Facultatea de Matematică
Calcul Integral şi Aplicaţii, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminar recapitulativ

Integrala definită. Primitive

1. Să se arate că

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx\ , & \text{dacă } f \text{ este funcţie pară,} \\ 0\ , & \text{dacă } f \text{ este funcţie impară.} \end{cases}$$

Rezolvare:

Astfel avem conform proprietăţii de aditivitate că

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

Acum dacă f este pară, adică

$$f(-x) = f(x)\ \ ,\ \forall\, x \in [-a, a]\,,$$

atunci în prima integrală fac schimbarea de variabilă

$$x = -y \Leftrightarrow y = -x$$

De aici obţinem că $dx = -dy$ precum şi noile limite de integrare: dacă $x = -a$ atunci $y = a$ şi dacă $x = 0$ atunci $y = 0$.

Deci integrala devine, conform schimbării de variabilă,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_a^0 f(-y)\,(-dy) = \int_a^0 f(y)\,(-dy) = -\int_a^0 f(y)\,dy$$

Dar, conform unei convenţii

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

deci

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(y)\,dy = \int_0^a f(x)\,dx$$

de unde obţinem că

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Dacă f este impară, adică

$$f(-x) = -f(x)\ \ ,\ \forall\, x \in [-a, a]\ \ ,$$

atunci în prima integrală fac aceeaşi schimbarea de variabilă

$$x = -y \Leftrightarrow y = -x$$

De aici obţinem $dx = -dy$ şi limitele de integrare devin: dacă $x = -a$ atunci $y = a$ şi dacă $x = 0$ atunci $y = 0$.

Deci integrala devine, conform schimbării de variabilă,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)(-dy) = \int_{a}^{0} -f(y)(-dy) = \int_{a}^{0} f(y)\,dy = -\int_{0}^{a} f(y)\,dy = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

deci

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(y)\,dy = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Obţinem deci că

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

2. Arătaţi, folosind paritatea funcţiei de sub integrală, că

$a)$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\text{arctg}x}{e^x+e^{-x}}dx = 0$, $b)$ $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} (\cos x)\ln\frac{1+x}{1-x}dx = 0$,

$c)$ $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin x\cdot\text{tg}^2 x = 0$, $d)$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{1+x^2}dx = 0$

Rezolvare:

Aplic exerciţiul anterior. Astfel vom arăta că funcţiile care se integrează sunt impare.
Pentru aceasta folosim paritatea funcţiilor trigonometrice:

$$\sin(-x) = -\sin x\ ,\quad \cos(-x) = \cos x$$
$$\text{tg}(-x) = -\text{tg}x\ ,\ \text{arctg}(-x) = -\text{arctg}x$$

$a)$ Notăm cu $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\text{arctg}x}{e^x+e^{-x}}$.

$$f(-x) = \frac{\text{arctg}(-x)}{e^{-x}+e^{-(-x)}} = \frac{-\text{arctg}x}{e^{-x}+e^{x}} = -f(x)\,.$$

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o funcţie continuă şi periodică de perioadă $T>0$. Să se arate că are loc

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx\ ,\ \forall\, a\in\mathbb{R}$$

şi apoi să se calculeze:

$a)$ $\displaystyle\int_{0}^{2n\pi} |\sin x|\,dx$, $n\in\mathbb{N}$, $b)$ $\displaystyle\int_{0}^{2n\pi} |\cos x|\,dx$, $n\in\mathbb{N}$

Rezolvare:

Funcţia f periodică înseamnă că $f(x+T) = f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Avem conform proprietăţii de aditivitate că

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{T} f(x)\,dx + \int_{T}^{a+T} f(x)\,dx$$

În ultima integrală fac schimbarea de variabilă

$$x = y + T \Leftrightarrow y = x - T$$

De aici obţinem $dx = dy$ şi limitele de integrare devin: dacă $x = T$ atunci $y = 0$ şi dacă $x = a+T$ atunci $y = a$. Deci integrala devine, conform schimbării de variabilă,

$$\int_{T}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(y+T)\,dy = \int_{0}^{a} f(y)\,dy = -\int_{a}^{0} f(y)\,dy$$

deci
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

$a)$ Ştim că $\sin$ şi $\cos$ sunt periodice de periodice de perioadă 2π

$$\begin{aligned}\sin(x+2\pi) &= \sin x\ ,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\\ \cos(x+2\pi) &= \cos x\ ,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

deci evident şi funcţiile $|\sin x|$, $|\cos x|$.

Conform celor de mai sus, avem că

$$\begin{aligned}\int_0^{2n\pi} |\sin x|\,dx &= \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx + \int_{2\pi}^{4\pi} |\sin x|\,dx + \ldots + \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} |\sin x|\,dx\\ &= \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx + \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx + \ldots + \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = n\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx\end{aligned}$$

Iar

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx &= \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx\\ &= (-\cos x)\big|_0^{\pi} - (-\cos x)\big|_{\pi}^{2\pi} = 4\end{aligned}$$

deci
$$\int_0^{2n\pi} |\sin x|\,dx = n\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 4n.$$

4. Să se calculeze următoarele integrale (folosind tabelul):

$a)\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}\ ,\quad b)\int \sqrt{2px}dx\ , c)\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}\ ,\quad d)\int \frac{dx}{5+x^2}\ ,\quad e)\int \frac{dx}{\sqrt{x}},\quad f)\int \frac{dx}{x\sqrt{x}},$

