Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminarul 10

Capitolul III. Varibile aleatoare continue

III.27 Fie două v.a. independente X, Y cu densitățile

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)\,.$$

Să se găsească densitatea de repartiție a v.a. $U = \sqrt{XY}$.

Rezolvare:

Să considerăm transformarea bijectivă $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Delta \to \mathscr{D}$, unde $\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le v \le u^2\right\}$ iar $\mathscr{D} = [1,\infty) \times [1,\infty)$, cu Φ dată de

$$\begin{cases} u = \sqrt{xy}, \\ v = x \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = \Phi_1(u,v) = v, \\ y = \Phi_2(u,v) = \frac{u^2}{v} \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian $J_\Phi(u,v) = \frac{-2u}{v}$.

Obținem

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\Big(v, \frac{u^2}{v}\Big)\Big|\frac{-2u}{v}\Big| = f_X(v)\; f_Y\Big(\frac{u^2}{v}\Big)\frac{2u}{v} = \frac{2}{u^3 v}$$

precum și condițiile $v \ge 1$ și $v \le u^2$.

Din ultima egalitate calculăm densitățile marginale f_U și f_V, folosind (1)[1]

$$f_U(u) = \int_1^{u^2} \frac{2}{u^3 v}\,dv = \frac{2}{u^3}\,\ln u^2, \quad u \ge 1.$$

III.28 Fie două v.a. independente X, Y cu densitățile

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)\,.$$

Să se găsească densitatea de repartiție a vectorului aleator

$$\Big(XY\,,\, \frac{X}{Y}\Big).$$

Rezolvare:

Deoarece v.a. X, Y sunt independente,

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{1}{x^2 y^2}\,\mathbb{1}_{[1,\infty)\times[1,\infty)}(x,y)\,.$$

[1] Dacă $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator bidimensional iar $f_{(X,Y)}$ este densitatea asociată, atunci **densitățile marginale** sunt date de

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy, \\ f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Să considerăm transformarea bijectivă $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Delta \to \mathscr{D}$, unde $\Delta = \{(u, v) \in [1, \infty) \times (0, \infty) : \frac{1}{u} \leq v \leq u\}$ iar $\mathscr{D} = [1, \infty) \times [1, \infty)$, cu Φ dată de

$$\begin{cases} u = x \cdot y, \\ v = x/y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u^{1/2}v^{1/2} = \Phi_1(u, v), \\ y = u^{1/2}v^{-1/2} = \Phi_2(u, v) \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian

$$J_\Phi(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{u^{-1/2}v^{1/2}}{2} & \dfrac{u^{1/2}v^{-1/2}}{2} \\ \dfrac{u^{-1/2}v^{-1/2}}{2} & -\dfrac{u^{1/2}v^{-3/2}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2v}.$$

Obținem, pentru $(u, v) \in \Delta$,

$$f_{(U,V)}(u, v) = f_{(X,Y)}\Big(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\Big) \Big| -\frac{1}{2v} \Big| = \frac{1}{2v} \frac{1}{uv} \frac{1}{uv^{-1}} = \frac{1}{2u^2 v}.$$

III.29 Vectorul aleator (X, Y) este dat prin densitatea de repartiție

$$f(x, y) = \frac{1}{6}(x + 4y)\ \mathbb{1}_{(0,2)\times(0,1)}(x, y).$$

Să se arate că f este o densitate. Să se determine și densitățile de repartiție marginale. Sunt v.a. X, Y independente?

Rezolvare:

Avem

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy = \frac{1}{6}\int_0^2 \left(\int_0^1 (x + 4y)\, dy\right) dx = \frac{1}{6}\int_0^2 \left(xy + 2y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = 1.$$

Densitățile marginale sunt

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy = \frac{1}{6}\mathbb{1}_{(0,2)}(x) \int_0^1 (x + 4y)\, dy \\ &= \frac{1}{6}\mathbb{1}_{(0,2)}(x)\ \left(xy + 2y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{x+2}{6}\mathbb{1}_{(0,2)}(x), \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx = \frac{1}{6}\mathbb{1}_{(0,1)}(y) \int_0^2 (x + 4y)\, dx \\ &= \frac{1}{6}\mathbb{1}_{(0,1)}(y)\ \left(\frac{x^2}{2} + 4xy\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{4y+1}{3}\mathbb{1}_{(0,1)}(y). \end{aligned}$$

V.a. X și Y nu sunt independente deoarece $f_{(X,Y)}(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

III.30 Vectorul aleator (X, Y) este dat prin densitatea de repartiție

$$f(x, y) = Ce^{-\lambda x}\ \mathbb{1}_{\{x\geq 0, |y|\leq x\}}, \text{ cu } \lambda > 0.$$

Să se determine mai întâi C astfel încât f să fie o densitate. Apoi să se determine și densitățile de repartiție marginale. Sunt v.a. X, Y independente?

