Facultatea de Matematică
Calcul Integral şi Aplicaţii, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 16 - 18

Capitolul VI. Integrale de suprafaţă

1. Să se calculeze
$$\iint_S \left(x^2+y^2\right) d\sigma,$$
unde (S) este emisfera superioară $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geq 0$.

Rezolvare:

Pentru a calcula această integrală folosim **ecuaţiile parametrice ale sferei**:
$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\varphi, \end{cases} \tag{1}$$
unde $\theta\in[0,2\pi]$, $\varphi\in[0,\pi]$. Deoarece lucrăm pe emisfera superioară vom lua, evident, $\theta\in[0,2\pi]$, $\varphi\in[0,\pi/2]$. Calculăm coeficienţii
$$\begin{aligned} &E=(x'_\theta)^2+(y'_\theta)^2+(z'_\theta)^2=(-R\sin\theta\sin\varphi)^2+(R\cos\theta\sin\varphi)^2+0^2=R^2\sin^2\varphi, \\ &G=\left(x'_\varphi\right)^2+\left(y'_\varphi\right)^2+\left(z'_\varphi\right)^2=(R\cos\theta\cos\varphi)^2+(R\sin\theta\cos\varphi)^2+(-R\sin\varphi)^2=R^2, \\ &F=x'_\theta\cdot x'_\varphi+y'_\theta\cdot y'_\varphi+z'_\theta\cdot z'_\varphi= \\ &=(-R\sin\theta\sin\varphi)(R\cos\theta\cos\varphi)+(R\cos\theta\sin\varphi)(R\sin\theta\cos\varphi)+0\,(-R\sin\varphi)=0, \end{aligned}$$
deci
$$d\sigma=\sqrt{R^4\sin^2\varphi}\,d\theta d\varphi=R^2\sin\varphi\,d\theta d\varphi. \tag{2}$$
Integrala de suprafaţă se va reduce atunci la o integrală dublă calculată pe dreptunghiul $D=[0,2\pi]\times[0,\pi/2]$:
$$\begin{aligned} I&=\iint_S\left(x^2+y^2\right)d\sigma=\iint_D\left(R^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)R^2\sin\varphi\,d\theta d\varphi \\ &=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}R^4\sin^3\varphi\,d\theta\right)d\varphi=2\pi R^4\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\,d\varphi \end{aligned}$$
(am obţinut integrale din funcţii trigonometrice).

2. Să se calculeze
$$\iint_S \left(x^2+y^2\right) d\sigma,$$
unde (S) este sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3. Să se calculeze
$$\iint_S \left(x^2+y^2\right) d\sigma,$$
unde S este emisfera $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ z\geq 0. \end{cases}$

Rezolvare:

Suprafaţa $x^2+y^2+z^2=a^2$ este o sferă cu centrul în origine de rază a. Putem folosi ecuaţiile parametrice ale sferei dar şi ecuaţiile explicite ale emisferei superioare.

Ecuaţiile explicite ale celor două emisfere sunt

$$z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,.$$

În cazul nostru avem emisfera superioară ($z\geq 0$) care are ecuaţia explicită

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

Elementul de suprafaţă este dat în acest caz de

$$d\sigma=\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy\,,\quad p=z'_x,\ q=z'_y\,,$$

deci

$$p=\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,,\quad q=\frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

şi

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy=\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy.$$

Integrala este atunci dată de următoarea integrala dublă calculată de discul D care este proiecţia suprafeţei S pe planul xOy, adică

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq a^2\right\}$$

iar

$$I=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\frac{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}}\,\rho d\rho\right)d\theta=$$
$$=a\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^a\frac{\rho^3}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,d\rho=2a\pi\int_0^a\rho^3\left(a^2-\rho^2\right)^{-1/2}d\rho$$

(am obţinut o integrală binomă).

