Facultatea de Matematică
Teoria Probabilităților, Semestrul IV
Conf. dr. Lucian MATICIUC

Seminarul 13

Capitolul V. LSNM, LTNM, TLC

V.8 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente în ansamblu și date de

$$X_k : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

și $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de numere pozitive astfel încât $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$.

Să definim

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k\,, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\, X_k\,, \quad \text{unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Să se arate că $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ și $\dfrac{T_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

(b) Să se determine tipul distribuției v.a. $\dfrac{1+X_k}{2}$ și apoi al v.a. $\dfrac{S_n+n}{2}$.

(c) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \left[\cos\left(\frac{a_1 t}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \cos\left(\frac{a_n t}{n}\right)\right] = 1, \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare:

(a) Avem $\mathbb{E}(X_k) = 0$ și $\mathrm{D}^2(X_k) = 1$, deci

$$\mathbb{E}(S_n) = 0, \qquad \mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, \mathbb{E}(X_k) = 0,$$

$$\mathrm{D}^2(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}^2(X_k) = n, \qquad \mathrm{D}^2(T_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2\, \mathrm{D}^2(X_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2\,.$$

Deoarece șirul $\left(\mathrm{D}^2(X_k)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit, obținem că

$$\mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathrm{D}^2(S_n)}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}^2(X_k)}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

deci **este satisfăcută condiţia suficientă şi astfel are loc LSNM**, i.e. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Deoarece

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{D}^2(X_k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

avem că **este satisfăcută condiţia suficientă şi astfel are loc LTNM**, i.e. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

Pe de altă parte, **aplicând Lema lui Stolz-Cezaro** obținem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{D}^2(T_n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2}{(n+1)^2-n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=0.$$

Deci **este satisfăcută condiţia suficientă şi astfel şirul** $(a_kX_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ **satisface LSNM**, i.e. $\frac{T_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0.$

Evident, **convergența în probabilitate se obține și prin aplicarea directă a inegalității lui Cebâșev:**

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n}\right|<\epsilon\right)\geq 1-\frac{\mathrm{D}^2\left(\frac{T_n}{n}\right)}{\epsilon^2}\to 1\,,\quad \text{pentru } n\to\infty.$$

(b) Să arătăm că $\frac{S_n+n}{2}\sim\mathscr{B}(n,1/2)$ **folosind funcția carateristică.**

Vom calcula $\varphi_{\frac{S_n+n}{2}}$ folosind $\varphi_{X_k}(t)=\frac{1}{2}e^{-i\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}e^{i\frac{t}{2}}$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$ și $t\in\mathbb{R}$:

$$\varphi_{\frac{S_n+n}{2}}(t)=\varphi_{\frac{\sum_{k=1}^n X_k+n}{2}}(t)=\varphi_{\sum_{k=1}^n\frac{1+X_k}{2}}(t)=\prod_{k=1}^n\varphi_{\frac{1+X_k}{2}}(t)=\prod_{k=1}^n\mathbb{E}\Big(e^{it\frac{1+X_k}{2}}\Big)$$
$$=\prod_{k=1}^n e^{i\frac{t}{2}}\mathbb{E}\Big(e^{i\frac{t}{2}X_k}\Big)=e^{i\frac{nt}{2}}\prod_{k=1}^n\varphi_{X_k}\Big(\frac{t}{2}\Big)=e^{i\frac{nt}{2}}\Big(\varphi_{X_1}\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)^n$$
$$=e^{i\frac{nt}{2}}\Big(\frac{1}{2}e^{-i\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}e^{i\frac{t}{2}}\Big)^n=\Big(\frac{1}{2}e^{it}+\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Să observăm că am obţinut

$$\varphi_{\frac{S_n+n}{2}}(t)=\Big(\frac{1}{2}e^{it}+\frac{1}{2}\Big)^n=\varphi_U(t),\quad \text{unde } U\sim\mathscr{B}(n,1/2)\,,$$

și, **folosind proprietatea de unicitate**, deducem concluzia.

