \frac{1}{2}\left(F_X(v) + 1 - F_Y(-v)\right). \end{aligned}$$

Dacă $v \le 0$, atunci $F_V(v) = \frac{1}{2}(1 - F_Y(-v))$ iar dacă $u > 0$, atunci $F_V(v) = \frac{1}{2}(F_X(v) + 1)$.

Deci, dacă $v \le 0$, atunci

$$f_V(v) = F_V'(v) = \frac{1}{2} F_Y'(-v) = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda v},$$

iar dacă $v > 0$, atunci

$$f_V(v) = F_V'(v) = \frac{1}{2} F_X'(v) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda v},$$

adică V este distribuită Laplace de parametri $\frac{1}{\lambda}$ și 0.

III.15 Fie X, Y două v.a. independente astfel încât $X, Y \sim \mathcal{U}[a,b]$. Să se determine densitatea de repartiție a v.a.

$$U = \max(X, Y).$$

Rezolvare:

Funcția de repartiție a v.a. U este

$$F_U(u) = \mathbb{P}(X \le u, Y \le u) = \mathbb{P}(X \le u) \cdot \mathbb{P}(Y \le u) = F_X(u)\, F_Y(u) = F_X^2(u),$$

unde $F_X(u) = F_Y(u)$ sunt calculate deja.

Deci

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } u \le a, \\ \left(\dfrac{u-a}{b-a}\right)^2, & \text{dacă } a < u \le b, \\ 1, & \text{dacă } u > b \end{cases}$$

și

$$f_U(u) = F_U'(u) = 2F_X(u)F_X'(u)\, \mathbb{1}_{[a,b]}(u) = 2\,\frac{u-a}{b-a}\,\frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(u).$$

III.16 Fie X, Y două v.a. independente astfel încât $X, Y \sim \mathcal{U}[a,b]$. Să se determine densitatea de repartiție a v.a.

$$V = \min(X, Y).$$

Rezolvare:

Funcția de repartiție a v.a. V este

$$\begin{aligned} F_V(v) &= 1 - \mathbb{P}(V \ge v) = 1 - \mathbb{P}(X \ge v, Y \ge v) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \ge v) \cdot \mathbb{P}(Y \ge v) = 1 - (1 - F_X(v))\,(1 - F_Y(v)) \\ &= 1 - (1 - F_X(v))^2. \end{aligned}$$

Deci

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } v \le a, \\ 1 - \left(1 - \dfrac{v-a}{b-a}\right)^2, & \text{dacă } a < v \le b, \\ 1, & \text{dacă } v > b \end{cases}$$

și

$$f_V(v) = F_V'(v) = 2\,(1 - F_X(v))\, F_X'(v)\, \mathbb{1}_{[a,b]}(u) = 2\left(1 - \frac{v-a}{b-a}\right)\frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(u).$$

III.17 Fie două v.a. independente, distrubuite uniform, $X \sim \mathcal{U}[0,1]$, $Y \sim \mathcal{U}[0,2]$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_{X+Y}.

Rezolvare:

În formula (1) de calcul a densității sumei[1] a două v.a. folosim expresiile densităților celor două v.a. date în enunț: $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ și $f_Y(y) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[0,2]}(y)$.

[1] Fie X, Y două v.a. independente ale căror densități de repartiție sunt f_X și respectiv f_Y. Atunci

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u - v)\, f_Y(v)\, dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v)\, f_Y(u - v)\, dv, \quad \text{a.p.t. } u \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

Deci

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-v) f_Y(v)\, dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-v)\ \frac{1}{2}\, \mathbb{1}_{[0,2]}(v)\, dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 f_X(u-v)\, dv = \frac{1}{2}\int_0^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(u-v)\, dv. \end{aligned} \tag{2}$$

Să facem schimbarea de variabilă

$$u - v = v' \quad \Leftrightarrow \quad v = u - v' \quad \Rightarrow \quad dv = -dv'$$

și integrala devine

$$f_{X+Y}(u) = \frac{-1}{2}\int_u^{u-2} f_X(v')\, dv' = \frac{1}{2}\int_{u-2}^{u} \mathbb{1}_{[0,1]}(v)\, dv = \frac{1}{2}\int_{[u-2,u]\cap[0,1]} dv.$$

Dacă $u \le 0$, atunci $f_{X+Y}(u) = 0$.
Dacă $u \in (0,1]$, atunci

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{2}\int_{u-2}^{0} f_X(v)\, dv + \frac{1}{2}\int_0^u f_X(v)\, dv = \frac{1}{2}\int_0^u dv = \frac{u}{2}\,.$$

Dacă $u \in (1,2]$, atunci

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{2}\int_{u-2}^{0} f_X(v)\, dv + \frac{1}{2}\int_0^1 f_X(v)\, dv + \frac{1}{2}\int_1^u f_X(v)\, dv = \frac{1}{2}\,.$$

