Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminarul 11

Capitolul IV. Funcția caracteristică

IV.1 Să se calculeze funcția caracteristică și apoi media și dispersia (cu ajutorul funcției caracteristice) asociate v.a. $X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

Avem[1]

$$\varphi_X(t) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = e^{it(-1)}\frac{1}{2} + e^{it}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) = \cos t.$$

IV.2 Se aruncă două zaruri. Să se scrie funcția caracteristică a v.a. X care ne dă numărul de puncte obținute pe cele două zaruri.

Rezolvare:

Notând cu X_i v.a. care are drept valori numărul de puncte obținute pe zarul $i = \overline{1,2}$, obținem $X = X_1 + X_2$.

Obținem

$$\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathbb{E}\left(e^{itX_2}\right) = \sum\nolimits_{k=1}^{6} e^{itk}\,\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum\nolimits_{k=1}^{6} e^{itk}\,\frac{1}{6},$$

deci, folosind formula[2] (1), obținem

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) = \frac{1}{36}\left(\sum\nolimits_{k=1}^{6} e^{itk}\right)^2.$$

IV.3 Să se calculeze funcția caracteristică și apoi media și dispersia (cu ajutorul funcției caracteristice) asociate v.a. X, unde:

$$\begin{array}{llllll} (a) & X \sim \mathscr{B}(n,p), & (b) & X \sim \mathscr{P}(\lambda), & (c) & X \sim \mathscr{G}(p), \\ (e) & X \sim \mathscr{U}[a,b], & (f) & X \sim \operatorname{Exp}(\lambda), & (g) & X \sim \mathscr{N}(\mu, \sigma^2). \end{array}$$

Rezolvare:

(a) Având în vedere că X are tabloul $X : \begin{pmatrix} k \\ C_n^k\, p^k q^{n-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}$ obținem

$$\varphi_X(t) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} e^{itk}\, C_n^k\, p^k q^{n-k} = \sum\nolimits_{k=0}^{n} C_n^k\, \left(pe^{it}\right)^k q^{n-k}.$$

Deci, folosind binomul lui Newton,

$$\boxed{\varphi_{\mathscr{B}(n,p)}(t) = \left(pe^{it} + q\right)^n.} \tag{2}$$

[1] Folosind definiția exponențialei complexe $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$, pentru $a, b \in \mathbb{R}$, obținem formula $\boxed{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x,}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

[2] Fie X, Y două v.a. cu φ_X, φ_Y funcțiile lor caracteristice. Dacă X, Y sunt independente, atunci

$$\boxed{\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t), \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}.} \tag{1}$$

Evident,

$$\boxed{\varphi_{\text{Bernoulli(p)}}(t) = pe^{it} + q.} \tag{3}$$

Având în vedere că există derivatele $\varphi_X^{(k)}$ de orice ordin k, deducem că există momentele

$$\mu_k \overset{\text{not}}{=\!=} \mathbb{E}(X^k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}.$$

Astfel obținem

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\varphi_X'(0)}{i} = \frac{1}{i}\, n\left(pe^{it}+q\right)^{n-1} i\, pe^{it}\Big|_{t=0} = np$$

și

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) = \frac{\varphi_X''(0)}{i^2} &= \frac{1}{-1}\, i\, pn\big(\left(pe^{it}+q\right)^{n-1} e^{it}\big)'\Big|_{t=0} \\
&= -i\, pn\big(i\,(n-1)\left(pe^{it}+q\right)^{n-2} pe^{it} + i\left(pe^{it}+q\right)^{n-1} e^{it}\big)\Big|_{t=0} \\
&= -i\, pn\big(ip\,(n-1)+i\big) = -i\, pn\,(ipn+iq) = n^2p^2 + npq,
\end{aligned}$$

deci $\mathrm{D}^2(X) = npq$.

Reamintim rezultatul: dacă luăm v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ de tip **i.i.d.** și distribuite Bernoulli,

$$X_k \sim \text{Bernoulli}(p) = \mathscr{B}(1,p),\ k=\overline{1,n} \quad \Rightarrow \quad S_n \overset{\text{not}}{=\!=} \sum\nolimits_{k=1}^{n} X_k \sim \mathscr{B}(n,p).$$

Acest rezultat se poate obține și folosind funcția caracteristică. Într-adevăr, $X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, deci $\varphi_{X_k}(t) = qe^0 + pe^{it}$ și, folosind formula (1), obținem

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod\nolimits_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \left(pe^{it}+q\right)^n.$$

Având în vedere unicitatea funcției caracteristice și formula (2), recunoaștem că $S_n \sim \mathscr{B}(n,p)$.

