

Facultatea de Matematică
 Calcul Integral și Aplicații, Semestrul I
 Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 10 – 12

Capitolul IV. Integrala dublă

1. Să se calculeze următoarea integrală dublă pe un domeniu dreptunghiular

$$\iint_D (5xy^2 - 2x^3) dx dy,$$

unde D este dreptunghiul $D = [1, 3] \times [2, 5]$.

Rezolvare:

Avem explicitarea domeniului

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 5\}.$$

Avem următoarea reducere a integralei duble la două integrale iterate:

$$I = \int_1^3 \left(\int_2^5 (5xy^2 - 2x^3) dy \right) dx = \int_2^5 \left(\int_1^3 (5xy^2 - 2x^3) dx \right) dy.$$

Vom calcula integrala $\int_2^5 (5xy^2 - 2x^3) dy$ și vom ține cont de faptul că **atunci când integrăm în raport cu o variabilă vom considera cealaltă variabilă drept constantă**. Astfel

$$\begin{aligned} \int_2^5 (5xy^2 - 2x^3) dy &= \left(5x \frac{y^3}{3} - 2x^3 y \right) \Big|_{y=2}^{y=5} = \left(5x \cdot \frac{5^3}{3} - 2x^3 \cdot 5 \right) - \left(5x \cdot \frac{2^3}{3} - 2x^3 \cdot 2 \right) = \\ &= \left(\frac{5^4}{3} x - 10x^3 \right) - \left(\frac{40}{3} x - 4x^3 \right) = \frac{585}{3} x - 6x^3. \end{aligned}$$

Deci

$$I = \int_1^3 \left(\frac{585}{3} x - 6x^3 \right) dx = \left(\frac{585}{3} \frac{x^2}{2} - 6 \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{x=1}^{x=3}.$$

2. Să se calculeze integrala precedentă folosind reducerea

$$\int_2^5 \left(\int_1^3 (5xy^2 - 2x^3) dx \right) dy$$

(s-a schimbat ordinea de integrare).

3. Să se calculeze următoarea integrală dublă pe un domeniu dreptunghiular

$$\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy,$$

unde D este dreptunghiul $D = [2, 5] \times [0, 1]$.

Rezolvare:

Avem explicitarea domeniului

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}.$$

4. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$\iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy,$$

unde D este domeniul dat de $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, 1]$.

Rezolvare:

Aplicăm teorema de reducere și obținem

$$I = \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \sqrt{|y - x^2|} dy \right) dx.$$

Deoarece $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{|y - x^2|} dy &= \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + \int_{x^2}^1 \sqrt{y - x^2} dy \\ &= \left. \frac{|x^2 - y|^{3/2}}{-3/2} \right|_{y=0}^{y=x^2} + \left. \frac{|y - x^2|^{3/2}}{3/2} \right|_{y=x^2}^{y=1} \\ &= \frac{2}{3} \left(|1 - x^2|^{3/2} - |-x^2|^{3/2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(|1 - x^2|^{3/2} - |-x^2|^{3/2} \right) = \frac{2}{3} \left((1 - x^2)^{3/2} - |x|^3 \right). \end{aligned}$$

Deci

$$I = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \left((1 - x^2)^{3/2} - |x|^3 \right) dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{3/2} dx - \int_{-1}^0 (-x^3) dx - \int_0^1 x^3 dx.$$

Dacă privim integrala $\int (1 - x^2)^{3/2} dx$ ca integrală binomă, atunci suntem în cazul al treilea. Deci este utilă substituția

$$\frac{1 - x^2}{x^2} = t^2 \Leftrightarrow x = (t^2 + 1)^{-1/2} \Rightarrow dx = \frac{-1}{2} (t^2 + 1)^{-3/2} \cdot 2t dt = -t (t^2 + 1)^{-3/2} dt.$$

Deci

$$\begin{aligned} \int (1 - x^2)^{3/2} dx &= \int \left[1 - \left((t^2 + 1)^{-1/2} \right)^2 \right]^{3/2} (-t) (t^2 + 1)^{-3/2} dt \\ &= - \int \left(\frac{t^2}{t^2 + 1} \right)^{3/2} t (t^2 + 1)^{-3/2} dt = - \int t^4 (t^2 + 1)^{-3} dt. \end{aligned}$$

Sau putem calcula integrala $\int (1 - x^2)^{3/2} dx$ folosind substituția trigonometrică

$$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt.$$

Deci

$$\int (1 - x^2)^{3/2} dx = \int (1 - \sin^2 t)^{3/2} \cos t dt = \int \cos^4 t dt,$$

pentru care folosim, de două ori, formula

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}.$$

5. Să se calculeze următoarea integrală dublă schimbând convenabil ordinea de integrare

$$\iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy,$$

unde D este dreptunghiul $[0, 1] \times [0, 1]$.