$g)\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}\ ,\ h)\int \frac{dx}{a-x},\quad i)\int \frac{dx}{3x^2+5}\ ,\quad j)\int \frac{dx}{7x^2-8}\ ,\ k)\int \sqrt{2-3x}dx\ , l)\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}},$

$m)\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}\ ,\ n)\int \frac{3}{5x^2+7}dx.$

5. Să se calculeze următoarele integrale (folosind **metoda de integrare prin părţi**):

$a)\int \left(x^2+5x\right)e^{2x}dx\ ,\quad b)\int e^{ax}\sin(bx)\ dx\ ,\quad c)\int x^2\sin x\ dx\ ,\quad d)\int \ln^3 x\ dx\ ,\ e)\int x^3\ln^2 x\ dx$

$f)\int \sqrt{x^2+a}dx\ , a\in\mathbb{R},\quad g)\int \sqrt{a^2-x^2}dx\ ,\quad h)\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \int x^{-3}\ln x dx = \int \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)'\ln x dx.$

Rezolvare:

Dacă f şi g sunt funcţii cu derivatele continue pe domeniul de definiţie I atunci are loc formula de integrare prin părţi:
$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx.$$

$a)$ Folosim $e^{2x} = \frac{1}{2}\left(e^{2x}\right)'$:

$$\begin{aligned}
&\int \left(x^2+5x\right) e^{2x} dx = \int \left(x^2+5x\right) \frac{1}{2}\left(e^{2x}\right)' dx = \left(x^2+5x\right)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int \left(x^2+5x\right)' e^{2x} dx \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+5x\right) e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x+5)\, e^{2x} dx = \text{aplicăm încă o dată} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+5x\right) e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x+5)\, \frac{1}{2}\left(e^{2x}\right)' dx \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+5x\right) e^{2x} - \frac{1}{2}\left((2x+5)\, \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x+5)' e^{2x} dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+5x\right) e^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2x+5)\, e^{2x} - \frac{1}{2}\int 2e^{2x} dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+5x\right) e^{2x} - \frac{1}{4}(2x+5)\, e^{2x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C\ , \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$b)$ Folosim $e^{ax} = \frac{1}{a}\left(e^{ax}\right)'$:

$$\begin{aligned}
&\int e^{ax} \sin(bx)\ dx = \int \frac{1}{a}\left(e^{ax}\right)' \sin(bx)\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \int \frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin(bx)\right)' dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\, dx = \text{aplicăm încă o dată} \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int \frac{1}{a}\left(e^{ax}\right)'\cos(bx)\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\cos(bx) - \int e^{ax}\left(\cos(bx)\right)' dx\right) \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\cos(bx) + \int b e^{ax}\sin(bx)\, dx\right) \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\, dx
\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}
&\int e^{ax}\sin(bx)\ dx + \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) + C\ , \quad C\in\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \int e^{ax}\sin(bx)\ dx = \frac{a^2}{a^2+b}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx)\right) + C,\ C\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Observaţie: putem pleca şi de la $\sin(bx) = \frac{-1}{b}\left(\cos(bx)\right)'$.

$d)$

$$\begin{aligned}
&\int \ln^3 x\ dx = \int x' \ln^3 x\ dx = x\ln^3 x - \int x\left(\ln^3 x\right)' dx \\
&= x\ln^3 x - 3\int x\ln^2 x\frac{1}{x}dx = x\ln^3 x - 3\int \ln^2 x\ dx = \text{aplicăm încă o dată} \\
&= x\ln^3 x - 3\int x'\ln^2 x\ dx = x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - \int x\left(\ln^2 x\right)' dx\right) \\
&= x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2\int x\ln x\frac{1}{x}dx\right) = x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2\int \ln x dx\right) \\
&= x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int x\left(\ln x\right)' dx\right)\right) \\
&= x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - x\right)\right) + C\ , \quad C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$f)$

$$\begin{aligned}I &= \int \sqrt{x^2+a}dx = (\text{raţionalizare}) = \int \frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}dx \\ &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx + \int \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}dx = \int x\left(\sqrt{x^2+a}\right)' dx + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| \\ &= a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + \left(x\sqrt{x^2+a} - \int\sqrt{x^2+a}dx\right) \\ &= a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + x\sqrt{x^2+a} - I\end{aligned}$$

Deci

$$I = \int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C\,,\quad C\in\mathbb{R}.$$

6. Să se calculeze următoarele integrale folosind metoda de integrare prin părţi:

$a)\int\left(x^3+2x\right)e^{5x}dx\,,\quad b)\int e^{ax}\sin(bx)\;dx\,,\quad c)\int e^{ax}\cos(bx)\;dx\,,\quad d)\int e^{3x}\sin(4x)\;dx\,,$

$e)\int e^{4x}\cos(3x)\;dx\,,\quad f)\int x^3\cos x\;dx\,,\quad g)\int x^3\sin(5x)\;dx\,,\quad h)\int x^3\cos(5x)\;dx\,,$

$i)\int \ln x dx\,,\quad j)\int x^2\ln^3 x\;dx\,,\quad k)\int\sqrt{x^2+5}dx\,,\quad l)\int\sqrt{x^2-5}dx\,,\quad m)\int\sqrt{5-x^2}dx$

$n)\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx,\quad o)\int\left(x^2+5x+6\right)\cos(2x)\,dx,\quad p)\int\left(x^2-2x+3\right)\ln x dx.$

7. Folosind **prima metodă de schimbare de variabilă** să se calculeze:

$a)\int\frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx\,,\ b)\int\frac{1}{x\ln^2 x}dx\,,\ c)\int\frac{1}{x\ln^5 x}dx\,,$
$d)\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx\,,\ e)\int_2^3\sqrt{6x-x^2-5}\;dx\,,\ f)\int\sqrt{x^2+x+1}dx$

Rezolvare:

Aplic prima metodă de schimbare de variabilă:

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = F(u(x)) + C,\ C\in\mathbb{R},$$

unde F este o primitivă a lui funcţiei f.