Dacă $u \in (2,3]$, atunci

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{2}\int_{u-2}^{1} f_X(v)\, dv + \frac{1}{2}\int_1^u f_X(v)\, dv = \frac{1}{2}\int_{u-2}^{1} dv = \frac{3-u}{2}\,.$$

Dacă $u > 3$, atunci

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{2}\int_{u-2}^{u} f_X(v)\, dv = 0.$$

O altă abordare este aceea de a rescrie indicatoarea $\mathbb{1}_{[0,1]}(u-v)$ în integrala (2) (în loc de a schimba variabila). Mai precis, avem

$$0 \le u - v \le 1 \quad \text{dacă și numai dacă} \quad u - 1 \le v \le u,$$

deci

$$\mathbb{1}_{[0,1]}(u-v) = \mathbb{1}_{[u-1,u]}(v)\,.$$

Obținem

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{2}\int_0^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(u-v)\, dv = \frac{1}{2}\int_0^2 \mathbb{1}_{[u-1,u]}(v)\, dv = \frac{1}{2}\int_{[u-1,u]\cap[0,2]} dv$$

iar acum avem iarăși discuție în funcție de valorile lui u.

III.18 Fie două v.a. independente, distribuite uniform $X, Y \sim \mathcal{U}[-1,1]$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_{X+Y}.

III.19 Fie două v.a. independente, distribuite uniform $X, Y \sim \mathcal{U}[-1/2,1/2]$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_{X+Y}.

III.20 Fie două v.a. independente cu densitățile de repartiție $f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = X + Y$.

Rezolvare:

Obținem

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-v)\, f_Y(v)\, dv = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u-v|}e^{-|v|}dv.$$

Dacă $u < 0$ atunci

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{u} e^{-|u-v|}e^{v}dv + \frac{1}{4}\int_{u}^{0} e^{-|u-v|}e^{v}dv + \frac{1}{4}\int_{0}^{+\infty} e^{-|u-v|}e^{-v}dv \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{u} e^{2v-u}dv + \frac{1}{4}\int_{u}^{0} e^{u}dv + \frac{1}{4}\int_{0}^{+\infty} e^{u-2v}dv = \frac{e^{u}(1-u)}{4}. \end{aligned}$$

Dacă $u > 0$ atunci prin calcule similare obținem $f_{X+Y}(u) = \frac{e^{-u}(1+u)}{4}$.

III.21 Fie două v.a. independente cu densitățile de repartiție $f_X(x) = f_Y(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x}}$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = X + Y$.

Rezolvare:

Obținem

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-v)\, f_Y(v)\, dv \\ &= \frac{4}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{u-v}+e^{v-u}}\,\frac{1}{e^{v}+e^{-v}}\, dv = \frac{4e^{u}}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2v}}{1+e^{2v}}\,\frac{1}{e^{2u}+e^{2v}}\, dv. \end{aligned}$$

Se face schimbarea de variabilă $e^{2v} = v'$ și deci $dv' = 2e^{2v}dv$ și se obține, calculând o integrală dintr-o funcție rațională,

$$f_{X+Y}(u) = \frac{4e^{u}}{\pi^2}\,\frac{u}{e^{2u}-1}.$$

III.22 Fie două v.a. independente $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, cu $\lambda > 0$. Să se calculeze[2] densitatea de repartiție f_U, unde $U = X - Y$.

Rezolvare:

Aplicăm formula (3) și obținem, pentru $u > 0$,

$$f_{X-Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u+v)\, f_Y(v)\, dv = \lambda^2\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda(u+2v)}dv = \lambda^2 e^{-\lambda u}\,\frac{e^{-2\lambda v}}{-2\lambda}\Big|_{v=0}^{v=+\infty} = \frac{\lambda}{2}\,e^{-\lambda u}.$$

Dacă $u < 0$, atunci $f_X(u+v) \neq 0$ doar dacă $v \geq -u$ și

$$f_{X-Y}(u) = \lambda^2\int_{-u}^{+\infty} e^{-\lambda(u+2v)}dv = \lambda^2 e^{-\lambda u}\,\frac{e^{-2\lambda v}}{-2\lambda}\Big|_{v=-u}^{v=+\infty} = \frac{\lambda}{2}\,e^{\lambda u}.$$

Obținem că $X - Y$ are densitatea $f(u) = \frac{\lambda}{2}\,e^{-\lambda|u|}$, deci este distribuită Laplace de parametri $\frac{1}{\lambda}$ și 0.

III.23 Fie două v.a. independente distribuite exponențial $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Exp}(\mu)$, $\lambda, \mu > 0$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = \dfrac{X}{Y}$.

