Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminarul 12

Capitolul V. LSNM, LTNM, TLC

V.1 Care este probabilitatea ca la 1000 de aruncări ale unei monede **frecvența absolută** de apariție a stemei să fie între 400 și 600?

Rezolvare:

Să definim **v.a. independente X_k care iau drept valori numărul de apariții ale stemei la aruncarea k a monedei**, deci

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci v.a.

$$S_{10^3} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{10^3} X_k$$

are drept valori numărul de apariții ale stemei la aruncarea de 1000 de ori a unei monede, adică frecvența absolută de apariție a stemei la $n = 10^3$ aruncări.

Deoarece $X_k \sim \mathscr{B}(1, p)$, $k \in \mathbb{N}^*$, obținem $S_{10^3} \sim \mathscr{B}\left(10^3, p\right)$.

Pentru calculul mediei și dispersiei putem folosi formulele de calcul specifice unei v.a. distribuite binomial, dar putem folosi și funcția caracteristică[1], respectiv formulele (1).

Dar putem calcula și direct:

$$\mathbb{E}(S_{10^3}) = \sum_{k=1}^{10^3} \mathbb{E}(X_k) = 10^3 \cdot \mathbb{E}(X_1) = 10^3 \cdot \frac{1}{2}$$

iar dispersia se poate obține folosind independența și dispersia v.a. X_k :

$$\mathrm{D}^2\left(S_{10^3}^2\right) = \mathrm{D}^2\left(\sum_{k=1}^{10^3} X_k\right) = \sum_{k=1}^{10^3} \mathrm{D}^2(X_k) = 10^3 \cdot \mathrm{D}^2(X_1) = 10^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 250.$$

Luând $\epsilon = 10^2$ în **inegalitatea (3) a lui Cebâșev**[2] obținem

$$\mathbb{P}(400 < S_{10^3} < 600) = \mathbb{P}\left(|S_{10^3} - 500| < 10^2\right) \geq 1 - \frac{250}{10^4} = \frac{39}{40}.$$

[1] **Dacă există $\varphi'_X(0), \varphi''_X(0)$, atunci există momentele $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X^2)$ și acestea sunt date de formulele:**

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\varphi'_X(0) \quad \text{și} \quad \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''_X(0). \tag{1}$$

[2] **Inegalitatea lui Cebâșev**: dacă X o v.a. care admite dispersie, atunci

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{D}^2(X)}{\epsilon^2}, \quad \text{pentru orice } \epsilon > 0, \tag{2}$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{D}^2(X)}{\epsilon^2}, \quad \text{pentru orice } \epsilon > 0. \tag{3}$$

V.2 Care este probabilitatea ca la 300 de aruncări ale unui zar **frecvența absolută** de apariție a feței 1 să fie între 40 și 60?

Rezolvare:

Vom folosi **inegalitatea (3) a lui Cebâșev.**

V.3 Fie X v.a. care reprezintă numărul de apariții ale feței 5 a unui zar la 10^5 aruncări ale lui. Să se calculeze limita inferioară a probabilității realizării inegalității

$$\left|\frac{X}{10^5} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{10^2}$$

(este vorba de o estimare a **frecvenței relative** de apariție a feței 5).

Rezolvare:

Evident, $X \sim \mathscr{B}\left(10^5, p\right)$, unde $p = \frac{1}{6}$. Deci frecvența relativă de apariție a feței 5 este $\dfrac{X}{10^5}$.

De fapt, dacă definim **v.a. independente X_k care iau drept valori numărul de apariții ale feței 5 la aruncarea k a zarului**, atunci

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

iar

$$X = S_{10^5} \overset{\text{def}}{=\!=} \sum\nolimits_{k=1}^{10^5} X_k$$

are drept valori **frecvența absolută de apariție a feței 5 la $n = 10^5$ aruncări** iar

$$\frac{X}{10^5} = \frac{S_{10^5}}{10^5} = \frac{\sum_{k=1}^{10^5} X_k}{10^5}$$

are drept valori **frecvența relativă de apariție a feței 5 la $n = 10^5$ aruncări**.

Deoarece $X_k \sim \mathscr{B}\left(1, p\right), k \in \mathbb{N}^*$, obținem $S_{10^3} \sim \mathscr{B}\left(10^5, p\right)$.

Conform formulelor de calcul pentru media și dispersia unei v.a. distribuite binomial, avem

$$\mathbb{E}\left(X\right) = 10^5 \cdot \frac{1}{6} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2\left(X\right) = 10^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6},$$

deci

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_{10^5}}{10^5}\right) = \frac{1}{6} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2\left(\frac{S_{10^5}}{10^5}\right) = \frac{5}{36 \cdot 10^5}.$$

Luând $\epsilon = 10^{-2}$ în **inegalitatea (3) a lui Cebâșev** aplicată v.a. Y obținem

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{10^5}}{10^5} - \frac{1}{6}\right| < 10^{-2}\right) \geq 1 - \frac{5}{10^{-4} \cdot 36 \cdot 10^5} = \frac{71}{72}.$$

Să observăm că putem aplica inegalitatea lui Cebâșev și v.a. $Y = \frac{X}{10^5} - \frac{1}{6}$. Media este $\mathbb{E}\left(Y\right) = 0$ iar

$$\mathrm{D}^2\left(Y\right) = \mathbb{E}\left(Y\right)^2 = \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{10^{10}} - \frac{2X}{6 \cdot 10^5} + \frac{1}{36}\right) = \frac{1}{10^{10}}\mathbb{E}\left(X^2\right) - \frac{1}{3 \cdot 10^5}\mathbb{E}\left(X\right) + \frac{1}{36} = \frac{5}{36 \cdot 10^5}.$$