De asemenea are loc şi în cazul integralei definite:

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\,dy = \left.F(y)\right|_{y=u(a)}^{y=u(b)} = F(u(b)) - F(u(a))\ .$$

$a)$ Observ că $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\arccos x)'$, deci

$$\int\frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int\left(\sqrt{1-x^2}\right)'dx + \int\arccos x\,(-\arccos x)'\,dx$$
$$= -\sqrt{1-x^2} - \int\arccos x\,(\arccos x)'\,dx = -\sqrt{1-x^2} - \int\arccos x\;d(\arccos x)\,.$$

Acum dacă notăm

$$y \overset{not}{=} \arccos x \Rightarrow dy = (\arccos x)'\,dx$$

deci integrala devine

$$\int \frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} - \int y dy$$
$$= -\sqrt{1-x^2} - \frac{y^2}{2} + C = -\sqrt{1-x^2} - \frac{(\arccos x)^2}{2} + C\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

$b)$ Observ că $\frac{1}{x} = (\ln x)^{'}$ şi voi nota $y \overset{not}{=} \ln x \Rightarrow dy = (\ln x)' \, dx$

$$\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \int \frac{1}{\ln^2 x}(\ln x)^{'}\, dx = \int \frac{1}{y^2}dy = \int y^{-2}dy$$
$$= \tfrac{y^{-3}}{-3} + C = \tfrac{(\ln x)^{-3}}{-3} + C\ , \quad C \in \mathbb{R}.$$

$d)$ Observ că $\cos x = (\sin x)'$ şi voi nota $y \overset{not}{=} \sin x \Rightarrow dy = (\sin x)'\, dx$ şi limitele de integrare devin: dacă $x = 0$ atunci $y = \sin 0 = 0$ şi dacă $x = \pi/2$ atunci $y = \sin \pi/2 = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2 x}(\sin x)'\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy = \text{arctg} y|_0^1 = \text{arctg}1 - \text{arctg}0 = \pi/4 - 0$$

$e)$ Folosim **forma canonică a trinomului de gradul** 2

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

unde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Deci

$$6x - x^2 - 5 = -x^2 + 6x - 5 = -\left(x + \tfrac{6}{-2}\right)^2 + \tfrac{-(36-20)}{-4}$$
$$= -(x-3)^2 + 4 = 4 - (x-3)^2$$

şi

$$\int_2^3 \sqrt{6x - x^2 - 5}dx = \int_2^3 \sqrt{4-(x-3)^2}dx = \int_2^3 \sqrt{4-(x-3)^2}\,(x-3)^{'}\, dx$$

Notez $y \overset{not}{=} x-3 \Rightarrow dy = (x-3)^{'}\, dx$ şi limitele de integrare devin: dacă $x = 2$ atunci $y = -1$ şi dacă $x = 3$ atunci $y = 0$.

$$\int_2^3 \sqrt{6x - x^2 - 5}dx = \int_{-1}^0 \sqrt{4-y^2}dy$$

Pentru a calcula ultima integrală vezi exerciţiile precedente.

8. Folosind prima metodă de schimbare de variabilă să se calculeze:

$a)\int \frac{\cos x}{\sin x}dx\ ,\quad b)\int \frac{\sin x}{\cos x}dx\ ,\quad c)\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx\ ,\quad d)\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

$e)\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}\ ,\quad f)\int x^2 e^{x^3}dx,\quad g)\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx.$

9. (i) Să se aducă la forma canonică următoarele trinoame de gradul al doilea:

$a)\ f(x) = 4x - x^2 + 5\ ,\quad b)\ f(x) = x^2 + 3x - 5\ ,\quad c)\ \ f(x) = x^2 + 2x + 3,\quad d)\ \ f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

$e)\ f(x) = 2x^2 - 5x + 3,\quad f)\ f(x) = x^2 - x - 1,\quad g)\ f(x) = 2 + 3x - 2x^2,\quad h)\ f(x) = x^2 + 2x + 2,$

$i)\ f(x) = x^2 + 2x + 5,\quad j)\ f(x) = 3x^2 - x + 1,\quad k)\ f(x) = 2 + 3x - 2x^2,\quad l)\ f(x) = x^2 - 4x + 5$

(ii) Să se calculeze diferenţialele $df(x)$ ale următoarelor funcţii de o variabilă:

$a)\ f(x) = \sin^2 x\ ,\quad b)\ f(x) = \ln x\ ,\quad c)\ \ f(x) = \ln^2 x,\quad d)\ \ f(x) = x^3,\quad e)\ \ f(x) = \sqrt{x},$

$f)\ \ f(x) = \cos x,\quad g)\ \ f(x) = e^{3x},\quad h)\ \ f(x) = \sqrt{x^2 + a^2},\quad i)\ \ f(x) = \sqrt{4 - x^2},\quad j)\ \ f(x) = \text{tg}x\ .$

10. Folosind **a doua metodă de schimbare de variabilă** să se calculeze integralele:

$a) \int \cos^2 \sqrt{x} dx$, $b) \int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$, $c) \int \sqrt{a^2-x^2} dx$, $d) \int \sqrt{x^2+a^2} dx.$

Rezolvare:

Aplic **a doua metodă de schimbare de variabilă**: *Dacă facem schimbarea de variabilă*

$$x = u(y)$$

atunci

$$dx = u'(y)\, dy \ , \quad y = u^{-1}(x)$$

unde u^{-1} *este inversa funcţiei* u*, şi integrala devine*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(y))\, u'(y)\, dy$$

$a)$ Vom nota $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$ deci $dx = 2ydy$ şi integrala devine

$$\int \cos^2 \sqrt{x} dx = \int \cos^2 y\, 2ydy = 2 \int y \cos^2 y\, dy$$

Pentru calculul acestei integrale vezi metoda de integrare prin părţi. La sfârşit se va înlocui $y = \sqrt{x}$.
$b)$ Avem **substituţiile trigonometrice**:

1. Dacă integrala conţine termenul $\sqrt{a^2-x^2}$ atunci este utilă substituţia $x = a \sin y$ sau $x = a \cos y$

2. Dacă integrala conţine termenul $\sqrt{x^2-a^2}$ atunci este utilă substituţia $x = a$ ch$y$

3. Dacă integrala conţine termenul $\sqrt{x^2+a^2}$ atunci este utilă substituţia $x = a$ sh$y$

unde

$$\text{sh}x \overset{def}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ , \quad \text{ch}x \overset{def}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

şi evident avem

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 \ , \quad (\text{sh}x)' = \text{ch}x \ , \quad (\text{ch}x)' = \text{sh}x.$$

În cazul nostru este utilă substituţia $x = 2 \sin y$ (de asemenea e utilă şi substituţia $x = 2 \cos y$). Deci

$$dx = (2 \sin y)'\, dy = 2 \cos y dy$$

şi

$$x = 2 \sin y \Leftrightarrow y = \arcsin x/2.$$

Limitele de integrare devin: dacă $x = 0$ atunci $y = \arcsin 0 = 0$ şi dacă $x = 1$ atunci $y = \arcsin 1/2 = \pi/6$. Atunci integrala devine

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\pi/6} 4 \sin^2 y \sqrt{4 - 4\sin^2 y} 2 \cos y dy$$
$$= 16 \int_0^{\pi/6} \sin^2 y \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y dy = 16 \int_0^{\pi/6} \sin^2 y \cos^2 y dy$$

Avem formulele

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$
$$\sin(2y) = 2 \sin y \cos y \Rightarrow \sin y \cos y = \tfrac{\sin 2y}{2}$$
$$\cos(2y) = 2\cos^2 y - 1 \Rightarrow \cos^2 y = \tfrac{1+\cos 2y}{2}$$
$$\cos(2y) = 1 - 2\sin^2 y \Rightarrow \sin^2 y = \tfrac{1-\cos 2y}{2}$$

Deci

$$\int_0^1 x^2\sqrt{4-x^2}dx = 16\int_0^{\pi/6}(\sin y\cos y)^2\,dy = 4\int_0^{\pi/6}\sin^2 2ydy$$
$$= 4\int_0^{\pi/6}\frac{1-\cos 4y}{2}dy = 2\int_0^{\pi/6}dy - 2\int_0^{\pi/6}\cos 4ydy = \left(2y - 2\frac{\sin 4y}{4}\right)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

d) În acest caz este utilă substituţia $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Deci

$$dx = \left(a\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)' dy = a\frac{e^y + e^{-y}}{2}dy$$

şi

$$x^2 + a^2 = \left(a\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 + a^2 = a^2\left(\frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4} + 1\right) = a^2\frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4} = \left(a\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2.$$

Deci

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx = \int a\frac{e^y + e^{-y}}{2}a\frac{e^y + e^{-y}}{2}dy = \frac{a^2}{4}\int\left(e^y + e^{-y}\right)^2 dy = \frac{a^2}{4}\int\left(e^{2y} + e^{-2y} + 2\right)dy$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(\frac{e^{2y}}{2} + \frac{e^{-2y}}{-2} + 2y\right) + C\ ,\ C\in\mathbb{R}$$

11. Să se calculeze următoarele **integrale din funcţii ce conţin un trinom de gradul al doilea:**

$$a)\int\frac{dx}{2x^2-5x+7}\ ,\quad b)\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}\ ,\quad c)\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx\ ,\quad d)\int\sqrt{a^2-x^2}dx\ ,$$
$$e)\int\sqrt{a+x^2}dx\ ,\quad f)\int\sqrt{1-2x-x^2}dx\ ,\quad g)\int\frac{dx}{3x^2-x+1}\ ,\quad h)\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx.$$

12. Să se calculeze următoarele **integrale din funcţii raţionale**:

$$a)\int\frac{1}{x-a}dx\ ,\quad b)\int\frac{1}{(x-a)^\alpha}dx\ ,\alpha\neq 1,\quad c)\int\frac{1}{ax-b}dx\ ,\quad d)\int\frac{1}{(ax+b)^\alpha}dx,$$
$$e)\int\frac{1}{2x^2-4x+8}dx,\quad f)\int\frac{1}{2x^2-5x+3}dx,\quad g)\int\frac{4x-5}{x^2-2x+10}dx,$$
$$h)\int\frac{-x+5}{x^2+x-2}dx\ ,\quad i)\int\frac{x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx = \int\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}\right)dx\ ,$$
$$j)\int\frac{3x^2+x-4}{x^3+5x^2+9x+5}dx = \int\left(\frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+4x+5}\right)dx.$$