Rezolvare:

Impunem

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy = C\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda x}\ \mathbb{1}_{\{x\geq 0, |y|\leq x\}} dxdy \\ &= C\int_0^{+\infty}\left(\int_{-x}^{x} e^{-\lambda x} dy\right) dx = 2C\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2C}{-\lambda} xe^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{2C}{-\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{2C}{\lambda}\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{2C}{-\lambda^2}\left(e^{-\infty} - 1\right) = \frac{2C}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

deci $C = \lambda^2/2$.

Densitățile marginale sunt

$$f_X(x) = \frac{\lambda^2}{2}\int_{-x}^{x} e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}dy = \lambda^2 x\,e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\,,$$
$$f_Y(y) = \frac{\lambda^2}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\{|y|\leq x\}}dx = \frac{\lambda^2}{2}\int_{|y|}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda^2}{2}\,\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_{x=|y|}^{x=+\infty} = \frac{\lambda}{2}\,e^{-\lambda|y|}\,.$$

V.a. X și Y nu sunt independente deoarece $f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

Observăm că $X \sim \mathrm{Gamma}(2,\lambda)$, deoarece $\Gamma(2) = 1$, și Y este distribuită Laplace de parametri $\frac{1}{\lambda} > 0$ și 0.

III.31 Vectorul aleator (X,Y) este dat prin densitatea de repartiție

$$f(x,y) = \lambda^2\,e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\{0<y<x\}}\,,\quad \text{cu } \lambda > 0.$$

Să se determine densitățile de repartiție marginale. Sunt v.a. X, Y independente? Să se determine și densitatea vectorului $(Y-X,Y)$.

Rezolvare:

Densitățile marginale sunt

$$f_X(x) = \lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\{0<y<x\}}dy = \lambda^2\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,,$$
$$f_Y(y) = \lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\{0<y<x\}}dx = \lambda^2\int_{y}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)\,dx$$
$$= \int_{y}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \lambda^2\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)\,\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_{x=y}^{x=+\infty} = \lambda\,e^{-\lambda y}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)\,.$$

V.a. X și Y nu sunt independente deoarece $f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

Să considerăm transformarea bijectivă $\Phi = (\Phi_1,\Phi_2) : \Delta \to \mathscr{D}$, unde $\Delta = (-\infty,0)\times(0,+\infty)$ iar $\mathscr{D} = \{(x,y) : 0 < y < x\}$, dată de

$$\begin{cases} u = y - x, \\ v = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \Phi_1(u,v) = v - u\,, \\ y = \Phi_2(u,v) = v \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian $J_\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

Obținem, pentru $(u,v) \in \Delta$,

$$f_{(U,V)}(u,v) = |-1|\,f_{(X,Y)}(v-u,v) = \lambda^2 e^{-\lambda(v-u)}\,\mathbb{1}_{(-\infty,0)\times(0,+\infty)}(u,v)\,.$$

III.32 Vectorul aleator (X,Y) este dat prin densitatea de repartiție

$$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{[0,x]}(y)\,,\quad \text{cu } \lambda > 0.$$

Să se arate că f este o densitate. Să se determine și densitățile de repartiție marginale. Sunt v.a. X, Y independente?

Rezolvare:

Avem

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \lambda^2\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dy\right)dx = 1.$$

Densitățile marginale sunt

$$f_X(x) = \lambda^2 \, \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \int_0^x e^{-\lambda x} dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \, \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x),$$

$$f_Y(y) = \lambda^2 \, \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y) \int_y^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \lambda e^{-\lambda y} \, \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y),$$

deoarece $\mathbb{1}_{[0,x]}(y) = \mathbb{1}_{[y,\infty)}(x)$.

Observăm că v.a. X și Y nu sunt independente deoarece $f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

III.33 Vectorul aleator (X,Y) este dat prin densitatea de repartiție

$$f(x,y) = \frac{y}{(1+x)^4} \, e^{-\frac{y}{1+x}} \, \mathbb{1}_{[0,\infty)\times[0,\infty)}(x,y) \ .$$

Să se găsească densitatea de repartiție a vectorului aleator

$$\Big(\frac{Y}{1+X} \, , \, \frac{1}{1+X}\Big).$$

Rezolvare:

Să considerăm transformarea

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{1+x}\,, \\ v = \dfrac{1}{1+x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{v} - 1, \\ y = \dfrac{u}{v} \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{v^2} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{v^3} \,.$$

Obținem

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(\frac{1}{v} - 1, \frac{u}{v}\right) \left|\frac{1}{v^3}\right| = u e^{-u}.$$

De asemenea din definiția lui u și v obținem $u \geq 0$ și $v \in [0,1]$.