(c) **Folosind legăturile (1) și (2) dintre convergențe**[1] avem

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\frac{T_n}{n}}(t)=\varphi_0(t)\,,\quad \text{pentru orice } t\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Dar $\varphi_0(t)=\mathbb{E}\left(e^{it\cdot 0}\right)=1$ iar

$$\varphi_{\frac{T_n}{n}}(t)=\varphi_{\frac{\sum_{k=1}^n a_kX_k}{n}}(t)=\varphi_{\sum_{k=1}^n\frac{a_kX_k}{n}}(t)=\prod_{k=1}^n\varphi_{\frac{a_kX_k}{n}}(t)$$
$$=\prod_{k=1}^n\mathbb{E}\Big(e^{it\frac{a_kX_k}{n}}\Big)=\prod_{k=1}^n\varphi_{X_k}\Big(\frac{a_k t}{n}\Big)=\prod_{k=1}^n\cos\Big(\frac{a_k t}{n}\Big),$$

[1] Are loc următoarea **legătură dintre convergența în probabilitate și convergența în funcția de repartiție**:

$$\boxed{X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X\quad\Longrightarrow\quad X_n\xrightarrow{F}X} \tag{1}$$

(v.a. X,X_n sunt definite pe același spațiu de probabilitate $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$).

Are loc următoarea **legătură dintre convergența în probabilitate și convergența în funcția de repartiție**:

$$\boxed{X_n\xrightarrow{F}c\quad\Longrightarrow\quad X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}c,}$$

unde c este o v.a. constantă.

Are loc următoarea **legătură dintre convergența în funcția de repartiție și convergența în funcția caracteristică**:

$$\boxed{X_n\xrightarrow{F}X\quad\Longleftrightarrow\quad X_n\xrightarrow{\varphi}X.} \tag{2}$$

deoarece $\varphi_{X_k}(t) = e^{it(-1)}\frac{1}{2} + e^{it}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) = \cos t$.

Deci (3) devine

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a_k\, t}{n}\right) = 1, \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

V.9 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente în ansamblu și date de

$$X_k : \begin{pmatrix} -k^\alpha & k^\alpha \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha < \frac{1}{2}$$

și fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că:

$$(a) \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0\,;$$

$$(b) \quad \lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(\frac{t}{n}\right)\cdot\cos\left(\frac{2^\alpha t}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{n^\alpha t}{n}\right)\right] = 1,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

(a) Avem $\mathbb{E}(X_k) = 0$ și $\mathrm{D}^2(X_k) = k^{2\alpha}$, deci

$$\mathbb{E}(S_n) = 0,$$

$$\mathrm{D}^2(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}^2(X_k) = \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha},$$

Aplicând **Lema lui Stolz-Cezaro** obținem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{D}^2(S_n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha}}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2\alpha}}{(n+1)^2 - n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2\alpha}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\alpha}}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = 0,$$

deoarece $1 - 2\alpha > 0$.

Deci **este satisfăcută condiţia suficientă şi astfel are loc LSNM**, i.e. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Avem și

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{D}^2(X_k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^{2\alpha}}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2-2\alpha}} < \infty,$$

deoarece $2 - 2\alpha > 1$.

Deci **este satisfăcută condiţia suficientă şi astfel are loc LTNM**, i.e. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

(b) Folosind **legăturile (1) și (2) dintre convergențe** avem

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_0(t) = 1, \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

Dar

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_{\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}}(t) = \varphi_{\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{n}}(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{\frac{X_k}{n}}(t)$$
$$= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(e^{it\frac{X_k}{n}}\Big) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k^\alpha t}{n}\right),$$

deoarece $\varphi_{X_k}(t) = e^{it(-k^\alpha)}\frac{1}{2} + e^{itk^\alpha}\frac{1}{2} = \cos(k^\alpha t)$.

Deci obținem

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k^\alpha t}{n}\right) = 1, \quad \text{pentru orice } t\in\mathbb{R}.$$

V.10 Fie șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip i.i.d., cu $X_k \sim \mathscr{U}[-1,\,1]$, unde $k\in\mathbb{N}^*$ și $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}X_k$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Să se arate că $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, pentru $n\to\infty$.