13. Să se calculeze următoarele **integrale din funcţii raţionale**:

$$a)\int\frac{x^4}{x^4-1}dx\ ,\quad b)\int\frac{1}{x^3+1}dx\ ,\quad c)\int\frac{1}{x^3-2x^2+x}dx\ ,\quad d)\int\frac{1}{x^3+6x^2+11x+6}dx$$

Rezolvare:

Dacă integrala este dintr-o funcţie raţională atunci:

Pasul I: **dacă gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului atunci mai întâi se împart polinoamele până se ajunge ca gradul numărătorului să fie mai mic strict decât gradul numitorului.**

Pasul II: **apoi se vor căuta divizorii numitorului şi se va descompune fracţia în fracţii simple.**

$a)$

$$\begin{aligned}\tfrac{x^4}{x^4-1} &= \tfrac{x^4-1+1}{x^4-1} = \tfrac{x^4-1}{x^4-1} + \tfrac{1}{x^4-1} = 1 + \tfrac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} \\ &= 1 + \tfrac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = 1 + \tfrac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\end{aligned}$$

Descompunerea în fracţii simple înseamnă să căută constantele a, b, c, d a.î. să aibă loc

$$\tfrac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \tfrac{a}{x-1} + \tfrac{b}{x+1} + \tfrac{cx+d}{x^2+1}$$

Aducând la acelaşi numitor obţin

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \tfrac{a(x+1)\left(x^2+1\right)+b(x-1)\left(x^2+1\right)+(cx+d)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\ &\Leftrightarrow 1 = a\,(x+1)\left(x^2+1\right) + b\,(x-1)\left(x^2+1\right) + (cx+d)\,(x-1)\,(x+1) \\ &\Leftrightarrow 1 = (a+b+c)\,x^3 + (a-b+d)\,x^2 + (a+b-c)\,x + (a-b-d) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+d=0 \\ a+b-c=0 \\ a-b-d=1 \end{cases}\end{aligned}$$

Rezolvând sistemul obţin $a = 1/4, b = -1/4, c = 0, d = -1/2$ deci are loc

$$\tfrac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{x-1} - \tfrac{1}{x+1} - \tfrac{2}{x^2+1}\right)$$

adică

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^4}{x^4-1}dx = \int dx + \int \frac{1}{(x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)}dx = x + \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}\right)dx \\ &= x + \tfrac{1}{4}\left(\ln(x-1) - \ln(x+1) - 2\mathrm{arctg}x\right) + C\end{aligned}$$

$b)$

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{x^3+1} = \tfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \tfrac{a}{x+1} + \tfrac{bx+c}{x^2-x+1} \\ &\Leftrightarrow 1 = a\left(x^2-x+1\right) + (x+1)\,(bx+c) \\ &\Leftrightarrow 1 = (a+b)\,x^2 + (-a+b+c)\,x + (a+c) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=0 \\ a+c=1 \end{cases}\end{aligned}$$

Rezolvând sistemul obţin $a = 1/3, b = -1/3, c = 2/3$ deci are loc

$$\frac{1}{(x+1)\,(x^2-x+1)} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-1/3x+2/3}{x^2-x+1}$$

adică

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

Acum avem $\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \int \frac{x}{x^2-x+1}dx - \int \frac{2}{x^2-x+1}dx$. Pentru acestea două se vor face calcule standard. Mai întâi, pentru prima, se formează la numărător derivata numitorului adică

$$\begin{aligned}&\int \frac{x}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-x+1}dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x-1+1}{x^2-x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2-x+1\right)'}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1/2)^2 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{3}/2}\mathrm{arctg}\tfrac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} + C.\end{aligned}$$

$c)$ $\frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ unde a, b, c trebuie determinaţi.

$d)$ Rădăcinile întregi ale lui $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ se găsesc printre divizorii termenului liber.

14. Să se calculeze următoarele **integrale din funcţii raţionale**:

$$a) \int \frac{1}{(x^3-1)^2}dx\ , \quad b) \int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3}dx\ , \quad c) \int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}\ , \quad d) \int \frac{dx}{x(x+1)^2},$$

$$e) \int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}\ , \quad f) \int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx\ , \quad g) \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}\ .$$

15. Să se calculeze următoarele **integrale din funcţii iraţionale**:

$$a) \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx\ , \quad b) \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx\ , \quad c) \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx\ , \quad d) \int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$$

Rezolvare:

Fie integralele de forma $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, ...\right)dx$ **unde** R **este o expresie raţională. Aceste integrale se reduc la integrale raţionale cu ajutorul substituţiei**

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$$

unde s **este cel mai mic multiplu comun al numitorilor** $q_1, q_2, ...$

$a)$ Apare termenul $\sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2}$ deci este utilă substituţia

$$x+1 = t^2 \Leftrightarrow x = t^2-1 \Rightarrow dx = 2tdt$$

deci integrala devine

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{t+2}{(t^2)^2-t}2tdt$$
$$= 2\int \frac{t^2+2t}{t^4-t}dt = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}dt = 2\int \frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}dt$$

şi am ajuns la integrala dintr-o funcţie raţională. Descompunem în fracţii simple

$$\frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1}$$

cu a, b, c determinaţi aducând la acelaşi numitor şi identificând coeficienţii. Obţin $a = 1.b = -1, c = -1$ şi integrala se reduce la integrale simple.

$$I = 2\int \frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}dt = 2\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+t+1}\right)dt$$
$$= 2\left(\ln(t-1) - \int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt\right)$$

Mai întâi

$$\int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt = \int \frac{t}{t^2+t+1}dt + \int \frac{1}{t^2+t+1}dt$$

iar acestea se fac prin calcule standard. La sfârşit se va înlocui $t = (x+1)^{1/2}$.