Rezolvare:

Avem următoarea reducere a integralei duble la două integrale simple:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx \right) dy.$$

Vom calcula integrala $\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dy$ și vom ține cont de faptul că **atunci când integrăm în raport cu o variabilă vom considera cealaltă variabilă drept constantă**. Astfel, folosind prima metodă de schimbare de variabilă,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dy &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x^2+y^2)^{-3/2} \cdot (1+x^2+y^2)'_y dy = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} \Big|_{y=0}^{y=1} = - \left[(2+x^2)^{-\frac{1}{2}} - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \right) dx \\ &= \left[\ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \ln(x + \sqrt{x^2+2}) \right] \Big|_{x=0}^{x=1} = \ln \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+2}} \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{2} \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Observăm că dacă vom calcula mai întâi $\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx = y \int_0^1 (1+x^2+y^2)^{-3/2} dx$ atunci calculul integralei în raport cu dx este mai dificil.

6. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de parabolele $y = x^2$ și $y^2 = x$.

Rezolvare:

Desenăm mai întâi domeniul și observăm că este simplu în raport cu ambele axe.

Explicităm domeniul în cazul în care privim domeniul D ca simplu în raport cu axa Oy .

Să luăm $x \in [0, 1]$ arbitrar fixat și prin x ducem o paralelă la axa Oy care va intersecta domeniul D în curbele $\varphi_1(x) = x^2$ și $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$.

Obținem explicitarea:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Aplicăm teorema de reducere și obținem

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy \right) dx$$

și calculăm mai întâi

$$\begin{aligned} \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy &= \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} = \left(x^2 \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x^2}}{2} \right) - \left(x^2 x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} \right) \\ &= \left(x^2 \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x^2}}{2} \right) - \left(x^2 \cdot x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} \right) = x^2 \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{3x^4}{2} = x^{5/2} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^4, \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^4 \right) dx = \left(\frac{x^{5/2+1}}{5/2+1} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}. \end{aligned}$$

7. Să se calculeze integrala precedentă folosind faptul că domeniul D este simplu în raport cu axa Ox .

Rezolvare:

Avem explicitarea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$.

8. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de $x = 0, y = 1, y = 2$ și $y = x$.

Rezolvare:

Desenăm mai întâi domeniul și observăm că este simplu în raport cu axa Ox .

Explicităm domeniul. Să luăm $y \in [1, 2]$ arbitrar fixat și prin y ducem o paralelă la axa Ox care va intersecta domeniul D în curbele $\varphi_1(y) = 0$ și $\varphi_2(y) = y$. Deci obținem explicitarea

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y\}.$$

Aplicăm teorema de reducere și obținem

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \right) dy.$$

Calculăm mai întâi

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx &= \int_0^y x \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)'_x dx = x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=y} - \int_0^y \sqrt{x^2 + y^2} dx \\ &= y\sqrt{2y^2} - \int_0^y \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx = y\sqrt{2y^2} - \int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx - \int_0^y \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx, \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} 2 \int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx &= y\sqrt{2y^2} - y^2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=y} = y^2\sqrt{2} - y^2 \ln \left(\frac{y + \sqrt{2y^2}}{\sqrt{y^2}} \right) \\ &= y^2\sqrt{2} - y^2 \ln \left(1 + \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

Obținem

$$I = \int_1^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \sqrt{2} - \frac{1}{2} y^2 \ln \left(1 + \sqrt{2} \right) \right] dy = \frac{\sqrt{2} - \ln \left(1 + \sqrt{2} \right)}{2} \frac{y^3}{3} \Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{7 \left[\sqrt{2} - \ln \left(1 + \sqrt{2} \right) \right]}{6}.$$

9. Să se calculeze integrala precedentă folosind faptul că, deși domeniul D nu este simplu în raport cu axa Oy , se poate totuși descompune în două subdomenii care sunt simple în raport cu axa Oy .

