Facultatea de Matematică
Calcul Integral şi Aplicaţii, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 13 - 15

Capitolul V. Integrala triplă

1. Să se calculeze
$$\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z)^2}\,,$$
unde $V = [1,3]\times[0,1]\times[0,2]$.

Rezolvare:
$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{1}{(x+y+z)^2} dz\right) dy\right) dx = \int_1^3 \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 (x+y+z)^{-2}\, dz\right) dy\right) dx \\ &= \int_1^3 \left(\int_0^1 \left(\left.\frac{(x+y+z)^{-1}}{-1}\right|_{z=0}^{z=2}\right) dy\right) dx = -\int_1^3 \left(\int_0^1 \left((2+x+y)^{-1} - (x+y)^{-1}\right) dy\right) dx \end{aligned}$$

2. Să se calculeze
$$\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}\,,$$
unde V este mărginit de planele $x=0, y=0, z=0$ şi de planul $x+y+z=1$.

Rezolvare:

Explicitarea lui V : $\begin{cases} (x,y)\in D \\ 0\le z\le 1-x-y \end{cases}$ unde domeniul D este dat de placa triunghiulară D : $\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le 1-x. \end{cases}$

3. Să se calculeze
$$\iiint_V ydxdydz\,,$$
unde V este tetraedrul din primul octant mărginit de planele de coordonate $x=0, y=0, z=0$ şi de planul $x+y+z=2$.

Rezolvare:

Explicitarea lui V : $\begin{cases} (x,y)\in D \\ 0\le z\le 2-x-y \end{cases}$ unde domeniul D este proiecţia corpului V pe planul xOy, deci este placa triunghiulară D : $\begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2-x \end{cases}$.
$$I = \iint_D \left(\int_0^{2-x-y} ydz\right) dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{2-y} \left(\int_0^{2-x-y} ydz\right) dy\right) dx.$$

4. Să se calculeze
$$\iiint_V z dxdydz\,,$$
unde V este jumătatea superioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Rezolvare:

Explicitarea lui $V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ 0\le z\le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\end{cases}$ unde domeniul D este dat de interiorul de elipsă $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

5. Să se calculeze
$$\iiint_V z dxdydz\,,$$
unde V este mărginit de suprafaţa conică $z^2=\frac{h^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right)$, $0\le z\le h$.

Rezolvare:

Explicitarea lui $V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le h\end{cases}$ unde domeniul D este discul $D:x^2+y^2\le R^2$.

6. Să se calculeze
$$\iiint_V (x+y+z)^2\,dxdydz\,,$$
unde V este dat de $V:\begin{cases}x^2+y^2\le 2az, \quad a>0,\\ x^2+y^2+z^2\le 3a^2.\end{cases}$

Rezolvare:

Mai întâi determin intersecţia celor două corpuri. Deci $x^2+y^2=2az$ şi introduc în a doua ecuaţie: $2az+z^2=3a^2 \Leftrightarrow (z-a)(z+3a)=0$ şi deoarece $z\ge 0$ aleg soluţia $z=a$. deci obţin $x^2+y^2=\left(a\sqrt{2}\right)^2$ care este ecuaţia cercului în care se întâlneşte paraboloidul cu sfera. Explicitarea lui $V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ \frac{x^2+y^2}{2a}\le z\le\sqrt{3a^2-x^2-y^2}\end{cases}$ unde domeniul D este discul $D:x^2+y^2\le\left(a\sqrt{2}\right)^2$.

7. Să se calculeze
$$\iiint_V \left(x^2+y^2\right) z dxdydz\,,$$
unde V este mărginit de paraboloidul $z=x^2+y^2$ şi de sfera $x^2+y^2+z^2=6$ şi conţine o parte din porţiunea nenegativă a axei Oz.

Rezolvare:

Explicitarea lui $V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ x^2+y^2\le z\le\sqrt{6-x^2-y^2}\end{cases}$ unde domeniul D este proiecţia corpului V pe planul xOy (se determină mai întâi sferei $x^2+y^2+z^2=6$ cu paraboloidul $z=x^2+y^2$), deci este discul $D:x^2+y^2\le 2$.

$$I=\iint_D\left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2\right)zdz\right)dxdy.$$

8. Să se calculeze
$$\iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz\,,$$
unde V este bila închisă de rază R cu centrul în origine.