$b)$ Apare $\sqrt{x} = x^{1/2}$ şi $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ deci se va face substituţia $x = t^6$ unde 6 este cel mai mic multiplu comun al numitorilor 2 şi 3.

16. Să se calculeze următoarele integrale din funcţii iraţionale (**integrale binome**):

$$a)\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx\ ,\ \ b)\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{\sqrt[4]{x^5}}dx\ ,\ c)\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx\ ,\ \ d)\int \frac{1}{x\sqrt[3]{1+x^5}}dx\ ,$$

$$e)\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}dx\ ,\ f)\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}\ ,g)\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{5/3}}$$

Rezolvare:

Fie integralele de forma $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ unde $m,n,p\in\mathbb{Q}$. Aceste integrale se reduc la integrale raţionale doar în următoarele trei situaţii (cu ajutorul substituţiilor respective):

$i)$ **Dacă p este număr întreg.**

$ii)$ **Dacă $\dfrac{m+1}{n}$ este număr întreg şi în acest caz este utilă substituţia $a+bx^n=t^s$ unde s este numitorul lui p.**

$iii)$ **Dacă $\dfrac{m+1}{n}+p$ este număr întreg şi în acest caz este utilă substituţia $\dfrac{a+bx^n}{x^n}=t^s$ unde s este numitorul lui p.**

$a)$ $\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2=x^{1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^2$ deci $m=1/2$, $n=1/3$, $p=2$ deci suntem în prima situaţie şi, evident, merge substituţia $x=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt$ deci integrala devine

$$\begin{aligned}&\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx=\int \left(t^6\right)^{1/2}\left(1+\left(t^6\right)^{1/3}\right)^2 6t^5dt\\ &=\int \left(t^6\right)^{1/2}\left(1+\left(t^6\right)^{1/3}\right)^2 6t^5dt=\int t^3\left(1+t^2\right)^2 6t^5dt\\ &=\int t^3\left(1+t^2\right)^2 6t^5dt\end{aligned}$$

şi obţin integrala dintr-o funcţie polinomială.

$b)$ $\frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{\sqrt[4]{x^5}}=x^{-5/4}\left(1+x^{1/3}\right)^3$ deci $m=-5/4$, $n=1/3$, $p=3$ deci suntem în primul caz.

$c)$ $\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}=x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}$ deci $m=-1/2$, $n=1/4$, $p=1/3$ şi

$$\frac{m+1}{n}=\frac{-1/2+1}{1/4}=2\in\mathbb{Z}$$

deci suntem în a doua situaţie şi merge substituţia

$$1+x^{1/4}=t^3\Leftrightarrow x^{1/4}=t^3-1\Leftrightarrow x=\left(t^3-1\right)^4\Rightarrow dx=4\left(t^3-1\right)^3 3t^2dt$$

deci integrala devine

$$\begin{aligned}&\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}dx\\ &=\int \left(\left(t^3-1\right)^4\right)^{-1/2}\left(t^3\right)^{1/3}12t^2\left(t^3-1\right)^3dt\\ &=12\int \left(t^3-1\right)^{-2}tt^2\left(t^3-1\right)^3dt=12\int \left(t^3-1\right)t^3dt\\ &=12\int \left(t^6-t^3\right)dt=12\left(t^7/7-t^4/4\right)+C\end{aligned}$$

şi acum se înlocuieşte t cu $\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}$.

$d)$, $e)$ Suntem în situaţia $ii)$.

$f)$, $g)$ Suntem în situaţia $iii)$.

17. Să se calculeze următoarele integrale din funcţii trigonometrice:

$$a) \int \sin^2 x \cos^3 x dx \ , \ \ b) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx \ , \ c) \int \frac{1}{\sin x + \text{tg}x} dx \ , \ \ d) \int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx \ ,$$

$$e) \int \frac{1}{\cos^4 x} dx \ , \ f) \int \frac{1}{1+\sin x + \cos x} dx$$

Rezolvare:

Fie integralele de forma $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ unde $R(a,b)$ este o expresie raţională în a şi b. Aceste integrale se reduc la integrale raţionale cu ajutorul următoarelor substiţituţii:

$i)$ **Dacă** $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ **atunci este utilă substituţia** $\cos x = t$.

$ii)$ **Dacă** $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ **atunci este utilă substituţia** $\sin x = t$.

$iii)$ **Dacă** $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ **atunci este utilă substituţia** $\text{tg}x = t$.

$iv)$ **Substituţia universală** $\text{tg}\frac{x}{2} = t$.

În cazul integralelor din funcţii trigonometrice sunt utile următoarele formule trigonometrice

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \\
&\sin x \cos x = \tfrac{\sin 2x}{2} \ , \ \sin^2 x = \tfrac{1-\cos 2x}{2} \ , \ \cos^2 x = \tfrac{1+\cos 2x}{2} \ , \\
&\sin x = \tfrac{2t}{1+t^2} \ , \ \cos x = \tfrac{1-t^2}{1+t^2} \ , \text{ unde } t = \text{tg}\tfrac{x}{2} \ , \\
&\sin x = \tfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \ , \ \cos x = \tfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ , \text{ unde } t = \text{tg}x \ .
\end{aligned}$$

$a)$ Avem că $R(\sin x, \cos x) = \sin^2 x \cos^3 x$ deci

$$R(\sin x, -\cos x) = \sin^2 x (-\cos x)^3 = -\sin^2 x \cos^3 x = -R(\sin x, \cos x)$$

adică suntem în cazul $ii)$. Este utilă substituţia $\sin x = t$

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx \\
&= \textstyle\int \sin^2 x \cos^2 x (\sin x)' dx = \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) d(\sin x)
\end{aligned}$$

deci $\sin x = t \Rightarrow dt = d(\sin x) = (\sin x)' dx$ adică

$$I = \int t^2 \left(1 - t^2\right) dt = \int \left(t^2 - t^4\right) dt = t^3/3 - t^5/5$$

unde t trebuie înlocuit cu $\sin x$.