V.4 Fie X v.a. care reprezintă numărul de apariții ale stemei la n aruncări ale unei monede. Cât de mare trebuie să fie n astfel încât să avem următoarea estimare a **frecvenței relative** de apariție a stemei la cele n aruncări:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10^2}\right) > 0.99\,.$$

Rezolvare:

Evident, $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, unde $p = \frac{1}{2}$. **Conform formulelor de calcul pentru media și dispersia unei v.a. distribuite binomial**, avem

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(X) = \frac{n}{4},$$

deci notând $Y = \frac{X}{n}$ obținem

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(Y) = \frac{1}{4n}.$$

Luând $\epsilon = 10^{-2}$ în **inegalitatea (3) a lui Cebâșev** aplicată v.a. Y obținem

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| < 10^{-2}\right) \geq 1 - \frac{1}{10^{-4}\cdot 4n}.$$

Impunem ca $1 - \frac{10^4}{4n} > 0.99$ și obținem $n > \frac{10^6}{4}$.

V.5 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente două câte două și date de $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1$ și

$$X_k : \begin{pmatrix} -\sqrt{k} & 0 & \sqrt{k} \\ \frac{1}{k} & 1 - 2\frac{1}{k} & \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad k \geq 2.$$

Să se arate că șirul dat **verifică LSNM**[3] **și LTNM**[4].

Rezolvare:

Evident, $X_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ iar $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) = \mathrm{D}^2(X_1) = 0$.

Pentru orice $k \geq 2$,

$$\mathbb{E}(X_k) = 0, \quad \mathbb{E}\left(X_k^2\right) = \mathrm{D}^2(X_k) = 2.$$

Deoarece șirul $\left(\mathrm{D}^2(X_k)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit, obținem că

$$\mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathrm{D}^2\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}\right) = \frac{\mathrm{D}^2\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n \mathrm{D}^2(X_k)}{n^2} \leq \frac{\sum_{k=1}^n M}{n^2} = \frac{M}{n} \to 0, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

deci **are loc condiţia suficientă**[5] **(6) care asigură că şirul dat satisface LSNM**, i.e.

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

[3] Dacă un șir $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. satisface

$$\boxed{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty} \tag{4}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty,}$$

atunci spunem că **șirul dat satisface *legea slabă a numerelor mari (LSNM)***.

[4] Dacă un șir $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. satisface

$$\boxed{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty} \tag{5}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty,}$$

atunci spunem că **șirul dat satisface *legea tare a numerelor mari (LTNM)***.

[5] Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de pătrat integrabil astfel încât

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = 0.} \tag{6}$$

Atunci **șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface *LSNM***.

deoarece

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k\right)}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_1\right)}{n} = \frac{n\mathbb{E}\left(X_1\right)}{n} = \mathbb{E}\left(X_1\right) = 0.$$

Observăm că **are loc condiţia suficientă**[6] **(7) care asigură că şirul dat satisface LTNM** deoarece

$$\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{D}^2\left(X_k\right)}{k^2} \leq \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{M}{k^2} = M \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

deci

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

V.6 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente două câte două și date de $\mathbb{P}\left(X_1 = 0\right) = 1$ și

$$X_k : \begin{pmatrix} -\sqrt{\ln k} & \sqrt{\ln k} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad k \geq 2.$$

Să se arate că **șirul dat verifică LSNM**.

Rezolvare:

Să calculăm $\mathbb{E}\left(X_1\right) = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) = \mathrm{D}^2\left(X_1\right) = 0$ iar pentru orice $k \geq 2$,

$$\mathbb{E}\left(X_k\right) = 0, \quad \mathbb{E}\left(X_k^2\right) = \mathrm{D}^2\left(X_k\right) = \ln k\,.$$

Avem

$$\mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathrm{D}^2\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}^2\left(X_k\right)}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln k}{n^2}.$$

Observăm că șirul $\left(\mathrm{D}^2\left(X_k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ nu este mărginit, deci nu obţinem imediat că $\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = 0$, dar, aplicând **Lema lui Stolz-Cezaro**[7], obținem

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln k}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(n+1\right)}{\left(n+1\right)^2 - n^2} = 0.$$

Deci are loc condiţia suficientă (6) care asigură că şirul dat satisface LSNM.

V.7 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente în ansamblu și date de

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 - \frac{1}{k^2} & \frac{1}{k^2} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că **șirul dat satisface LTNM**.

Rezolvare:

Avem $\mathbb{E}\left(X_k\right) = \frac{1}{k}$ și $\mathrm{D}^2\left(X_k\right) = 1 - \frac{1}{k^2}$. Deoarece

$$\sum\nolimits_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{D}^2\left(X_k\right)}{k^2} = \sum\nolimits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum\nolimits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} < +\infty,$$

Deci **are loc condiţia suficientă (7) care asigură că şirul dat satisface LTNM**.

[6] Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente în ansamblu și de pătrat integrabil astfel încât

$$\boxed{\sum\nolimits_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{D}^2\left(X_k\right)}{k^2} < +\infty.} \tag{7}$$

Atunci **șirul** $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ **satisface** ***LTNM***.

[7] **Lema lui Stolz-Cezaro**: fie $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ două șiruri astfel încât șirul $(b_n)_n$ este strict monoton și nemărginit; dacă există $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci există și $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ și este egală tot cu ℓ.