Rezolvare:

Obținem:

$$I = \iint_{D_1} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy + \iint_{D_2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

unde $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ și $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2\}$.

10. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$\iint_D y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx dy,$$

unde D este discul $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Rezolvare:

Obținem explicitarea:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}.$$

11. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$\iint_D (1 - y) dx dy,$$

unde D este domeniul dat de $x^2 + y^2 - 2y \leq 0, y \leq x^2$ și $x \geq 0$.

Rezolvare:

Să observăm că

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

reprezintă cercul cu centrul $C(0, 1)$ și raza 1.

Obținem explicitarea

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq x^2\}.$$

Aplicăm teorema de reducere și obținem

$$I = \int_0^1 \left(\int_{1 - \sqrt{1 - x^2}}^{x^2} (1 - y) dy \right) dx.$$

Calculăm mai întâi

$$\int_{1 - \sqrt{1 - x^2}}^{x^2} (1 - y) dy = \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=1 - \sqrt{1 - x^2}}^{y=x^2}.$$

12. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$\iint_D xy dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de $xy = 1$ și $x + y = \frac{5}{2}$.

Rezolvare:

Obținem explicitarea

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{5}{2} - x \right\}.$$

Aplicăm teorema de reducere și obținem

$$I = \int_{1/2}^2 \left(\int_{1/x}^{-x+5/2} xy \, dy \right) dx.$$

Calculăm mai întâi

$$\int_{1/x}^{-x+5/2} xy \, dy = x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1/x}^{y=-x+5/2} = \frac{1}{2} x \left[\left(-x + \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{1}{x^2} \right].$$

13. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$\iint_D (|x| + |y|) \, dx dy,$$

unde D este domeniul dat de $|x| + |y| \leq 1$.

Rezolvare:

În cadranul I domeniul devine $D_1 : x + y \leq 1$ și $x, y \geq 0$ (deci D_1 este mărginit de dreptele $y = -x + 1, x = 0, y = 0$).

În cadranul II domeniul devine $D_2 : -x + y \leq 1$ și $x \leq 0, y \geq 0$ (deci D_2 este mărginit de dreptele $y = x + 1, x = 0, y = 0$).

În cadranul III domeniul devine $D_3 : -x - y \leq 1$ și $x, y \leq 0$ (deci D_3 este mărginit de dreptele $y = -x - 1, x = 0, y = 0$).

În cadranul IV domeniul devine $D_4 : x - y \leq 1$ și $x \geq 0, y \leq 0$ (deci D_4 este mărginit de dreptele $y = x - 1, x = 0, y = 0$).

Atunci $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ și

$$I = \iint_{D_1} (|x| + |y|) \, dx dy + \iint_{D_2} (|x| + |y|) \, dx dy + \iint_{D_3} (|x| + |y|) \, dx dy + \iint_{D_4} (|x| + |y|) \, dx dy,$$

unde

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x + 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq x + 1\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, -x - 1 \leq y \leq 0\},$$

$$D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq 0\}.$$

14. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx dy,$$

unde D este domeniul dat de $y^2 \leq 8x, y \leq 2x$ și $y + 4x \leq 24$.

Rezolvare:

Domeniul D nu este simplu în raport cu axa Oy , dar se poate descompune în trei subdomenii care sunt simple în raport cu axa Oy .

Deci

$$I = \iint_{D_1} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx dy + \iint_{D_2} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx dy + \iint_{D_3} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx dy,$$

unde

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{8x} \leq y \leq 2x\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 9/2, -\sqrt{8x} \leq y \leq \sqrt{8x}\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9/2 \leq x \leq 8, -\sqrt{8x} \leq y \leq -4x + 24\}.$$

15. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$\iint_D y \, dx dy,$$

unde D este domeniul dat de $x^2 + y^2 \geq 2x, y^2 \leq 8x$ și $0 \leq x \leq 2$.

Rezolvare:

Domeniul D nu este simplu în raport cu axa Oy , dar se poate descompune în două subdomenii care sunt simple în raport cu axa Oy .