(b) Având în vedere că X are tabloul $X : \begin{pmatrix} k \\ \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{pmatrix}_{k\in\mathbb{N}}$ obținem, folosind dezvoltarea exponențialei[3] care are loc și pentru numere complexe,

$$\varphi_X(t) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\, e^{\lambda e^{it}}.$$

Deci

$$\boxed{\varphi_{\mathscr{P}(\lambda)}(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}.} \tag{4}$$

Să calculăm

$$\begin{aligned}
&\varphi_X'(t) = i\lambda e^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} \\
&\varphi_X''(t) = i\lambda\big(e^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}\big)' = i\lambda\big(ie^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} + i\lambda(e^{it})^2 e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}\big) = i^2\lambda e^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}\big(1+\lambda e^{it}\big).
\end{aligned}$$

Obținem

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\varphi_X'(0)}{i} = \frac{1}{i}\, i\lambda e^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}\Big|_{t=0} = \lambda$$

și

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{\varphi_X''(0)}{i^2} = \frac{1}{-1}\, i^2\lambda e^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}\left(1+\lambda e^{it}\right)\Big|_{t=0} = \lambda\,(\lambda+1),$$

[3] Are loc $\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

deci $\mathrm{D}^2(X) = \lambda$.

(c) Având în vedere că X are tabloul $X : \begin{pmatrix} k \\ pq^{k-1} \end{pmatrix}_{k\in\mathbb{N}^*}$, obținem

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{itk}\, pq^{k-1} = pe^{it} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(qe^{it}\right)^{k-1}.$$

Folosind seria geometrică[4] care are loc și pentru numere complexe, obținem

$$\varphi_{\mathscr{G}(p)}(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}. \tag{5}$$

(e) Avem

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, f_X(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx} dx.$$

Prin urmare,

$$\varphi_{\mathscr{U}[a,b]}(t) = \frac{1}{b-a}\,\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}. \tag{6}$$

În particular, dacă $X \sim \mathscr{U}[-a,a]$, obținem[5]

$$\varphi_{\mathscr{U}[-a,a]}(t) = \frac{1}{2a}\,\frac{e^{ita} - e^{-ita}}{it} = \frac{\sin(at)}{at}, \tag{7}$$

iar dacă $X \sim \mathscr{U}[-1,1]$, obținem

$$\varphi_{\mathscr{U}[-1,1]}(t) = \frac{\sin t}{t}, \tag{8}$$

dacă $t \neq 0$ și respectiv $\varphi_X(t) = 1$, dacă $t = 0$.

Să mai observăm că dacă luăm v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ de tip **i.i.d.** și distribuite uniform pe $[-1,1]$, i.e. $X_k \sim \mathscr{U}[-1,1]$, atunci $\varphi_{X_k}(t) = \frac{\sin t}{t}$ și, folosind formula (1), obținem

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n,$$

unde $S_n \overset{\text{not}}{=\!=} \sum_{k=1}^n X_k$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

(f) Avem

$$\varphi_X(t) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{itx}\, e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - it)x} dx = \lambda \left.\frac{e^{-(\lambda-it)x}}{-(\lambda - it)}\right|_{x=0}^{x=+\infty}.$$

Deoarece $\lambda > 0$, obținem

$$\lim_{x\to+\infty} |e^{-(\lambda-it)x}| = \lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x}\, |e^{itx}| = \lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0,$$

deci

$$\varphi_{\text{Exp}(\lambda)}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}. \tag{9}$$

(g) Să considerăm mai întâi v.a. normală standard $Y \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathscr{N}(0,1)$.

Luând $x' = x/\sqrt{2}$ obținem

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\sqrt{2}x'} e^{-(x')^2} \sqrt{2}dx' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(it/\sqrt{2})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x - it/\sqrt{2})^2} dx.$$

[4] Are loc $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, pentru orice $|x| < 1$.