4. Să se calculeze

$$\iint_S\left(x^2+y^2+z\right)d\sigma,$$

unde (S) este porţiunea din suprafaţa $z=4-x^2-y^2$ situată în semispaţiul superior.

Rezolvare:

Suprafaţa $z=4-x^2-y^2$ este un paraboloid cu axa de simetrie Oz, cu vârful (punct de maxim) în punctul $V\,(0,0,4)$. Avem deci ecuaţia explicită $z=4-x^2-y^2$ cu $(x,y)\in D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 4\right\}$ (deoarece D este proiecţia suprafeţei S pe planul xOy, deci D este un disc de rază 2). Elementul de suprafaţă este dat în acest caz de

$$d\sigma=\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy,\quad p=z'_x,\ q=z'_y\,,$$

deci

$$p=-2x,\ q=-2y\Rightarrow d\sigma=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

Integrala este atunci dată de următoarea integrala dublă calculată de discul D:

$$I=\iint_D\left(x^2+y^2+4-x^2-y^2\right)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=4\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=$$
$$=4\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\sqrt{1+4\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2\sin^2\theta}\,\rho d\rho\right)d\theta=$$
$$=4\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^R\rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho\right)=\frac{8\pi}{8}\int_0^R\left(1+4\rho^2\right)^{1/2}\left(1+4\rho^2\right)'d\rho.$$

5. Să se calculeze
$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}d\sigma,$$
unde S este dat de $\begin{cases} z^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2+y^2\right), \\ 0\leq z\leq b. \end{cases}$

Rezolvare:

Suprafaţa $z^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2+y^2\right)$ este un con cu vârful în origine şi cu secţiunile prin plane paralele cu planul xOy, cercuri. Ecuaţia explicită este $z=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ şi tinând cont de $0\leq z\leq b$ obţinem ecuaţia explicită
$$z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ 0\leq z\leq b.$$
Intesecţia conului cu planul $z=b$ este dată de
$$\begin{cases} z^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2+y^2\right), \\ z=b, \end{cases}$$
deci
$$\frac{b^2}{a^2}\left(x^2+y^2\right)=b^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=a^2,$$
adică un cerc de rază a.

Proiecţia pe planul xOy este domeniul $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq a^2\right\}$.

Calculăm
$$p=\frac{b}{a}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}},\ q=\frac{b}{a}\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$
deci
$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{b^2}{a^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\,dxdy.$$
Integrala este atunci dată de următoarea integrala dublă calculată de discul D:
$$I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\ \rho d\rho\right)d\theta=$$
$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^a\rho^2d\rho\right).$$

6. Să se calculeze
$$\iint_S (x+y+z)^{-1}\,d\sigma,$$
unde S este suprafaţa plană $x+y+z=a$ decupată de planele de coordonate.

Rezolvare:

Suprafaţa este ΔABC unde $A\,(a,0,0)$, $B\,(0,a,0)$, $C\,(0,0,a)$. Proiecţia pe planul xOy (de ecuaţie $z=0$) este placa triunghiulară OAB. Ecuaţia explicită a lui (S) este $z=a-x-y$, $(x,y)\in\Delta OAB$.

Avem
$$d\sigma=\sqrt{3}dxdy$$
iar
$$I=\frac{\sqrt{3}}{a}\int_0^a\left(\int_0^{a-x}dy\right)dx=\frac{a\sqrt{3}}{2}\,.$$

7. Să se calculeze
$$\iint_S yzdydz+xzdzdx+xydxdy,$$
unde (S) este o faţă a suprafaţei plane $x+y+z=a$ decupată de planele de coordonate.

8. Să se calculeze
$$\iint_S yzdydz + xzdzdx + xydxdy,$$
unde (S) este faţa exterioară a tetraedrului limitat de $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ şi $x + y + z = a$.

9. Să se calculeze integrala de suprafaţă de specia a doua
$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dxdz + zdxdy,$$
unde (S) este faţa exterioară a emisferei superioare de rază R cu centrul în origine.