Deci

$$I = \iint_{D_1} y \, dx dy + \iint_{D_2} y \, dx dy,$$

unde

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{2x} \leq y \leq -\sqrt{2x - x^2}\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \sqrt{2x} \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}.$$

16. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} \, dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de curbele $x = 2, y = x$ și $xy = 1$.

17. Să se calculeze aria domeniului D mărginit de parabola $y = x^2 - 1$ și de dreapta $y = x + 1$.

Rezolvare:

Trebuie explicitat domeniul D care este simplu în raport cu Oy (în raport cu axa Ox nu este simplu): $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$, deci

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dx dy = \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2-1}^{x+1} dy \right) dx = \int_{-1}^2 \left(y \Big|_{y=x^2-1}^{y=x+1} \right) dy = \int_{-1}^2 (x + 1 - x^2 + 1) dx \\ &= \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=-1}^{x=2}. \end{aligned}$$

18. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx dy,$$

unde D este domeniul dat de: $4x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1$ și $y \geq 0$.

Rezolvare:

Domeniul D este simplu în raport cu axa Oy :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 2\sqrt{1 - x^2}\}.$$

19. Să se calculeze următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă:

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

unde D este domeniul: $x^2 + y^2 \geq x$ și $x^2 + y^2 \leq 2x$.

Rezolvare:

Pentru a desena domeniul trebuie mai întâi să luăm curbele date de egalități:

$$x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow (x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4,$$

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Deci domeniul este dat de exteriorul cercului $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$ de centrul $C_1(1/2, 0)$ și rază $1/2$, și de interiorul cercului $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ de centrul $C_2(1, 0)$ și rază 1 .

Observăm că domeniul nu este simplu în raport cu nici o axă. Putem descompune domeniul în două domenii simple în raport cu axa Oy sau putem folosi **coordonatele polare** (date de coordonatele parametrice ale cercului)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \quad \rho \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Jacobianul în cazul trecerii la coordonate polare este dat de:

$$J(\rho, \theta) = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho$$

Trebuie să determinăm domeniile exacte pentru noile variabile polare (ρ, θ) . Folosim inegalitățile domeniului dat D

$$x^2 + y^2 \geq x \Rightarrow (\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 \geq \rho \cos \theta \Leftrightarrow \rho^2 \geq \rho \cos \theta \Leftrightarrow \rho \geq \cos \theta$$

respectiv

$$x^2 + y^2 \leq 2x \Rightarrow (\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 \leq 2\rho \cos \theta \Leftrightarrow \rho^2 \leq 2\rho \cos \theta \Leftrightarrow \rho \leq 2 \cos \theta.$$

În ceea ce privește unghiul θ deducem din graficul domeniului D că $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Deci

$$\Delta = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \rho \in [\cos \theta, 2 \cos \theta]\}$$

Integrala dublă devine

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} ((\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2) |J(\rho, \theta)| d\rho d\theta = \iint_{\Delta} \rho^2 \rho d\rho d\theta = \iint_{\Delta} \rho^3 d\rho d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} \rho^3 d\rho \right) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^4}{4} \Big|_{\rho=\cos \theta}^{\rho=2 \cos \theta} d\theta = \frac{15}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta, \end{aligned}$$

pentru care folosim, de două ori, formula

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}.$$

20. Să se calculeze următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă:

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de curba $x^2 + y^2 = 2$.

Rezolvare:

Observ mai întâi că D este interiorul cercului (discul) dat de

$$x^2 + y^2 \leq (\sqrt{2})^2.$$

Se trece la coordonate polare (ρ, θ) date de

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este $J = \rho$.

Din inegalitatea care dă pe D vom obține domeniul noii variabile ρ :

$$\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \leq 2 \Leftrightarrow \rho^2 \leq 2 \Leftrightarrow \rho \in [0, \sqrt{2}].$$

Din desen avem că $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\text{Deci noul domeniu } \Delta : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Conform schimbării de variabilă și a teoremei de reducere vom obține că

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho \right] d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho.$$

21. Să se calculeze următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă:

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

unde D este domeniul din primul cadran limitat de $x^2 + y^2 = a^2$, $y = x\sqrt{3}$ și $x = y\sqrt{3}$.