III.34 Densitatea de repartiție a vectorului (X,Y) este

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & \text{dacă } x,y > 0, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \tag{2}$$

Să se calculeze densitate de repartiție v.a. $X+Y$ și $\dfrac{X}{Y}$.

Rezolvare:

Să considerăm transformarea

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = \dfrac{x}{y} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{uv}{1+v}\,, \\ y = \dfrac{u}{1+v} \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{(1+v)^2} \,.$$

Obținem

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v}\right) \left| -\frac{u}{(1+v)^2} \right| = e^{-\left(\frac{uv}{1+v} + \frac{u}{1+v}\right)} \, \frac{u}{(1+v)^2} = e^{-u} \, \frac{u}{(1+v)^2}\,, \quad u,v \geq 0.$$

Din ultima egalitate calculăm densitățile marginale f_U și f_V :

$$f_U(u) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{u}{(1+v)^2} dv = ue^{-u}, \quad v \geq 0,$$

și

$$f_V(v) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{u}{(1+v)^2} du = \frac{1}{(1+v)^2}, \quad v \geq 0.$$

III.35 Vectorul aleator (X, Y) este dat prin densitatea de repartiție (2). Să se calculeze $\mathbb{P}(X < 2Y)$, $\mathbb{P}(X > 1)$ și $\mathbb{P}(X = Y)$.

Rezolvare:

$$\mathbb{P}(X < 2Y) = \mathbb{P}((X, Y) \in \mathscr{D}) = \iint_{\mathscr{D}} e^{-x-y}\, \mathbb{1}_{\{x>0,y>0\}}\, dxdy,$$

unde $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2y\right\}$.

Folosind expresia densității $f_{(X,Y)}$, obținem domeniul de integrare $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > x/2\right\}$, deci

$$\mathbb{P}(X < 2Y) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{x/2}^{+\infty} e^{-x-y} dy \right) dx = 2/3.$$

Densitatea marginală este dată de

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x-y} dy = e^{-x}, \quad x \geq 0,$$

deci

$$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \int_{-\infty}^{1} f_X(x)\, dx = 1 - \int_0^1 e^{-x} dx = e^{-1}.$$

Avem

$$\mathbb{P}(X = Y) = \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}} e^{-x-y} dxdy = 0.$$

III.36 Vectorul aleator (X, Y) este repartizat constant în pătratul de latură a și nul în afara lui. Să se determine $f_{(X,Y)}(x, y)$, $F_{(X,Y)}(x, y)$ precum și densitățile marginale f_X, f_Y . Să se stabilească dacă X și Y sunt independente.

Rezolvare:

Obținem $f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{a^2}\, \mathbb{1}_{\mathscr{D}}(x, y)$, unde $\mathscr{D} = [-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2]$ este un pătrat de latură a centrat în origine.

Densitățile marginale sunt

$$f_X(x) = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a^2}\, \mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}(x)\, dy = \frac{1}{a}\, \mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}(x)$$

$$f_Y(y) = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a^2}\, \mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}(y)\, dx = \frac{1}{a}\, \mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}(y),$$

deci X și Y sunt v.a. independente.

III.37 Fie X o v.a. a cărei densitate de repartiție este:

(a) $f(x) = c \ln\left(\frac{a}{x}\right) \mathbb{1}_{[0,a)}(x)$, (b) $f(x) = |x|\, \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$,

(c) $f(x) = (1 - |1 - x|)\, \mathbb{1}_{(0,2)}(x)$, (d) $f(x) = 2x\, \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$,

(e) $f(x) = ce^{-\frac{x}{\sigma}}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, cu $\sigma > 0$, (f) $f(x) = \frac{1}{x}\, \mathbb{1}_{\{|x-1|\leq c\}}$.

Să se calculeze valoarea medie și dispersia v.a. X (și acolo unde este cazul să se determine mai întâi c).

Rezolvare:

(a) Impunem

$$1=\int_0^a c\ln\left(\frac{a}{x}\right)dx=ac\ln(a)-c\int_0^a\ln(x)\,dx=ac\ln(a)-cx\ln(x)\big|_{x=0}^{x=a}+c\int_0^a dx.$$

Folosind limita $\lim_{x\to 0}x\ln x=0$ obținem $c=1/a$.

Apoi $\mathbb{E}(X)=\frac{a}{4}$ și $\mathbb{E}\left(X^2\right)=\frac{a^2}{9}$.