Rezolvare:

Pentru a calcula integrala triplă vom folosi coordonate sferice cu $\rho\in[0,R]\,,\varphi\in[0,\pi]\,,\theta\in[0,2\pi]\,,$ $J=-\rho^2\sin\varphi$. Deci
$$\mathcal{V}=\int_0^R\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\left((\rho\cos\theta\sin\varphi)^2+(\rho\sin\theta\sin\varphi)^2+(\rho\cos\varphi)^2\right)\,|J|\;d\theta\right)d\varphi\right)d\rho.$$

9. Să se calculeze
$$\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,$$
unde V este situat în semispaţiul superior şi este delimitat de sferele $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=9$ şi de conul $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Rezolvare:

Pentru a calcula integrala triplă vom folosi coordonate sferice cu $\rho\in[1,3]\,,\varphi\in[0,\pi/4]\,,\theta\in[0,2\pi]$, $J=-\rho^2\sin\varphi$. Deci
$$\mathcal{V}=\int_1^3\left(\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(\rho\cos\theta\sin\varphi)^2+(\rho\sin\theta\sin\varphi)^2+(\rho\cos\varphi)^2}}\;|J|\;d\theta\right)d\varphi\right)d\rho.$$

10. Să se calculeze
$$\iiint_V \left(x^2+y^2\right) dxdydz$$
unde V este coroana circulară mărginită de cilindrii circulari $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$ şi de planele $z=0$ şi de $z=1$.

Rezolvare:

Pentru a calcula integrala triplă vom folosi coordonatele cilindrice unde $\rho\in[2,3]\,,\theta\in[0,2\pi]\,,z\in[0,1]$ iar iacobianul este, făcând calculele, $J=\rho$. Deci
$$\mathcal{V}=\int_2^3\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left((\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2\right)\,|J|\;dz\right)d\theta\right)d\rho.$$

11. Să se calculeze
$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz\,,$$
unde V este dat de $1\le\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 4$.

Rezolvare:

Pentru a calcula integrala vom folosi coordonate sferice generalizate cu $\rho\in[1,2]\,,\theta\in[0,\pi]\,,\theta\in[0,2\pi]$, $J=-abc\rho^2\sin\varphi$. Deci
$$\mathcal{V}=\int_1^2\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{(a\rho\cos\theta\sin\varphi)^2}{a^2}+\frac{(b\rho\sin\theta\sin\varphi)^2}{b^2}+\frac{(c\rho\cos\varphi)^2}{c^2}\right)\,|J|\;d\theta\right)d\varphi\right)d\rho.$$

12. Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski următoarea integrală de suprafaţă de specia a doua
$$\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy\,,$$
unde (S) este faţa exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Rezolvare:

Observ că $P = x^2, Q = y^2, R = z^2$; pentru a calcula integrala triplă pe interiorul unui elipsoid folosim coordonatele sferice generalizate.

13. Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski următoarea integrală de suprafaţă de specia a doua
$$\iint_S x^3y^2dydz + x^2y^3dzdx + 3zdxdy\,,$$
unde S este faţa exterioară a domeniului V mărginit de paraboloizii $z = x^2 + y^2$, $z = 6 - x^2 - y^2$.

Rezolvare:

Conform formulei lui Gauss-Ostrogradski
$$I = \iiint_V \left(3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3z\right) dxdydz$$
unde $V : \begin{cases} (x,y) \in D \\ x^2 + y^2 \leq z \leq 6 - x^2 - y^2 \end{cases}$ iar domeniul D este proiecţia corpului V pe planul xOy (se determină mai întâi intersecţia celor doi paraboloizi), deci este discul $D : x^2 + y^2 \leq 3$.
$$I = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} \left(3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3\right) dz\right) dxdy.$$
Pentru calculul integralei duble folosim coordonate polare.

14. Să se determine volumul corpului dat de $\dfrac{z^2}{h^2} \geq x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq h$.

Rezolvare:

Volumul lui V este dat de
$$\mathcal{V} = \iiint_V dxdydz$$
Explicitarea lui V : $\begin{cases} (x,y) \in D \\ h\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h \end{cases}$ unde domeniul D este proiecţia corpului V pe planul xOy (se determină mai întâi intersecţia planului $z = h > 0$ cu paraboloidul $\frac{z^2}{h^2} = x^2 + y^2$), deci este discul $D : x^2 + y^2 \leq 1$.
$$I = \iint_D \left(\int_{h\sqrt{x^2+y^2}}^{h} dz\right) dxdy.$$
Pentru calculul integralei duble folosim coordonate polare.

15. Să se determine volumul corpului situat în semispaţiul superior $z \geq 0$ şi mărginit de suprafeţele $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, $a < b$.