(b) Să se determine funcțiile caracteristice $\varphi_{Y_1}, \varphi_{Y_2}, \varphi_{Y_3}$. Folosind (a) și legăturile dintre tipurile de convergențe să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^n}{\sqrt[3]{n!}}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\sin\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{n}\right)\right] = 1.$$

V.11 Fie $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de numere pozitive astfel încât $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$ și $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip i.i.d. (independența este în ansamblu), cu $X_k\sim\mathscr{U}[-1,1]$, $k\in\mathbb{N}^*$.

Să definim

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}X_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n}a_kX_k, \quad \text{unde } n\in\mathbb{N}^*.$$

Să se arate că:

$$(a)\quad \frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0, \quad \frac{S_n}{n}\xrightarrow{\text{a.s.}}0 \quad \text{și} \quad \frac{T_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0 \quad \text{pentru } n\to\infty;$$

$$(b)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^n}{a_1a_2\ldots a_n}\sin\left(\frac{a_1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\sin\left(\frac{a_n}{n}\right)\right] = 1.$$

V.12 Care este probabilitatea ca la 500 de aruncări ale unui zar **frecvența absolută** de apariție a feței 6 să fie cel mult 90?

Rezolvare:

Să definim v.a. S_{500} care **are drept valori numărul de apariții ale feței** 6 **la aruncarea de** 500 **de ori a unui zar**.

Evident, $S_{500}\sim\mathscr{B}(500,1/6)$. Conform **formulelor de calcul pentru media și dispersia unei v.a. distribuite binomial**, avem

$$\mathbb{E}(S_{500}) = 500\cdot\frac{1}{6} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(S_{500}) = 500\cdot\frac{5}{36}.$$

Se cere **determinarea probabilității**

$$\mathbb{P}(S_{500}\le 90).$$

Să observăm că **nu mai putem aplica inegalitatea lui Cebâșev deoarece aceasta ne dă doar estimări de tipul**

$$\mathbb{P}(|S_{500}-\mathbb{E}(S_{500})|<\epsilon) = \mathbb{P}(\mathbb{E}(S_{500})-\epsilon < S_{500} < \mathbb{E}(S_{500})+\epsilon),$$

adică X să ia **valori în intervalul centrat** $(\mathbb{E}(S_{500})-\epsilon, \mathbb{E}(S_{500})+\epsilon)$.

În cazul nostru **vom folosi relația (6) dată de TLC**[2]. Astfel, pentru orice $-\infty \leq a < b \leq +\infty$,

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{S_{500} - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a).$$

Vom lua $a = -\infty$ și $b = \frac{90-500/6}{\sqrt{500 \cdot 5/36}} = \frac{4}{5}$, deci

$$\mathbb{P}(S_{500} \leq 90) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{500} - 500/6}{\sqrt{500 \cdot 5/36}} \leq \frac{90 - 500/6}{\sqrt{500 \cdot 5/36}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{500} - 500/6}{\sqrt{500 \cdot 5/36}} \leq \frac{4}{5}\right)$$
$$\simeq \Phi\left(\frac{4}{5}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(0.8) - 0 = 0.788145.$$

V.13 Care este probabilitatea ca la 100 de aruncări ale unei monede frecvența absolută de apariție a stemei să fie cuprinsă între 40 și 60?