Rezolvare:

Observ mai întâi că D este interiorul cercului (discul) dat de

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

astfel încât $\frac{1}{\sqrt{3}} x \leq y \leq x\sqrt{3}$.

Se trece la coordonate polare (ρ, θ) și, din inegalitatea care dă pe D , vom obține domeniul pentru ρ :

$$\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \leq a^2 \Leftrightarrow \rho^2 \leq a^2 \Leftrightarrow \rho \in [0, a].$$

Din desen avem că $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, unde θ_1, θ_2 sunt unghiurile făcute de dreptele $y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$ și respectiv $y = x\sqrt{3}$ cu axa Ox . Deci $\text{tg}(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și $\text{tg}(\theta_2) = \sqrt{3}$.

$$\text{Obținem noul domeniu } \Delta : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq a, \\ \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Conform schimbării de variabilă și a teoremei de reducere vom obține că

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left[\int_0^a (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho \right] d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta \cdot \int_0^a \rho^3 d\rho.$$

22. Să se calculeze următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă:

$$\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

unde D este domeniul dat de
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4\pi^2, \\ x^2 + y^2 \geq \pi^2. \end{cases}$$

Rezolvare:

Se trece la coordonate polare (ρ, θ) și, din inegalitatea care dă pe D , vom obține domeniul pentru ρ :

$$\pi^2 \leq \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \leq 4\pi^2 \Leftrightarrow \pi^2 \leq \rho^2 \leq 4\pi^2 \Leftrightarrow \rho \in [\pi, 2\pi].$$

Din desen avem că $\theta \in [0, 2\pi]$.

Obținem noul domeniu Δ :
$$\begin{cases} \pi \leq \rho \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Conform schimbării de variabilă și a teoremei de reducere vom obține că

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_{\pi}^{2\pi} \sin(\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho \right] d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta \cdot \int_0^a \rho \sin(\rho^2) d\rho.$$

23. Să se calculeze următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă:

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy,$$

unde $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$.

Rezolvare:

Observăm mai întâi că D este exteriorul cercului

$$x^2 + y^2 \geq 1$$

intersectat cu interiorul cercului

$$(x - 1)^2 + y^2 \leq 1.$$

Se trece la coordonate polare (ρ, θ) și, din inegalitatea care dă pe D , vom obține domeniul noii variabile ρ :

$$1 \leq \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \leq 2\rho \cos \theta \Leftrightarrow 1 \leq \rho^2 \leq 2\rho \cos \theta \Leftrightarrow \rho \in [1, 2 \cos \theta].$$

Observăm că trebuie impusă condiția

$$2 \cos \theta \geq 1 \Leftrightarrow \cos \theta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right].$$

Pe de altă parte, din desen avem că $\theta \in [-\theta_1, \theta_2]$, unde θ_1, θ_2 sunt unghiurile făcute de dreptele $y = -\sqrt{3}x$ și respectiv $y = x\sqrt{3}$ cu axa Ox . Deci $\text{tg}(\theta_2) = \sqrt{3}$.

Deci noul domeniu Δ :
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \\ 1 \leq \rho \leq 2 \cos \theta. \end{cases}$$

Conform schimbării de variabilă și a teoremei de reducere vom obține că

$$I = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[\int_1^{2 \cos \theta} \text{tg}^2(\theta) \rho d\rho \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \text{tg}^2(\theta) [4 \cos^2 \theta - 1] d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} [4 \sin^2 \theta - \text{tg}^2(\theta)] d\theta.$$

Deci trebuie calculate primitiva

$$\int \sin^2 \theta d\theta$$

folosind formula $\sin^2 \theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, precum și primitiva

$$\int \operatorname{tg}^2(\theta) d\theta$$

folosind substituția $\operatorname{tg}(\theta) = t$ și formulele $\sin \theta = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ și $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

24. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze aria domeniului D din primul cadran mărginit de curbele

$$\begin{cases} xy = p, \\ xy = q \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} y = ax, \\ y = bx, \end{cases} \quad 0 < p < q, \quad 0 < a < b.$$

Rezolvare:

Trebuie calculată aria dată de integrala

$$\mathcal{A} = \iint_D dx dy.$$

Vom face schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} xy = u, \\ y/x = v, \end{cases}$$

deci echivalent obținem

$$\begin{cases} x = \sqrt{u/v} = u^{1/2}v^{-1/2}, \\ y = \sqrt{uv} = u^{1/2}v^{1/2}, \quad u \in [p, q], \quad v \in [a, b]. \end{cases}$$

Jacobianul este dat de $J = \frac{1}{2v}$ iar domeniul Δ este deci dreptunghiular

$$\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [p, q], v \in [a, b]\} = [p, q] \times [a, b].$$

25. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze aria domeniului D mărginit de curbele

$$\begin{cases} y^2 = px, \\ y^2 = qx \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x^2 = ay, \\ x^2 = by, \end{cases} \quad 0 < p < q, \quad 0 < a < b.$$

26. Folosind coordonatele polare generalizate să se calculeze aria domeniului D mărginit de elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Rezolvare:

Trebuie calculată aria dată de integrala

$$\mathcal{A} = \iint_D dx dy.$$

Se trece la coordonate polare generalizate (ρ, θ) date de

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta, \\ y = b\rho \sin \theta. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este $J = ab\rho$.

Din inegalitatea care dă pe D vom obține domeniul noii variabile ρ :

$$\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \in [0, 1].$$

Din desen avem că $\theta \in [0, 2\pi]$.

Deci noul domeniu Δ : $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq \rho \leq 1. \end{cases}$

27. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze integrala

$$\iint_D \arcsin \sqrt{x+y} \, dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de $x+y=0$, $x+y=1$ și $y=-1$, $y=1$.

Rezolvare:

Vom face schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} x+y=u, \\ y=v \end{cases}$$

deci echivalent obținem

$$\begin{cases} x=u-v, \\ y=v, \quad u \in [0, 1], \quad v \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Jacobianul este dat de $J=1$ iar domeniul Δ este deci dreptunghiular

$$\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0, 1], \quad v \in [-1, 1]\} = [0, 1] \times [-1, 1].$$

28. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze integrala

$$\iint_D (x+y)^4 (x-y)^2 \, dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de $x+y=-1$, $x+y=1$ și $x-y=-3$, $x-y=-1$.

Rezolvare:

Vom face schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} x+y=u, \\ x-y=v \end{cases}$$

deci echivalent obținem

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v), \\ y = \frac{1}{2}(u-v), \quad u \in [-1, 1], \quad v \in [-3, -1]. \end{cases}$$

29. Să se transforme următoarea integrală curbilinie folosind formula lui Green:

$$I = \oint_{(\gamma)} \sqrt{x^2+y^2} dx + y \left(xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2+y^2} \right) \right) dy,$$

unde (γ) este curba închisă $x^2+y^2=1$.

Rezolvare:

Formula lui Green: dacă curba închisă (γ) mărginește domeniul D atunci are loc

$$I = \int_{(\gamma)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

30. Să se aplice formula lui Green pentru calculul integralei curbilinii

$$\oint_{(\gamma)} 2(x^2+y^2) dx + (x+y)^2 dy,$$

unde (γ) este triunghiul dat de intersecția dreptelor $x=1$, $y=x$ și $y=4-x$.

31. Să se aplice formula lui Green pentru calculul integralei curbilinii

$$\oint_{(\gamma)} (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,$$

unde (γ) este triunghiul cu vârfurile $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ și $O(0, 0)$.

32. Să se găsească volumul unui corp mărginit de planul xOy și de planele $x = 0$, $x = a$ și $y = 0$, $y = b$ și superior de suprafața $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$.

Rezolvare:

Avem

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

unde $z = f(x, y)$ și $D = [0, a] \times [0, b]$. Deci

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(D)} \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dx dy = \int_0^a \left(\int_0^b \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^a \left(\left(\frac{x^2}{2p} \cdot y + \frac{1}{2q} \cdot \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=b} \right) dx = \int_0^a \left(\frac{bx^2}{2p} + \frac{b^3}{6q} \right) dx \\ &= \left(\frac{b}{2p} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{b^3}{6q} \cdot x \right) \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{a^3 b}{6p} + \frac{ab^3}{6q}. \end{aligned}$$

33. Să se calculeze următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă:

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

unde D este domeniul: $x^2 + y^2 \leq 2y$.