Rezolvare:

Pentru a calcula integrala triplă vom folosi coordonate sferice cu $\rho \in [a,b]\,, \varphi \in [0,\pi/4]\,, \theta \in [0,2\pi]$, $J = -\rho^2 \sin\varphi$. Deci

$$\mathcal{V} = \int_a^b \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} |J| \; d\theta \right) d\varphi \right) d\rho.$$

16. Să se calculeze volumul unui corp mărginit de suprafeţele $z = x^2 + y^2 - 1$ şi $z = 2 - x^2 - y^2$.

17. Să se calculeze volumul unui corp mărginit de suprafaţa

(i) $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^3 z$ cu $x, y, z \geq 0$.

(ii) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2 y}{h^3}$ cu $x, y, z \geq 0$.

Rezolvare:

(i) Pentru a calcula volumul $\mathcal{V} = \iiint_V dxdydz$ folosesc coordonatele sferice. Suntem în primul octant ($x, y, z \geq 0$) deci $\varphi \in [0,\pi/2]\,, \theta \in [0,\pi/2]$. Pentru a determina ρ folosim inegalitatea care-l dă pe $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^3 z$. Deci

$$\begin{aligned} &\left((\rho\cos\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\varphi)^2 \right)^2 \leq a^3 \rho\cos\varphi \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\rho^2\right)^2 \leq a^3\rho\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \rho \leq a\sqrt[3]{\cos\varphi}\,. \end{aligned}$$

Deci $\Delta : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq a\sqrt[3]{\cos\varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$ iar $J = -\rho^2 \sin\varphi$.

(ii) Pentru a calcula volumul $\mathcal{V} = \iiint_V dxdydz$ folosesc coordonatele sferice generalizate. Suntem în primul octant ($x, y, z \geq 0$) deci $\varphi \in [0,\pi/2]\,, \theta \in [0,\pi/2]$. Pentru a determina ρ folosim inegalitatea care-l dă pe $V : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 \leq \frac{x^2 y}{h^3}$. Deci

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{(a\rho\cos\theta\sin\varphi)^2}{a^2} + \tfrac{(b\rho\sin\theta\sin\varphi)^2}{b^2} + \tfrac{(c\rho\cos\varphi)^2}{c^2} \right)^2 \leq \tfrac{(a\rho\cos\theta\sin\varphi)^2 (b\rho\sin\theta\sin\varphi)}{h^3} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \rho^4 \leq \tfrac{a^2 b}{h^3}\,\rho^3\cos^2\theta\sin^3\varphi\sin\theta. \end{aligned}$$

Deci $\Delta : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \frac{a^2 b}{h^3}\,\cos^2\theta\sin^3\varphi\sin\theta \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$ iar $J = -abc\rho^2\sin\varphi$.

18. Să se calculeze

$$\iiint_V \frac{1}{\left(a^2 + x^2 + y^2 - z\right)^{3/2}} dxdydz\,,$$

unde V este dat de $az \leq x^2 + y^2 \leq a^2$ cu $z \geq 0$.

19. Să se calculeze

$$\iiint_V \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}\right)^{3/2} dxdydz\,,$$

unde V este dat de $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} \leq 1$ cu $y \geq 0, z \geq 0$.

20. Să se determine masa şi centrul de greutate al interiorului de sferă $x^2+y^2+z^2 \leq 2az$ dacă densitatea μ într-un punct este invers proporţională cu distanţa de la acel punct la originea coordonatelor, i.e. $\mu(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Rezolvare:

Pentru a calcula integralele triple vom trece la coordonate sferice. Observăm mai întâi că sfera este

$$x^2+y^2+z^2 = 2az \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z-2az = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+(z-a)^2 = a^2,$$

deci are centrul în punctul $C(0,0,a)$ şi raza a deci este situată deasupra planului $z=0$ (planul xOy). Deci $\varphi \in [0,\pi/2]$, $\theta \in [0,2\pi]$. Pentru a determina ρ folosim inegalitatea care-l dă pe V :

$$\begin{aligned}&(\rho\cos\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\varphi)^2 \leq 2a\rho\cos\varphi \\ &\Leftrightarrow \quad \rho^2 \leq 2a\rho\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \rho \leq 2a\cos\varphi.\end{aligned}$$

Deci $\Delta : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2a\cos\varphi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$ iar $J = -\rho^2\sin\varphi$.