Rezolvare:

Suprafaţa (S) este dată de ecuaţiile parametrice (1). Trebuie calculaţi determinanţii funcţionali A, B, C
$$A := \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} y'_\theta & y'_\theta \\ z'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix}, \quad B := \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} z'_\theta & z'_\varphi \\ x'_\theta & x'_\varphi \end{vmatrix}, \quad C := \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\theta & y'_\varphi \end{vmatrix},$$
unde $\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\varphi. \end{cases}$

Deci
$$A = -R^2\cos\theta\sin^2\varphi\,, \quad B = -R^2\sin\theta\sin^2\varphi\,, \quad C = -R^2\sin\varphi\cos\varphi\,.$$
Integrala devine
$$I = \iint_D [(R\cos\theta\sin\varphi)^2\left(-R^2\cos\theta\sin^2\varphi\right)$$
$$+ (R\sin\theta\sin\varphi)^2\left(-R^2\sin\theta\sin^2\varphi\right) + (R\cos\varphi)\left(-R^2\sin\varphi\cos\varphi\right)]d\theta d\varphi$$
(am obţinut integrale din funcţii trigonometrice).

10. Să se calculeze
$$\iint_S \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}d\sigma,$$
unde S este porţiunea din paraboloidul hiperbolic $z = xy$ obţinută pentru $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ (suprafaţa tăiată din paraboloidul hiperbolic $z = xy$ de către paralelipipedul $[0, 1] \times [0, 1]$).

11. Să se calculeze aria sferei de rază R.

12. Să se calculeze aria elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

13. Să se calculeze aria laterală a suprafeţei cilindrice: $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z \in [0, l] \end{cases}$ (se vor folosi *coordonatele cilindrice* pentru a parametriza suprafaţa cilindrică).

14. Să se calculeze aria suprafeţei tăiată din paraboloidul hiperbolic $z = xy$ de către cilindrul circular $x^2 + y^2 = R^2$.

Rezolvare:

Avem $\mathcal{A}_S = \iint_S d\sigma$ iar elementul de suprafaţă este dat în acest caz de
$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy, \quad p = z'_x,\ q = z'_y\,,$$
cu $z = xy$, $(x, y) \in D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\right\}$, deci
$$p = y,\ q = x \quad \Rightarrow \quad d\sigma = \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy.$$

Aria este atunci dată de următoarea integrala dublă calculată de discul D :

$$\mathcal{A}_S = \iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \sqrt{1+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\ \rho d\rho\right)d\theta =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R \rho\sqrt{1+\rho^2}d\rho\right) = \frac{2\pi}{2}\int_0^R \left(1+\rho^2\right)^{1/2}\left(1+\rho^2\right)' d\rho =$$

$$= \pi\, \frac{\left(1+\rho^2\right)^{1/2+1}}{1/2+1}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R} = \frac{2\pi}{3}\left(\left(1+R^2\right)^{3/2}-1\right).$$

15. Să se găsească aria porţiunii de suprafaţă secţionată de cilindrul eliptic $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ din paraboloidul eliptic $2z=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}$.

16. Să se calculeze
$$\iint_S z d\sigma,$$
unde $S=\left\{(x,y,z) : z=\dfrac{x^2+y^2}{2}\ ,\ x^2+y^2\leq 8\right\}$.

Rezolvare:

Suprafaţa S este porţiunea din paraboloidul $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ decupată de cilindrul circular $x^2+y^2=8$ (adică situată în interiorul cilindrului). Deci ecuaţia suprafeţei este dată explicit $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ iar proiecţia pe planul xOy este chiar discul $x^2+y^2\leq 8$ (din planul $z=0$).

17. Să se calculeze
$$\iint_S z^2 d\sigma,$$
unde $S=\left\{(x,y,z) : z=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ x^2+y^2-6y\leq 0\right\}$.