$b)$ $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$ este impară în $\sin x$, deci cazul $i)$

$c)$ $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x + \text{tg}x}$. În acest caz vom folosi substituţia universală (în cazul integralelor trigonometrice):

$$\text{tg}\frac{x}{2} = t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \text{arctg}t \Leftrightarrow x = 2\text{arctg}t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Deci, folosind şi formulele trigonometrice respective, are loc

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sin x + \text{tg}x} dx = \int \frac{1}{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2t}{1-t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{2t\left(\frac{1-t^2+1+t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\right)} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int \frac{1}{t\frac{2}{1-t^2}} dt = \int \frac{1-t^2}{2t} dt = \int \frac{1}{2t} dt - \int \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4}t^2 + C \\
&= \tfrac{1}{2}\ln\left(\text{tg}\tfrac{x}{2}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\text{tg}\tfrac{x}{2}\right)^2 + C.
\end{aligned}$$

$d)$ $e)$ Suntem în cazul $iii)$.

$f)$ Suntem în cazul $iv)$.

18. Să se calculeze următoarele integrale folosind metoda de integrare prin părţi:

$a)\int \text{arctg}x\,dx\,,\quad b)\int x\text{arctg}x\,dx\,,\quad c)\int x^2\text{arctg}x\,dx$

$d)\int \arcsin x\,dx,\quad e)\int x\arcsin x\,dx\,,\quad f)\int \arcsin^2 x\,dx.$

19. Să se calculeze următoarele integrale:

$a)\int \frac{dx}{x^2+a^2}\,,\quad b)\int \frac{xdx}{x^2+a^2}\,,\quad c)\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^2}\,,\quad d)\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}\,,$

$e)\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^3},\quad f)\int \frac{1}{(x^2+a^2)^3}dx\,,\quad g)\int \frac{1}{\sin^n x}dx\,,\quad n\in\{1,2,3,4,...\}\,.$

Rezolvare:

$d)$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^2}dx - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{x^2+a^2}dx - \frac{1}{a^2}\int x\frac{x}{(x^2+a^2)^2}dx \\
&= \frac{1}{a^2}\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\frac{-1}{2}\int x\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)'dx = \frac{1}{a^3}\text{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\left(x\frac{1}{x^2+a^2} - \int 1\frac{1}{x^2+a^2}dx\right) \\
&= \frac{1}{a^3}\text{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\left(x\frac{1}{x^2+a^2} - \int 1\frac{1}{x^2+a^2}dx\right) = \frac{1}{a^3}\text{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\left(x\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a}\right) + C.
\end{aligned}$$

$g)$ Pentru $n=1$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x}dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{1-\cos^2 x}(-\cos x)'\,dx = (\text{subst. } \cos x = t) = \int \frac{1}{t^2-1}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + C.
\end{aligned}$$

sau, folosind substituţia universală

$$\text{tg}\frac{x}{2} = t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \text{arctg}t \Leftrightarrow x = 2\text{arctg}t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

obţinem

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

Pentru $n=2$, folosind tabelul obţinem:

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\text{ctg}x + C$$

sau, folosind substituţia universală, obţinem

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2 x}dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\frac{2}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{t^2}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{t}+t\right) + C = \frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t} + C \\
&= \frac{1}{2}\frac{\left(\text{tg}\frac{x}{2}\right)^2-1}{\text{tg}\frac{x}{2}} + C = -\text{ctg}x + C.
\end{aligned}$$

Pentru $n = 3$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1}{\left(1-\cos^2 x\right)^2} \left(-\cos x\right)' dx = (\text{subst. } \cos x = t) = \int \frac{-1}{\left(1-t^2\right)^2} dt \\ &= -\int \left(\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} + \frac{d}{(1+t)^2} \right) dt.\end{aligned}$$

sau, folosind substituţia universală, obţinem

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^3} dt.$$

20. Să se calculeze următoarele integrale:

$a)\ \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx\ ,\quad b)\ \int \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} dx\ ,\quad c)\ \int \frac{1}{x^2+x+1} dx\ ,$

$d)\ \int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2} dx\ ,\quad e)\ \int \frac{x}{\left(x^2+x+1\right)^2} dx\ .$

21. Să se calculeze aria figurii plane cuprinsă între curbele (date explicit) $y^2 = 2px$ şi $x^2 = 2py$.

    Să se particularizeze pentru $p = 1/2$.

    Rezolvare: Dacă suntem în cazul în care curbele care dau domeniul sunt date explicit iar domeniul este deci $D = \{(x, y) : a \le x \le b\ ,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$ atunci aria domeniului D este dată de

$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right] dx$$

22. Să se calculeze volumul sferei şi volumul elipsoidului (acestea se obţin prin rotaţia unui semicerc şi respectiv a unei semielipse în jurul axei Ox).