Rezolvare:

Să definim v.a. $S_{100} \sim \mathscr{B}(100, 1/2)$ care **are drept valori numărul de apariții ale stemei la** 100 **de aruncări ale unei monede**. Conform **formulelor de calcul pentru media și dispersia unei v.a. distribuite binomial**, avem

$$\mathbb{E}(S_{100}) = 50 \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(S_{100}) = 25.$$

Se cere **determinarea probabilității**

$$\mathbb{P}(40 \leq S_{100} \leq 60).$$

Vom folosi TLC, mai precis, relația (6). Pentru aceasta luăm $a = \dfrac{40-50}{\sqrt{25}} = -2$ și $b = \dfrac{60-50}{\sqrt{25}} = 2$ și deci

$$\mathbb{P}(40 < S_{100} \leq 60) = \mathbb{P}\left(\frac{40-50}{\sqrt{25}} < \frac{S_{100} - 50}{\sqrt{25}} \leq \frac{60-50}{\sqrt{25}}\right) = \mathbb{P}\left(-2 < \frac{S_{100} - 50}{\sqrt{25}} \leq 2\right)$$
$$\simeq \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.97725 - 1 = 0.9545.$$

Să observăm că **putem aplica inegalitatea lui Cebâșev deoarece ne interesează ca S_{100} să ia valori în intervalul centrat**

$$(\mathbb{E}(S_{100}) - \epsilon, \mathbb{E}(S_{100}) + \epsilon) = (40, 60)$$

[2] **Teorema Limită Centrală (TLC)**: Fie șirul $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip **i.i.d.** (independența este în ansamblu) astfel încât

$$\mathbb{E}(X_k) = \mu < +\infty \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(X_k) = \sigma^2 < +\infty, \quad \text{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci are loc convergența

$$\boxed{\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(S_n)}} \xrightarrow{F} Z \sim \mathscr{N}(0,1), \quad \text{pentru } n \to \infty,} \tag{4}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(\bar{X}_n)}} \xrightarrow{F} Z \sim \mathscr{N}(0,1), \quad \text{pentru } n \to \infty.} \tag{5}$$

Prin urmare, pentru n suficient de mare,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq b\right) = \mathbb{P}\left(a < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a), \quad \text{pentru orice } -\infty \leq a < b \leq +\infty.} \tag{6}$$

pentru $\epsilon = 10$. Deci

$$\mathbb{P}\left(\left|S_{100} - \mathbb{E}\left(S_{100}\right)\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{D}^2\left(S_{100}\right)}{\epsilon^2} = 1 - \frac{25}{100} = 0.75.$$

V.14 Avem o v.a. cu media 4.0 și deviația standard 1.5. Dacă se ia un eșantion de volum 50, care este probabilitatea ca media $\bar{X}_{50}$ să fie între 3.5 și 3.8?

Rezolvare:

Se cere **determinarea probabilității** $\mathbb{P}\left(3.5 \leq \bar{X}_{50} \leq 3.8\right)$.

Vom folosi TLC, mai precis, relația (6):

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{\bar{X}_{50} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right) \simeq \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right) ,$$

pentru orice $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Să luăm $a = \frac{3.5-4}{1.5/\sqrt{50}} = -2.36$ și $b = \frac{3.8-4}{1.5/\sqrt{50}} = -0.94$, deci

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(3.5 < \bar{X}_{50} \leq 3.8\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{3.5-4}{1.5/\sqrt{50}} < \frac{\bar{X}_{50}-4}{1.5/\sqrt{50}} \leq \frac{3.8-4}{1.5/\sqrt{50}}\right) = \mathbb{P}\left(-2.36 < \frac{\bar{X}_{50}-4}{1.5/\sqrt{50}} \leq -0.94\right)\\ &\simeq \Phi\left(-0.94\right) - \Phi\left(-2.36\right) = 1 - \Phi\left(0.94\right) - \left(1 - \Phi\left(2.36\right)\right)\\ &= \Phi\left(2.36\right) - \Phi\left(0.94\right) = 0.990863 - 0.826391 = 0.1645.\end{aligned}$$

V.15 De câte ori trebuie să aruncăm o monedă astfel încât să obținem cu o probabilitate de 0.99 ca frecvența relativă a apariției stemei să fie între 48% și 52%?