Rezolvare:

[2] Fie X, Y două v.a. independente ale căror densități de repartiție sunt f_X și respectiv f_Y. Atunci

$$\begin{aligned} f_{X-Y}(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u+v)\, f_Y(u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\, f_Y(u-v)\, du, \quad \text{a.p.t. } v \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Aplicăm formula (5) pentru calculul densității[3] v.a. U și obținem, pentru $u>0$,

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}|v|\,f_X(uv)\,f_Y(v)\,dv=\lambda\mu\int_0^{+\infty}ve^{-(\lambda u+\mu)v}dv$$
$$=\frac{-\lambda\mu}{\lambda u+\mu}\left(ve^{-(\lambda u+\mu)v}\Big|_{v=0}^{v=+\infty}-\frac{e^{-(\lambda u+\mu)v}}{-(\lambda u+\mu)}\Big|_{v=0}^{v=+\infty}\right)=\frac{\lambda\mu}{(\lambda u+\mu)^2}\,.$$

Am folosit $\lim_{v\to+\infty}\frac{v}{e^{(\lambda u+\mu)v}}=0$, unde $\lambda u+\mu>0$.

III.24 Fie două v.a. de tip i.i.d., cu $X,Y\sim\mathscr{U}[0,1]$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U=\dfrac{X}{Y}$.

Rezolvare:

Obținem

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}|v|\;f_X(uv)\;f_Y(v)\,dv=\int_0^1 vf_X(uv)\,dv.$$

Pentru $u<0$ obținem $uv<0$ și deci $f_X(uv)=0$.

Pentru $u\in(0,1)$ obținem, schimbând variabila $uv=v'$, $dv'=udv$ și

$$f_U(u)=\int_0^u\frac{v'}{u}\,f_X(v')\,\frac{dv'}{u}=\frac{1}{u^2}\int_0^u vf_X(v)\,dv=\frac{1}{u^2}\int_0^u vdv=\frac{1}{2}\,.$$

Pentru $u>1$ obținem, schimbând variabila $uv=v'$, $dv'=udv$ și

$$f_U(u)=\frac{1}{u^2}\int_0^u vf_X(v)\,dv=\frac{1}{u^2}\left(\int_0^1 vf_X(v)\,dv+\int_1^u vf_X(v)\,dv\right)=\frac{1}{u^2}\int_0^1 vdv=\frac{1}{u^2}\,\frac{1}{2}\,.$$

III.25 Fie două v.a. independente distribuite normal $X,Y\sim\mathscr{N}(0,\sigma^2)$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U=\dfrac{X}{Y}$.

Rezolvare:

Obținem

$$f_{\frac{X}{Y}}(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}|v|\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{u^2v^2}{2\sigma^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}dv$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\left(\int_{-\infty}^0(-v)\,e^{-\frac{u^2v^2+v^2}{2\sigma^2}}dv+\int_0^{+\infty}ve^{-\frac{u^2v^2+v^2}{2\sigma^2}}dv\right).$$

În prima integrală fac schimbarea de variabilă $v=-v'$ și deci $dv=-dv'$:

$$I_1=\int_{-\infty}^0(-v)\,e^{-\frac{u^2v^2+v^2}{2\sigma^2}}dv=\int_0^{+\infty}ve^{-\frac{(u^2+1)v^2}{2\sigma^2}}dv.$$

Notând cu $v'=-\frac{(u^2+1)v^2}{2\sigma^2}$ obținem $dv'=-\frac{(u^2+1)}{\sigma^2}\,v\,dv$ și

$$I_1=\frac{-\sigma^2}{u^2+1}\left(e^{-\infty}-e^0\right)=\frac{\sigma^2}{u^2+1}\,.$$

[3] Fie X,Y două v.a. independente ale căror densități de repartiție sunt f_X și respectiv f_Y. Atunci

$$f_{X\cdot Y}(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|v|}\,f_X\left(\frac{u}{v}\right)\,f_Y(v)\,dv,\quad\text{a.p.t. } u\in\mathbb{R}\tag{4}$$

și

$$f_{\frac{X}{Y}}(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\;f_X(uv)\;f_Y(u)\,du,\quad\text{a.p.t. } u\in\mathbb{R}.\tag{5}$$

Deci

$$f_{\frac{X}{Y}}(u) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\,\frac{2\sigma^2}{u^2+1} = \frac{1}{\pi\,(u^2+1)}\,,$$

adică raportul a două v.a. distribuite normal $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ este distribuit Cauchy $\mathcal{C}\,(0,1)$.

III.26 Fie două v.a. independente distribuite normal $X \sim \mathcal{N}(\mu_1,\sigma^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma^2)$. Atunci $\dfrac{X-\mu_1}{Y-\mu_2} \sim \mathcal{C}\,(0,1)$.