    Rezolvare: Dacă volumul $V \subset \mathbb{R}^3$ este obţinut prin rotaţia mulţimii $F = \{(x, y) : a \le x \le b\ ,\ 0 \le y \le f(x)\}$ atunci volumul este dat de

$$\mathcal{V}(F) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

În cazul nostru sfera este dată de rotaţia domeniului (semidiscului)

$$F = \left\{(x, y) : -r \le x \le r,\ 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}\right\}$$

respectiv dat de rotaţia domeniului (semielipsei)

$$F = \left\{(x, y) : -a \le x \le a,\ 0 \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right\}.$$

23. Să se determine volumul corpului de rotaţie dat de $f : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$.

24. Să se determine lungimea graficului funcţiei $f : [3, 8] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$.

    Rezolvare: Dacă suntem în cazul în care curba este dată explicit de $(C) : y = f(x)\ ,\ a \le x \le b$ atunci lungimea curbei este dată de

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx.$$

25. Să se determine lungimea graficului funcţiei $f : [\pi/3, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\cos x)$.

26. Să se determine lungimea curbei dată parametric $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0, \pi/2]$.

    Rezolvare: Dacă suntem în cazul în care curba este dată curba este în plan şi este dată parametric de $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $a \leq t \leq b$ atunci lungimea curbei este dată de

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

27. Să se determine lungimea curbei din spaţiu dată parametric $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = ct \end{cases}$, $t \in [0, \pi]$.

    Rezolvare: În cazul în care $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $a \leq t \leq b$ (adică în cazul în care curba este dată curba este în spaţiu şi este dată parametric) lungimea curbei este dată de

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

28. Să se determine aria discului.

29. Să se determine lungimea cercului.

Facultatea de Matematică
Calcul integral şi aplicaţii, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminar recapitulativ. Anexă

Derivatele funcţiilor elementare

1. $c^{'} = 0$
2. $x^{'} = 1$
3. $(x^n)^{'} = nx^{n-1}\ ,\ n \in \mathbb{N}$
4. $(x^a)^{'} = ax^{a-1}\ ,\ a \in \mathbb{R}_+$
5. $(\sqrt{x})^{'} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (obţinută în particular pentru $a = 1/2$)
6. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{'} = \dfrac{-1}{x^2}$ (obţinută în particular pentru $a = -1$)
7. $(a^x)^{'} = a^x \ln a\ ,\ a \in \mathbb{R}_+,\ a \neq 1$
8. $(e^x)^{'} = e^x$ (obţinută în particular pentru $a = e$)
9. $(\ln x)^{'} = \dfrac{1}{x}$
10. $(\sin x)^{'} = \cos x$
11. $(\cos x)^{'} = -\sin x$
12. $(\operatorname{tg} x)^{'} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
13. $(\operatorname{ctg} x)^{'} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
14. $(\arcsin x)^{'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\arccos x)^{'} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\operatorname{arctg} x)^{'} = \dfrac{1}{1+x^2}$
17. $(\operatorname{arcctg} x)^{'} = \dfrac{-1}{1+x^2}$
18. $(\operatorname{sh} x)^{'} = \operatorname{ch} x$, unde $\operatorname{sh} x \stackrel{def}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ este sinusul hiperbolic
19. $(\operatorname{ch} x)^{'} = \operatorname{sh} x$ unde $\operatorname{ch} x \stackrel{def}{=} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ este cosinusul hiperbolic

Derivatele funcţiilor compuse

1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, $n \in \mathbb{N}$
2. $(u^a)' = au^{a-1} \cdot u'$, $a \in \mathbb{R}_+$
3. $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ (obţinută în particular pentru $a = 1/2$)
4. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-1}{u^2} \cdot u'$ (obţinută în particular pentru $a = -1$)
5. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $a \in \mathbb{R}_+,\ a \neq 1$
6. $(e^u)' = e^u \cdot u'$ (obţinută în particular pentru $a = e$)
7. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11. $(\operatorname{ctg} u)' = \dfrac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13. $(\arccos u)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15. $(\operatorname{arcctg} u)' = \dfrac{-1}{1+u^2} \cdot u'$
16. $(\operatorname{sh} u)' = \left(\dfrac{e^u - e^{-u}}{2}\right)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
17. $(\operatorname{ch} u)' = \left(\dfrac{e^u + e^{-u}}{2}\right)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$

Operaţii cu funcţii derivabile

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(C \cdot f)'(x) = C \cdot f'(x)$
3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = \dfrac{-1}{g^2(x)} g'(x)$
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Integrale nedefinite

1. $\int dx = x + \mathcal{C}$
2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\, , \alpha \neq -1$
3. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + \mathcal{C}$
4. $\int \dfrac{1}{x^2+a^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + \mathcal{C}\ , a \neq 0$
5. $\int \dfrac{1}{x^2-a^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + \mathcal{C}\ , a \neq 0$
6. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + \mathcal{C}\ , a \neq 0$
7. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + \mathcal{C}\ , a > 0$
8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}\ , a > 0,\ a \neq 1\ ,\quad \int e^x dx = e^x + \mathcal{C}$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$
10. $\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$
11. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$
12. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$
13. $\int \dfrac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right| + \mathcal{C}$
14. $\int \dfrac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + \mathcal{C}$
15. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + \mathcal{C}$
16. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + \mathcal{C}$

Metode de calcul

1. Formula de **integrare prin părţi** pentru integrala definită

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = \left[f(x)\, g(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx.$$

2. Prima **metodă de schimbare de variabilă** pentru integrala definită: pentru a calcula $\int_a^b f(u(x))\, u'(x)\, dx$ se notează $y \overset{not}{=} u(x)$ deci $dy = u'(x)\, dx$ şi are loc

$$\int_a^b f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\, dy = F(y)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = F(u(b)) - F(u(a)).$$