(b) $\mathbb{E}(X)=0$ și $\mathbb{E}\left(X^2\right)=2\int_0^1 x^2\,|x|\,dx=\frac{1}{2}$.

(c) $\mathbb{E}(X)=1$ și $\mathbb{E}\left(X^2\right)=\frac{14}{3}$.

(d) $\mathbb{E}(X)=\frac{2}{3}$ și $\mathbb{E}\left(X^2\right)=\frac{1}{2}$.

III.38 Fie X o v.a. a cărei densitate este

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)\,\cos x\,.$$

Să se calculeze valoarea medie și dispersia v.a. X și $Y=|\sin X|$.

Rezolvare:

Se obține $\mathbb{E}(X)=0$, $\mathrm{D}^2(X)=\pi^2/4-2$, $\mathbb{E}(Y)=1/2$, $\mathrm{D}^2(Y)=1/12$.

III.39 Să se calculeze media unei v.a. distribuite Cauchy $X\sim\mathscr{C}(0,1)$.

Rezolvare:

Folosind definiția obținem

$$\mathbb{E}(X)=\int_{\mathbb{R}}xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)}dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)}dx=\frac{1}{2\pi}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Observăm că, alegând șirurile $a_n=-n,b_n=n$, limita devine

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_{x=-n}^{x=n}=0$$

iar pentru $a_n=-n,b_n=2n$, limita devine

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_{x=-n}^{x=2n}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1+4n^2}{1+n^2}=\ln 4,$$

ceea ce arată că limita depinde de șirurile alese a_n și b_n astfel încât $a_n\to-\infty$ și $b_n\to+\infty$, adică $x\mapsto\frac{x}{\pi(1+x^2)}$ nu este integrabilă Riemann pe $\mathbb{R}$.

Deci **v.a. distribuită Cauchy este un exemplu de v.a. continuă a cărei medie nu există**.

Să menționăm că, de fapt, pentru a arăta că v.a. X nu admite medie este suficient să studiem existența mediei $\mathbb{E}(|X|)$. Astfel, în cazul unei v.a. de tip Cauchy,

$$\mathbb{E}(|X|)=\int_{\mathbb{R}}|x|\,f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x^2}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{+\infty}=+\infty\,.$$

Prin urmare, v.a. X nu admite medie.

III.40 Să se calculeze media v.a. $Y=\cos X$, unde $X\sim\mathscr{U}[0,2\pi]$.

Rezolvare:

Avem

$$\mathbb{E}(\cos X)=\int_{\mathbb{R}}\cos(x)\,f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x)\,dx=0.$$

III.41 Fie X o v.a. cu densitatea de repartiție $f_X(x) = ae^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Să se determine a și apoi să se calculeze media $\mathbb{E}(X)$, dispersia $\mathrm{D}^2(X)$ și deviația standard $\mathrm{D}(X)$.

Rezolvare:

Funcția este pară și impunem

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} ae^{-|x|}dx = 2a\,\frac{e^{-x}}{-1}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = 2a,$$

deci $a = 1/2$, adică X este o v.a. distribuită Laplace de parametri 1 și 0.

Funcția $xe^{-|x|}$ este impară, deci

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-|x|}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} xe^{-|x|}dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{-|x|}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx.$$

Aplicăm un criteriu de convergență: pentru orice $\alpha > 1$, obținem

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \cdot xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} = 0 < +\infty,$$

deci integrala improprie $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ este convergentă (integrala se poate și calcula folosind metoda de integrare prin părți).

Deci $\mathbb{E}(X) = 0$.

În ceea ce privește dispersia, funcția $x^2e^{-|x|}$ este pară, deci

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-|x|}dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = x^2\,\frac{e^{-x}}{-1}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - 2\int_0^{+\infty} x\,\frac{e^{-x}}{-1}\,dx \\ &= -\frac{x^2}{e^x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 2x\,\frac{e^{-x}}{-1}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{-1}\,dx = 2\,\frac{e^{-x}}{-1}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = 2.\end{aligned}$$

Obținem

$$\mathrm{D}^2(X) = 2 \quad \text{și} \quad \mathrm{D}(X) = \sqrt{2}\,.$$

III.42 Fie v.a. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Să se determine condițiile în care v.a. $Y = e^X$ admite medie și dispersie.

Rezolvare:

Se obține că există media dacă $\lambda - 1 > 0$ iar dispersia dacă $\lambda - 2 > 0$.

Avem

$$\mathbb{E}(Y) = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-1)x} = \frac{\lambda}{-(\lambda-1)}\,e^{-(\lambda-1)x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

și

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-2)x} = \frac{\lambda}{-(\lambda-2)}\,e^{-(\lambda-2)x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-2}\,.$$