Mai întâi trebuie calculată masa dată de formula (2):

$$\begin{aligned}m &= \iiint_V \mu(x,y,z)\,dxdydz = k\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\varphi}\frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\,|J|\,d\rho\right)d\varphi\right)d\theta \\ &= k\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\varphi}\rho\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi\right) = k\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\frac{\rho^2}{2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=2a\cos\varphi}d\varphi\right) \\ &= 4a^2k\pi\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = 4a^2k\pi\,\frac{\cos^3\varphi}{-3}\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \frac{4}{3}a^2k\pi\,.\end{aligned}$$

Coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G, z_G)$ sunt date de formulele (3).

21. Să se determine momentul de inerţie în raport cu planul yOz al solidului omogen, de densitate unitate, având configuraţia domeniului V mărginit de planul $z = c > 0$ şi de conul eliptic $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$.

Rezolvare:

Momentul de inerţie în raport cu planul yOz este $I_{yz} = \iiint_V x^2dxdydz$. Explicitarea lui V : $c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \leq z \leq c$, cu $(x,y) \in D$, unde domeniul D este proiecţia corpului V pe planul xOy (se determină mai întâi intersecţia planului $z = c > 0$ cu conul eliptic), deci este discul eliptic $D : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

$$I = \iint_D\left(\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} x^2dz\right)dxdy$$

Pentru calculul integralei duble folosim coordonate polare generalizate.

22. Să se determine coordonatele centrului de greutate al unui solid omogen mărginit de pânza unui con circular drept, având unghiul de la vârf egal cu 2α şi de o sferă de rază R cu centrul în vârful conului, astfel încât $z \in [0,R]$.

Rezolvare:

Dacă un solid este omogen, atunci centrul lui de greutate se găseşte pe axa lui de simetrie (în caz că există), deci în cazul nostru este pe Oz. Astfel obţinem

$$x_G = 0, \quad y_G = 0.$$

Prin definiţie
$$z_G = \frac{1}{m}\iiint_V z dxdydz,$$
unde m este masa lui V, dată de
$$m = \iiint_V \mu\left(x,y,z\right)dxdydz = c\iiint_V dxdydz = c\cdot\mathcal{V},$$
deoarece solidul este omogen, deci densitatea $\mu\left(x,y,z\right)$ este contantă.

Pentru a calcula cele 2 integrale triple vom folosi coordonate sferice cu $\rho\in\left[0,R\right], \varphi\in\left[0,\alpha\right], \theta\in\left[0,2\pi\right]$, $J=-\rho^2\sin\varphi$. Deci
$$\mathcal{V} = \int_0^R\left(\int_0^\alpha\left(\int_0^{2\pi}\left|J\right|d\theta\right)d\varphi\right)d\rho.$$

23. Să se determine momentul de inerţie în raport cu axa Oz a solidului de configuraţie bila de rază a cu centrul în origine, şi densitate $\mu\left(x,y,z\right) = x^2+y^2+z^2$.

Rezolvare:

Momentul de inerţie în raport cu Oz este $I_z = \iiint_V \left(x^2+y^2\right)\mu\left(x,y,z\right)dxdydz.$

Deci
$$I_z = \iiint_V \left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$
care se va calcula folosind coordonatele sferice cu $\rho\in\left[0,a\right], \varphi\in\left[0,\pi\right], \theta\in\left[0,2\pi\right]$, $J=-\rho^2\sin\varphi$.

Obţinem
$$\begin{aligned}I_z = \int_0^a\Bigg(\int_0^\pi\Bigg(\int_0^{2\pi}&\Big(\left(\rho\cos\theta\sin\varphi\right)^2+\left(\rho\sin\theta\sin\varphi\right)^2\Big)\cdot\\ &\cdot\Big(\left(\rho\cos\theta\sin\varphi\right)^2+\left(\rho\sin\theta\sin\varphi\right)^2+\left(\rho\cos\varphi\right)^2\Big)\,\left|J\right|\,d\theta\Bigg)d\varphi\Bigg)d\rho.\end{aligned}$$

Facultatea de Matematică
Calcul Integral şi Aplicaţii, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 13 - 15

Capitolul V. Integrala triplă

ANEXĂ

Teorema 1 (de reducere a integralei triple) *Dacă, V are explicitarea* $V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\end{cases}$ *, atunci are loc reducerea*

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_D\left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy$$

Teorema 2 (schimbarea de variabilă în integrala triplă) *Presupunem că V este dat de ecuaţiile parametrice*

$V:\begin{cases}x=x(\rho,\theta,\varphi)\\ y=y(\rho,\theta,\varphi)\\ z=z(\rho,\theta,\varphi)\end{cases}$ *unde* $(\rho,\theta,\varphi)\in\Delta$.