Rezolvare:

Suprafaţa S este porţiunea din conul $z^2=x^2+y^2$ decupată de cilindrul circular $x^2+y^2-6y=0$ (adică situată în interiorul cilindrului). Deci ecuaţia suprafeţei este dată explicit $z=\sqrt{x^2+y^2}$ iar proiecţia pe planul xOy este chiar discul $x^2+(y-3)^2\leq 3^2$ (din planul $z=0$).

Pentru intersecţia celor două suprafeţe (conul şi cilindrul) vezi şi *Con intersectat cu un cilindru*.

18. Să se calculeze aria suprafeţei $S=\left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2\leq 4a^2\ ,\ x^2+y^2-2ay\leq 0, z\geq 0\right\}$.

Rezolvare:

Curba obţinută prin intersecţia celor două suprafeţe (sfera şi cilindrul) se numeşte **curba lui Viviani** (vezi *Viviani's curve 1* sau *Viviani's curve 2*).

19. Să se determine aria suprafeţei de rotaţie $(S) : \begin{cases} x=u\cos v, \\ y=u\sin v, \\ z=f(u), \end{cases}$ cu $(u,v)\in[u_1,u_2]\times[0,2\pi]$.

Rezolvare:

Avem $\mathcal{A}_S=\iint_S d\sigma$ iar elementul de arie al suprafeţei este dat în acest caz de

$$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}dudv.$$

Calculăm

$$\begin{aligned}
E &= (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = (\cos v)^2 + (\sin v)^2 + (f'(u))^2 = 1 + (f'(u))^2 \\
G &= (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = (-u \sin v)^2 + (u \cos v)^2 + 0 = u^2 \\
F &= x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v = -u \sin v \cos v + u \cos v \sin v + 0\ f'(u) = 0
\end{aligned}$$

Aria este atunci dată de următoarea integrala dublă calculată de dreptunghiul $D = [u_1, u_2] \times [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_S &= \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} dudv = \iint\limits_D \sqrt{u^2 \left(1 + (f'(u))^2\right)} dudv \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_{u_1}^{u_2} |u| \sqrt{1 + (f'(u))^2} du \right) dv = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} |u| \sqrt{1 + (f'(u))^2} du.
\end{aligned}$$

20. Să se calculeze integrala de suprafaţă de primul tip:

$$\iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\, d\sigma,$$

unde (S) este elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Rezolvare:

Folosim **ecuaţiile parametrice ale elipsoidului**

$$\begin{cases} x = a \cos\theta \sin\varphi, \\ y = b \sin\theta \sin\varphi, \\ z = c \cos\varphi, \end{cases}$$

unde $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Calculăm coeficienţii

$$\begin{aligned}
E &= (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = (-a \sin\theta \sin\varphi)^2 + (b \cos\theta \sin\varphi)^2 + 0^2, \\
G &= \left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2 + \left(z'_\varphi\right)^2 = (a \cos\theta \cos\varphi)^2 + (b \sin\theta \cos\varphi)^2 + (-c \sin\varphi)^2, \\
F &= x'_\theta \cdot x'_\varphi + y'_\theta \cdot y'_\varphi + z'_\theta \cdot z'_\varphi = \\
&= (-a \sin\theta \sin\varphi)(a \cos\theta \cos\varphi) + (b \cos\theta \sin\varphi)(b \sin\theta \cos\varphi) + 0(-c \sin\varphi),
\end{aligned}$$

deci

$$EG - F^2 = b^2 c^2 \sin^4\varphi \cos^2\theta + a^2 c^2 \sin^4\varphi \sin^2\theta + a^2 b^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi$$

iar

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = \\
&= abc \sqrt{\tfrac{\cos^2\theta \sin^2\varphi}{a^2} + \tfrac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \tfrac{\cos^2\varphi}{c^2}}\, \sin\varphi\, d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Pe de altă parte

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \sqrt{\frac{\cos^2\theta \sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\varphi}{c^2}}.$$

Deci integrala de suprafaţă se reduce la o integrală dublă calculată pe dreptunghiul $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$:

$$\begin{aligned}
&\iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} d\sigma = \iint_D abc \left(\frac{\cos^2\theta \sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\varphi}{c^2} \right) \sin\varphi\, d\theta d\varphi \\
&= abc \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2\theta \sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\varphi}{c^2} \right) \sin\theta\, d\theta \right) d\varphi
\end{aligned}$$

(am obţinut integrale din funcţii trigonometrice).