Rezolvare:

Se cere **determinarea probabilității**

$$\mathbb{P}\left(0.48 \leq \bar{X}_n \leq 0.52\right).$$

Vom folosi TLC, mai precis, relația (6) cu $p = q = 1/2$:

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}} \leq b\right) \simeq \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right) ,$$

pentru orice $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Să luăm a astfel încât $a\,\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} + p = 0.48$ sau, echivalent, $a = \frac{0.48-0.5}{\sqrt{1/4}/\sqrt{n}} = -0.04\sqrt{n}$ și b astfel încât $b\,\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} + p = 0.52$ sau, echivalent, $b = \frac{0.52-0.5}{\sqrt{1/4}/\sqrt{n}} = 0.04\sqrt{n}$, deci $a = -b$ și

$$0.99 = \mathbb{P}\left(0.48 < \bar{X}_n \leq 0.52\right) \simeq \Phi\left(b\right) - \Phi\left(-b\right) = 2\Phi\left(b\right) - 1.$$

Deci

$$\Phi\left(b\right) = 0.995 \quad \Rightarrow \quad b = 2.57 \quad \Rightarrow \quad n = \left(\frac{2.57}{0.04}\right)^2 = 4128.1$$

(de fapt, alegem $n = 4129 \in \mathbb{N}^*$).

V.16 De câte ori trebuie să aruncăm un zar astfel încât să obținem, cu o probabilitate de 0.99, ca frecvența relativă a apariției feței 6 să fie între $\dfrac{1}{6}-0.05$ și $\dfrac{1}{6}+0.05$?

Rezolvare:

Se cere **determinarea probabilității**

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{6}-0.05\leq \bar{X}_n\leq \frac{1}{6}+0.05\right).$$

Vom folosi TLC, mai precis, relația (6) cu $p=1/6,\ q=5/6$:

$$\mathbb{P}\left(a<\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}}\leq b\right)\simeq \Phi\left(b\right)-\Phi\left(a\right)\ ,$$

pentru orice $-\infty\leq a<b\leq+\infty$.

Să luăm $a=\frac{1/6-0.05-1/6}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}=-6\sqrt{n}\,\frac{0.05}{\sqrt{5}}=-\sqrt{n}\,0.1342$ și respectiv $b=\frac{1/6+0.05-1/6}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}=6\sqrt{n}\,\frac{0.05}{\sqrt{5}}=\sqrt{n}\,0.1342$, adică $a=-b$.

Obținem

$$0.99=\mathbb{P}\left(\frac{1}{6}-0.05\leq \bar{X}_n\leq \frac{1}{6}+0.05\right)\simeq \Phi\left(b\right)-\Phi\left(-b\right)=2\Phi\left(b\right)-1,$$

deci

$$\Phi\left(b\right)=0.995\quad\Rightarrow\quad b=2.57\quad\Rightarrow\quad n=\left(\frac{2.57}{0.1342}\right)^2=366.74$$

(de fapt, alegem $n=367\in\mathbb{N}^*$).

Să observăm că **putem aplica inegalitatea lui Cebâșev deoarece ne interesează ca $\bar{X}_n$ să ia valori în intervalul centrat**

$$\left(\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right)-\epsilon,\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right)+\epsilon\right)=\left(1/6-0.05,1/6+0.05\right),$$

pentru $\epsilon=0.05$. Deci impunem

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n-1/6\right|<0.05\right)\geq 1-\frac{\mathrm{D}^2\left(\bar{X}_n\right)}{0.05^2}=1-\frac{pq/n}{0.0025}=1-\frac{5/\left(36n\right)}{0.0025}>0.99.$$

Obținem

$$n>\frac{5}{0.01\cdot 0.0025\cdot 36}=5555.6$$

(și alegem $n=5556\in\mathbb{N}^*$).

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

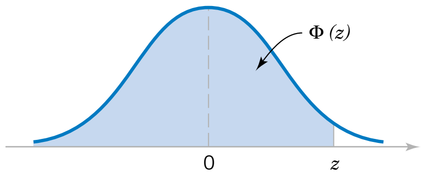

Table II Cumulative Standard Normal Distribution (*continued*)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.532922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555760	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823815	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.878999	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886860	0.888767	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903199	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935744	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959071	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.964070	0.964852	0.965621	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.6	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999533	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999650
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999821	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.8	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967