Vom calcula iacobianul

$$J\overset{not}{=\!=}\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}\overset{def}{=\!=}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho}&\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}.$$

Atunci are loc schimbarea de variabilă în integrala triplă

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_\Delta f(x(\rho,\theta,\varphi),y(\rho,\theta,\varphi),z(\rho,\theta,\varphi))\cdot|J(\rho,\theta,\varphi)|\cdot d\rho d\theta d\varphi \tag{1}$$

Corolarul 3 (folosirea coordonatelor sferice (coordonatele polare în spaţiu)) *Coordonatele sferice (coordonatele polare în spaţiu) sunt (ρ,θ,φ) şi ecuaţiile de legătură cu coordonatele carteziene (x,y,z) sunt*

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\sin\varphi,\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\\ z=\rho\cos\varphi,\end{cases}\quad \text{unde } \rho\in[0,\infty),\varphi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi).$$

În funcţie de domeniul V trebuie determinate, mai precis, intervalele de variaţie pentru ρ,φ,θ, adică domeniul Δ.

Jacobianul este în acest caz dat de $J=\begin{vmatrix}\cos\theta\sin\varphi&-\rho\sin\theta\sin\varphi&\rho\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi&\rho\cos\theta\sin\varphi&\rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\varphi&0&-\rho\sin\varphi\end{vmatrix}$ *(se pot face calcule dezvoltând după a treia linie) şi se va obţine valoarea*

$$J=-\rho^2\sin\varphi.$$

Deci (1) devine

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_\Delta f(x(\rho,\theta,\varphi),y(\rho,\theta,\varphi),z(\rho,\theta,\varphi))\;\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi.$$

Corolarul 4 (folosirea coordonatelor sferice generalizate (coordonatele polare generalizate în spaţiu)) *Coordonatele sferice generalizate (coordonatele polare generalizate în spaţiu) sunt* (ρ, θ, φ) *şi ecuaţiile de legătură cu coordonatele carteziene* (x, y, z) *sunt*

$$\begin{cases} x = a\rho \cos\theta \sin\varphi, \\ y = b\rho \sin\theta \sin\varphi, & \text{unde } \rho \in [0, \infty), \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi). \\ z = c\rho \cos\varphi, \end{cases}$$

În funcţie de domeniul V *trebuie determinate, mai precis, intervalele de variaţie pentru* ρ, θ, φ*, adică domeniul* Δ.

Jacobianul este în acest caz dat de $J = \begin{vmatrix} a\cos\theta\sin\varphi & -a\rho\sin\theta\sin\varphi & a\rho\cos\theta\cos\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & b\rho\cos\theta\sin\varphi & b\rho\sin\theta\cos\varphi \\ c\cos\varphi & 0 & -c\rho\sin\varphi \end{vmatrix}$ *(se pot face calcule dezvoltând după a treia linie) şi se va obţine valoarea*

$$J = -abc\rho^2 \sin\varphi.$$

Deci (1) devine

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_\Delta f(x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi))\; abc\rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi.$$

Corolarul 5 (folosirea coordonatelor cilindrice) *Coordonatele cilindrice sunt* (ρ, θ, h)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, & \text{unde } \rho \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi), h \in (-\infty, +\infty). \\ z = h, \end{cases}$$

În funcţie de domeniul V *trebuie determinate, mai precis, intervalele de variaţie pentru* ρ, θ, h*, adică domeniul* Δ.

Jacobianul este în acest caz dat de $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *(se pot face calcule dezvoltând după a treia linie) şi se va obţine valoarea*

$$J = \rho.$$

Deci (1) devine

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_\Delta f(x(\rho, \theta, h), y(\rho, \theta, h), z(\rho, \theta, h))\; \rho \, d\rho d\theta dh.$$

Teorema 6 *Volumul* $\mathcal{V}$ *al unui corp* V *este dat de*

$$\mathcal{V} = \iiint_V dxdydz$$

Teorema 7 *Fie un corp* V *de densitate* $\mu(x, y, z)$*. Atunci masa este dată de*

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z)\, dxdydz \tag{2}$$

iar coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G, z_G)$ *sunt date de*

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\iiint_V x\mu(x, y, z)\, dxdydz \\ y_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\iiint_V y\mu(x, y, z)\, dxdydz \\ z_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\iiint_V z\mu(x, y, z)\, dxdydz \end{cases} \tag{3}$$

Teorema 8 (Formula lui Gauss-Ostrogradski) *Fie corpul V mărginit de suprafaţa S (adică $S = \mathrm{Fr}\,(V)$) la care alegem faţa exterioară. Are loc următoarea formulă de legătură dintre intregrala triplă şi integrala de suprafaţă de specia a doua:*

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$