21. Să se găsească masa şi centrul de greutate al unei emisfere superioare dacă densitatea este $\mu(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Rezolvare:

Aplic formulele de calcul pentru masă şi pentru coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G, z_G)$:

$$m = \iint_S \mu(x,y,z)\, d\sigma,$$

respectiv

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iint_S x\mu(x,y,z)\, d\sigma, \\ y_G = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iint_S y\mu(x,y,z)\, d\sigma, \\ z_G = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iint_S z\mu(x,y,z)\, d\sigma. \end{cases}$$

Folosim ecuaţiile parametrice ale emisferei superioare (vezi şi rezolvarea Exerciţiului 1).

22. Să se determine momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate ale suprafeţei conice omogene $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$, $0 \le z \le h$.

Rezolvare:

Aplic formulele de calcul pentru momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate:

$$\begin{cases} I_{yz} = \displaystyle\iint_S x^2\mu(x,y,z)\, d\sigma, \\ I_{zx} = \displaystyle\iint_S y^2\mu(x,y,z)\, d\sigma, \\ I_{xy} = \displaystyle\iint_S z^2\mu(x,y,z)\, d\sigma. \end{cases}$$

Avem ecuaţia explicită a conului

$$z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\,, \quad 0 \le z \le h.$$

Trebuie determinată intersecţia conului cu planul $z = h$, şi apoi D, adică proiecţia suprafeţei pe planul xOy (vezi şi rezolvarea Exerciţiului 5).

Se foloseşte şi faptul că densitatea μ este constantă (deoarece suprafaţa este omogenă).

23. Să se verifice formula lui Stokes pentru funcţiile $P = x^2y^3, Q = 1, R = z$ dacă conturul (γ) este cercul $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}$ iar suprafaţa (S) este emisfera $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z \le 0 \end{cases}$

Rezolvare:

Trebuie să verificăm egalitatea

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx$$

sau echivalent

$$\int_\gamma x^2y^3dx + dy + zdz = \iint_S \left(0 - 3x^2y^2\right) dxdy + 0dydz + 0dzdx = -3\iint_S x^2y^2dxdy.$$

24. Să se calculeze $\displaystyle\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, unde S este faţa exterioară a sferei $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x,y,z \ge 0. \end{cases}$

25. Să se calculeze $\iint_S zdxdy$, unde S este faţa exterioară a elipsoidului $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ z\geq 0. \end{cases}$

Rezolvare:

Observ că $P=0, Q=0, R=z$ deci

$$\iint_S zdxdy=\iint_S \left(0\cos\alpha+0\cos\beta+z\cos\gamma\right)d\sigma=\iint_S z\cos\gamma d\sigma$$

şi deci nu trebuie să calculăm $\cos\alpha$ şi $\cos\beta$.