[5] Folosind definiția exponențialei complexe obținem formula $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x, \quad$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Utilizând rezultate din teoria funcțiilor complexe se poate arăta că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-it/\sqrt{2})^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\,,$$

deci putem face, formal, schimbarea de variabilă $x - it/\sqrt{2} = y$ și obținem

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(it/\sqrt{2})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-it/\sqrt{2})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(it/\sqrt{2})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\,.$$

Deci

$$\boxed{\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\,.} \tag{10}$$

Folosim apoi legătura $X = \sigma Y + \mu$ pentru a deduce că

$$\varphi_X(t) = \varphi_{\sigma Y+\mu}(t) = e^{it\mu}\, \varphi_Y(\sigma t)\,,$$

deci[6]

$$\boxed{\varphi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(t) = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\,.} \tag{11}$$

Să calculăm acum

$$\begin{aligned}
&\varphi_X'(t) = \left(i\mu - \sigma^2 t\right) e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\\
&\varphi_X''(t) = \left(\left(i\mu - \sigma^2 t\right) e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\right)' = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \left((i\mu - \sigma^2 t)^2 - \sigma^2\right).
\end{aligned}$$

Obținem

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\left(i\mu - \sigma^2 t\right) e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\Big|_{t=0} = \mu$$

și

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{-1} e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \left((i\mu - \sigma^2 t)^2 - \sigma^2\right)\Big|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2,$$

deci $\mathrm{D}^2(X) = \sigma^2$.

IV.4 Să se calculeze, folosind ecuațiile diferențiale, funcția caracteristică și apoi media și dispersia (cu ajutorul funcției caracteristice) asociate v.a. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Rezolvare:

Avem

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Se poate arăta că putem deriva integrala cu parametru și obținem

$$\begin{aligned}
\varphi_X'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)_t' dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx\\
&= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} it e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right) = i^2 t \cdot \varphi_X(t)\,,
\end{aligned}$$

deoarece $\lim_{x\to\pm\infty} |e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}| = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} |e^{itx}| = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$

Obținem că funcția caracteristică satisface ecuația diferențială cu variabile separabile

$$\begin{aligned}
&\varphi_X'(t) = -t\,\varphi_X(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)} = -t \quad \Leftrightarrow \quad \left(\ln \varphi_X(t)\right)' = \left(-\frac{t^2}{2}\right)'\\
&\qquad \Rightarrow \quad \ln \varphi_X(t) - \ln \varphi_X(t_0) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t_0^2}{2} \Leftrightarrow \quad \varphi_X(t) = \varphi_X(t_0)\, e^{-\frac{t^2}{2} + \frac{t_0^2}{2}} = c\, e^{-\frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Impunând $\varphi_X(0) = 1$ obținem $c = 1$, deci

$$\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

[6] Pentru alte metode de demonstrație vezi Exercițiul 4.2.4.

IV.5 Să se calculeze funcția caracteristică asociată v.a. X cu densitatea:

$$(a)\ f_X(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{|x|}{4}\right) \mathbb{1}_{\{|x|\leq 2\}}\,, \quad (b)\ f_X(x) = \frac{a}{2}\, e^{-a|x|}\,, \quad a>0, \quad (c)\ f_X(x) = \frac{a-|x|}{a^2}\, \mathbb{1}_{\{|x|\leq a\}}\,.$$

Rezolvare:

(a) Schimbând variabila și apoi integrând prin părți obținem

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{itx}\left(1-\frac{|x|}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} e^{itx}\left(1+\frac{x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} e^{itx}\left(1-\frac{x}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(1-\frac{x}{2}\right)\left(e^{itx}+e^{-itx}\right)dx = \int_0^2\left(1-\frac{x}{2}\right)\cos(tx)\,dx \\
&= \frac{\sin(tx)}{t}\Big|_{x=0}^{x=2} - \frac{1}{2}\left(x\,\frac{\sin(tx)}{t}\Big|_{x=0}^{x=2} - \frac{1}{t}\,\frac{\cos(tx)}{-t}\Big|_{x=0}^{x=2}\right) \\
&= \frac{\sin(2t)}{t} - \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin(2t)}{t} + \frac{\cos(2t)}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2.
\end{aligned}$$

Să observăm că densitate de repartiție și funcția caracteristică corespund sumei a două v.a. de tip $\mathcal{U}[-1,1]$. Într-adevăr, dacă $U,V\sim\mathcal{U}[-1,1]$ sunt două v.a. independente, atunci, folosind formula (1),

$$\varphi_{U+V}(t) = \varphi_U(t)\cdot\varphi_V(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2,$$

deci cele două funcții caracteristice coincid:

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \varphi_{U+V}(t)\,.$$

(b) Schimbând variabila și apoi integrând prin părți obținem

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, e^{-a|x|}dx = \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{itx}\, e^{-a|x|}dx + \frac{a}{2}\int_0^{+\infty} e^{itx}\, e^{-a|x|}dx \\
&= \frac{a}{2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\left(e^{itx}+e^{-itx}\right)dx = a\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(tx)\,dx = \frac{a^2}{a^2+t^2}\,.
\end{aligned}$$

(c) Schimbând variabila și apoi integrând prin părți obținem

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a} e^{itx}\,(a-|x|)\,dx = \frac{1}{a^2}\int_{-a}^{0} e^{itx}\,(a-|x|)\,dx + \frac{1}{a^2}\int_0^{a} e^{itx}\,(a-|x|)\,dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int_0^a (a-x)\left(e^{itx}+e^{-itx}\right)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a (a-x)\cos(tx)\,dx,
\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \frac{2}{a}\int_0^a \cos(tx)\,dx - \frac{2}{a^2}\int_0^a x\cos(tx)\,dx \\
&= \frac{2}{at}\sin(at) - \frac{2}{a^2t^2}\left(\cos(at) - 1 + at\sin(at)\right) = \frac{4}{a^2t^2}\,\sin^2\left(\frac{at}{2}\right) = \left(\frac{\sin\frac{at}{2}}{\frac{at}{2}}\right)^2.
\end{aligned}$$

IV.6 Să se determine funcțiile de repartiție corespunzătoare v.a. cu următoarele funcții caracteristice:

$$(a)\ \varphi(t) = \cos t, \quad (b)\ \varphi(t) = \cos^2 t, \quad (c)\ \varphi(t) = \frac{1}{4}\left(1+e^{it}\right)^2.$$

Rezolvare:

Deducem mai întâi v.a. care are funcția caracteristică dată. Apoi scriem funcțiile de repartiție corespunzătoare.

(a) Deoarece $\varphi(t) = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$, deducem că v.a. corespunzătoare are tabloul

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

adică X este distribuită discret de tip uniform $X \sim \mathscr{DU}(2)$ cu valorile $\{-1, +1\}$.
(b) Deoarece

$$\varphi(t) = \cos^2 t = \left(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{-2it} + \frac{1}{2}e^{it\,0} + \frac{1}{4}e^{2it},$$

deducem că v.a. corespunzătoare are tabloul

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Pe de altă parte, să observăm că funcția dată inițial se poate scrie sub forma $\varphi(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t)$, unde $\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) = \cos t$, adică X, Y sunt două v.a. de tip i.i.d., cu tablourile date de (12). Deci $\varphi(t) = \varphi_{X_1+X_2}(t)$, adică v.a. căutată este suma $X_1 + X_2$, care se poate calcula ușor. Astfel obținem, din nou, tabloul (13).

(c) Deoarece $\varphi(t) = \frac{1}{4}\left(1 + e^{it}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{4}e^{2it}$, deducem că v.a. corespunzătoare are tabloul

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

IV.7 Fie două v.a. independente $X \sim \mathscr{B}(n, p)\,, Y \sim \mathscr{B}(m, p)$. Să se arate că[7]

$$X + Y \sim \mathscr{B}(n + m, p).$$

IV.8 Fie v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ de tip i.i.d., cu $X_k \sim \text{Bernoulli}(p)\,,\ k = \overline{1, n}$. Să se arate că

$$S_n \overset{\text{not}}{=\!=} \sum\nolimits_{k=1}^{n} X_k \sim \mathscr{B}(n, p).$$

IV.9 Fie două v.a. independente $X \sim \mathscr{P}(\lambda)\,, Y \sim \mathscr{P}(\mu)$. Să se arate că[8]

$$X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda + \mu). \tag{14}$$

Rezolvare:

Avem

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} e^{\mu\left(e^{it}-1\right)} = e^{(\lambda+\mu)\left(e^{it}-1\right)},$$

adică $X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda + \mu)$.

IV.10 Fie v.a. independente $X, Y \sim \mathscr{N}(0, 1)$. Să se arate că

$$X + Y \sim \mathscr{N}(0, 2).$$

Rezolvare:

Avem

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{(\sqrt{2})^2\, t^2}{2}},$$

adică $X + Y \sim \mathscr{N}\big(0, (\sqrt{2})^2\big)$.

[7] Se poate da și o demonstrație directă, folosind definiția v.a. de tip binomial.
[8] Se poate da și o demonstrație directă, folosind definiția v.a. de tip Poisson.