Rezolvare:

Observ mai întâi că D este interiorul cercului

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Se trece la coordonate polare (ρ, θ) și, din inegalitatea care dă pe D , vom obține noul domeniu

$$\Delta : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 2 \sin \theta \end{cases}. \text{ Conform schimbării de variabilă și a reducerii vom obține că}$$

$$I = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{1 + 4 \sin^2 \theta} d\theta$$

care se va rezolva cu substituția

$$\operatorname{tg}(\theta) = t$$

și cu formulele trigonometrice

$$\sin(\theta) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

34. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze integrala

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1 + b^2 x^2 + a^2 y^2)^2},$$

unde D este domeniul: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Rezolvare:

Observ mai întâi că D este dat de interiorul elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Se trece la coordonate polare generalizate (ρ, θ) date de ecuațiile $\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \\ y = b\rho \sin \theta \end{cases}$ și, din inegalitatea care dă pe D , vom obține noul domeniu $\Delta : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$. Conform schimbării de variabilă și a reducerii vom obține că

$$I = 2\pi \int_0^1 \frac{ab\rho}{(1 + a^2b^2\rho^2)^2} d\rho.$$

35. Să se calculeze

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy,$$

unde D este sfertul din primul cadran al discului $x^2 + y^2 \leq 1$.

36. Să se calculeze

$$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy,$$

unde D este sfertul din primul cadran al interiorului elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Rezolvare:

Se trece la coordonate polare generalizate (ρ, θ) date de

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta, \\ y = b\rho \sin \theta. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este $J = ab\rho$.

Din inegalitatea care dă pe D vom obține domeniul noii variabile ρ :

$$\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \leq 1 \Leftrightarrow \rho^2 \leq 1 \Leftrightarrow \rho \in [0, 1].$$

Din desen avem că $\theta \in [0, \pi/2]$.

Deci noul domeniu $\Delta : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ 0 \leq \rho \leq 1. \end{cases}$

Se obține integrala

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2} \frac{a\rho \cos \theta \cdot b\rho \sin \theta}{\sqrt{(a\rho \cos \theta)^2 + (b\rho \sin \theta)^2}} \rho d\theta \right] d\rho = ab \int_0^1 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} d\theta.$$

Ultima integrală se rezolvă cu substituția

$$t = \sin^2 \theta \Rightarrow dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

37. Să se calculeze masa și coordonatele centrului de greutate ale plăcii $D = \{x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ dacă densitatea este $\mu(x, y) = xy$.

Rezolvare:

Masa m a plăcii D este dată de

$$m = \iint_D \mu(x, y) dx dy$$

iar coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G)$ sunt date de

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iint_D x \mu(x, y) dx dy, \\ y_G = \frac{1}{m} \iint_D y \mu(x, y) dx dy. \end{cases}$$

38. Să se calculeze masa și coordonatele centrului de greutate ale plăcii $D = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \geq ax, y \geq 0\}$ dacă densitatea este $\mu(x, y) = 1$.

Rezolvare:

Observ că D este dat de interiorul cercului $x^2 + y^2 = a^2$ și de exteriorul cercului $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Se trece la coordonate polare (ρ, θ) și, din inegalitatea care dă pe D , vom obține noul domeniu

$$\Delta : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi, \\ a \cos \theta \leq \rho \leq a. \end{cases}$$

39. Să se calculeze volumul corpului mărginit de planele $x = 0, y = 0, z = 0$, de cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$ și superior de către paraboloidul hiperbolic $5z = xy$.

Rezolvare:

Volumul este dat de

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

unde $z = f(x, y)$ este ecuația suprafeței ce mărginește superior volumul, iar $(x, y) \in D$ unde D este proiecția suprafeței pe planul XOY . În cazul nostru D este sfertul de disc $x^2 + y^2 \leq R^2, x, y \geq 0$.

40. Să se calculeze următoarea integrală dublă pe un domeniu dreptunghiular

$$\iint_D \cos(x + y) dx dy,$$

unde D este dreptunghiul $D = [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

41. Să se calculeze următoarea integrală dublă pe un domeniu dreptunghiular

$$\iint_D x \cos(xy) dx dy,$$

unde D este dreptunghiul $D = [1, 2] \times [0, \pi]$.

42. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$\iint_D (x + 2y) dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de curbele $y = 2x$ și $y = 3 - x^2$.

43. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$\iint_D (2x + 5y) dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de curbele $y = 0, y = 4, x = 4$ și $y = x^2$.

44. Să se calculeze volumul cilindroidului

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 25, y \leq \frac{3}{4}x, z \leq 25 + xy \right\}$$

(este corpul mărginit superior de către paraboloidul hiperbolic $z = 25 + xy$ și cu proiecția pe planul xOy dată de porțiunea de disc $x^2 + y^2 \leq 25, y \leq \frac{3}{4}x$).

45. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$\iint_D (1+x) dx dy,$$

unde

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|, y \leq \frac{1}{2}x + 2 \right\}.$$

46. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$\iint_D \frac{y}{1+x} dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de curbele $x^2 + y^2 = 25$ și $x^2 + y^2 - \frac{25}{4}x = 0$.

47. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy,$$

unde

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

48. Să se transforme integrala dublă $\iint_D f(x, y) dx dy$ în integrale iterate, unde D este domeniul mărginit de cercurile $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$.

Rezolvare:

În cazul nostru, primul cerc este

$$(C_1) : x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1,$$

adică are centrul în $C_1(1, 0)$ și raza $r_1 = 1$.

Al doilea cerc

$$(C_2) : x^2 + y^2 = 4x \Leftrightarrow (x^2 - 4x) + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4$$

este cu centrul în $C_2(2, 0)$ și de rază $r_2 = 2$.

Ducem prin $x = 2$ o paralelă la axa Oy și astfel domeniul D se va împărți în trei subdomenii: $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ și fiecare subdomeniu D_i este simplu în raport cu Oy . Are loc

$$I = \iint_{(D_1)} f(x, y) dx dy + \iint_{(D_2)} f(x, y) dx dy + \iint_{(D_3)} f(x, y) dx dy$$

Trebuie explicitat fiecare subdomeniu. În acest sens vom scrie ecuațiile explicite ale cercurilor:

$$(C_1) : x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow y^2 = 2x - x^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{2x - x^2}$$

$$(C_2) : x^2 + y^2 = 4x \Leftrightarrow y^2 = 4x - x^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{4x - x^2}$$

deci obținem

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \sqrt{2x - x^2} \leq y \leq \sqrt{4x - x^2} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{4x - x^2} \leq y \leq -\sqrt{2x - x^2} \right\}$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 4, -\sqrt{4x - x^2} \leq y \leq \sqrt{4x - x^2} \right\}$$

În acest caz integralele sunt date de

$$I_1 = \iint_{(D_1)} f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy \right) dx,$$

$$I_2 = \iint_{(D_2)} f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \right) dx,$$

$$I_3 = \iint_{(D_3)} f(x, y) dx dy = \int_2^4 \left(\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Facultatea de Matematică
Calcul Integral și Aplicații, Semestrul I
 Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 10 - 12

Capitolul IV. Integrala dublă

ANEXĂ

Conicele sunt date de ecuații algebrice de gradul 2, cu două necunoscute. Ecuațiile lor reduse sunt următoarele.

1. **Cercul cu centrul în $C(a, b)$ și de rază R** are ecuația implicită

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, R > 0.$$

Acesta are ecuațiile explicite date de

$$y = b \pm \sqrt{R^2 - (x - a)^2}$$

și ecuațiile parametrice date de

$$\begin{cases} x = R \cos \theta, \\ y = R \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

2. **Elipsa cu centrul în origine și de semiaxe a și b** are ecuația implicită

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Aceasta are ecuațiile explicite date de

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

și ecuațiile parametrice date de

$$\begin{cases} x = aR \cos \theta, \\ y = bR \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

3. **Parabola cu axa Oy drept axă de simetrie** are ecuația explicită

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

4. **Parabola cu axa Ox drept axă de simetrie** are ecuația implicită

$$y^2 = 2px, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Aceasta are ecuațiile explicite date de

$$y = \pm \sqrt{2px}.$$

5. **Hiperbola** are ecuația implicită

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Aceasta are ecuațiile explicite date de

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

6. **Hiperbola echilaterală cu axele de coordonate drept asimptote** are ecuația implicită

$$xy = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

deci ecuația explicită este

$$y = \frac{c}{x}.$$