Facultatea de Matematică
Calcul Integral şi Aplicaţii, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 16 - 18

Capitolul VI. Integrale de suprafaţă

ANEXĂ

Teorema 1 (de reducere a integralei de suprafaţă de specia I) *Integrala de suprafaţă de specia I se notează cu* $\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma$, *unde* $d\sigma$ *este* ***elementul de arie al suprafeţei.***

(A) *Dacă suprafaţa* S *este dată prin ecuaţiile parametrice* $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$, $(u,v) \in \Delta$ *(domeniu de variaţie pentru* u *şi* v*). Atunci are loc reducerea integralei de suprafaţă:*

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

unde

$$\begin{cases} E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \\ G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2, \\ F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v. \end{cases}$$

(B) *Dacă suprafaţa* S *este dată prin ecuaţia explicită*[1] $z = z(x,y)$, *cu* $(x,y) \in D$ *unde* D *este proiecţia suprafeţei* S *pe planul* XOY. *Atunci are loc reducerea integralei de suprafaţă:*

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy,$$

unde

$$p = z'_x, \quad q = z'_y.$$

Teorema 2 (de reducere a integralei de suprafaţă de specia II) *Integrala de suprafaţă de specia II se notează cu*

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy.$$

Are loc ***reducerea integralei de suprafaţă de specia II la o integrală de suprafaţă de specia I****:*

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma,$$

unde $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *sunt cosinuşii directori ai normalei* $\vec{n}$ *la un punct curent al suprefeţei şi având în vedere faţa pe care ne situăm (adică unghiurile* α, β, γ *sunt unghiurile făcute de normala la faţa aleasă a suprafeţei* S *cu axele* Ox, Oy *respectiv* Oz*).*

[1] Într-adevăr, în acest caz avem parametrizarea $x = u,\ y = v,\ z = z(u,v)$, cu $(u,v) \in \Delta$, iar elementul de suprafaţă devine

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dudv = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy,$$

deoarece $E = 1^2 + 0^2 + (z'_u)^2 = 1 + p^2,\ G = 0^2 + 1^2 + (z'_v)^2 = 1 + q^2,\ F = z'_u \cdot z'_v = pq.$

Remarca 3 *Normala $\vec{n}$ este, de fapt, vectorul*

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) .$$

Teorema 4 *Dacă suprafaţa este dată parametric atunci avem formulele*

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} , \quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} , \quad \cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} , \tag{3}$$

unde A, B, C sunt determinanţii funcţionali definiţi de

$$\begin{aligned} A &:= \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} = y'_u z'_v - y'_v z'_u , \\ B &:= \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} = z'_u x'_v - z'_v x'_u , \\ C &:= \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u . \end{aligned}$$

Remarca 5 *Este utilă şi egalitatatea*

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

deci elementul de suprafaţă are expresia

$$d\sigma = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, dudv = \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Teorema 6 *Înlocuind acum formulele de calcul pentru cosinuşii directori obţinem* ***teorema de reducere a integralei de suprafaţă de al doilea tip:***

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \pm\iint_D [P\cdot A + Q\cdot B + R\cdot C]\, dudv, \tag{4}$$

unde semnul $\pm$ corespunde celor două feţe ale suprafeţei.

Remarca 7 *La integrala de suprafaţă de specia II contează faţa suprafeţei pe care integrăm (ceea ce va da orientarea/sensul normalei).*

Remarca 8 *Alegerea semnului se face după următorul algoritm.*

Să luăm suprafaţa S astfel încât să fie netedă, neînchisă şi cu două feţe. Fie (γ) conturul simplu care este marginea/frontiera suprafeţei S.

Atribuim curbei (γ) ***un sens de parcurgere (numit ca fiind pozitiv) după următorul algoritm****: un observator, care se deplasează pe curba (γ) astfel încât să vadă suprafaţa S în stânga lui, merge astfel încât normala la faţa aleasă îl străbate de la picioare la cap.*

Proiectăm acum S pe planul xOy, deci se proiectează şi curba frontieră (γ) pe planul xOy şi se obţine curba (γ') . ***Alegem semnul $+$ în formula (4)*** *(sau în formulele (3))* ***dacă sensul pozitiv de parcurgere a curbei*** (γ) ***sau echivalent al curbei*** (γ') ***coincide cu orientarea pozitivă a planului*** xOy.

Alegem semnul $-$ în formula (4) (sau în formulele (3)) dacă sensul pozitiv de parcurgere a curbei (γ) sau echivalent al curbei (γ') nu coincide cu orientarea pozitivă a planului xOy.

De exemplu, dacă avem faţa exterioară a emisferei superioare $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \geq 0$, atunci curba (γ) este cercul ecuatorial $x^2+y^2 = R^2$, $z = 0$ iar curba (γ') coincide cu (γ) . Se observă că sensul pozitiv de parcurgere al curbei (γ) sau (γ') coincide cu orientarea pozitivă a planului xOy.

De exemplu, dacă avem faţa interioară a emisferei superioare $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \geq 0$, atunci curba (γ) este cercul ecuatorial $x^2+y^2 = R^2$, $z = 0$ iar curba (γ') coincide cu (γ) . Se observă că sensul pozitiv de parcurgere al curbei (γ) sau (γ') nu coincide cu orientarea pozitivă a planului xOy.

De exemplu, dacă avem faţa interioară a vârfului de paraboloid $x^2+y^2 = z$, $z \in [0,1]$, atunci curba (γ) este cercul $x^2+y^2 = 1$, $z = 1$ iar curba (γ') este cercul $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$. Se observă că sensul pozitiv de parcurgere al curbei (γ) sau (γ') coincide cu orientarea pozitivă a planului xOy.

De exemplu, dacă avem faţa exterioară a vârfului de paraboloid $x^2+y^2 = z$, $z \in [0,1]$, atunci curba (γ) este cercul $x^2+y^2 = 1$, $z = 1$ iar curba (γ') este cercul $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$. Se observă că sensul pozitiv de parcurgere al curbei (γ) sau (γ') nu coincide cu orientarea pozitivă a planului xOy.

Teorema 9 (Formula lui Stokes) *Fie S o suprafaţă netedă mărginită de curba γ. Vom lua faţa suprafeţei S astfel încât un observator situat pe acea faţă să vadă conturul γ parcurs în sens direct.*

Fie funcţiile $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ cu derivatele parţiale continue. Atunci are loc

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Teorema 10 *Aria unei suprafeţe S este dată de*

$$\mathcal{A}_S = \iint_S d\sigma.$$

Deci

$$\mathcal{A}_S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

dacă suprafaţa este dată parametric,

şi

$$\mathcal{A}_S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy,$$

dacă suprafaţa este dată explicit.

Teorema 11 (Expresia volumului unui corp printr-o integrală de suprafaţă) *Dacă (S) este o suprafaţă închisă care delimitează un corp de volum $\mathcal{V}$, atunci*

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

Teorema 12 (Masa şi centrul de greutate ale unei suprafeţe)

$$m = \iint_S \mu(x,y,z)\, d\sigma$$

şi

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iint_S x\, \mu(x,y,z)\, d\sigma\,, \\ y_G = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iint_S y\, \mu(x,y,z)\, d\sigma\,, \\ z_G = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iint_S z\, \mu(x,y,z)\, d\sigma\,. \end{cases}$$

unde μ este densitatea de masă.

Teorema 13 (Momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate)

$$\begin{cases} I_{yz} = \displaystyle\iint_S x^2 \mu(x,y,z)\, d\sigma, \\ I_{zx} = \displaystyle\iint_S y^2 \mu(x,y,z)\, d\sigma, \\ I_{xy} = \displaystyle\iint_S z^2 \mu(x,y,z)\, d\sigma. \end{cases}$$

Teorema 14 (Momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate)

$$\begin{cases} I_x = \displaystyle\iint_S \left(y^2 + z^2\right) \mu(x,y,z)\, d\sigma, \\ I_y = \displaystyle\iint_S \left(x^2 + z^2\right) \mu(x,y,z)\, d\sigma, \\ I_z = \displaystyle\iint_S \left(x^2 + y^2\right) \mu(x,y,z)\, d\sigma. \end{cases}$$