Facultatea de Matematică
Calcul Integral şi Aplicaţii, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 19 - 21

Capitolul VII. Elemente de teoria câmpului

Definiţia 1 Spunem că funcţia $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, unde D este o submulţime deschisă, este **de clasă** C^q pe D (unde $q \in \mathbb{N}^*$), dacă φ este derivabilă parţial de ordin q pe D (în raport cu toate variabilele) iar derivatele parţiale de ordin q sunt toate continue pe D.

Notaţia $C^q(D)$ desemnează mulţimea funcţiilor de clasă C^q pe D.

Definiţia 2 Spunem că funcţia $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, unde D este o submulţime deschisă, este de clasă C^0 pe D, dacă φ este continuă D. Notaţia $C^0(D)$ desemnează mulţimea funcţiilor continue pe D.

Definiţia 3 Fie $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1 pe D. **Gradientul lui** φ **în punctul** a este vectorul din $\mathbb{R}^n$ notat cu $\mathrm{grad}\varphi(a)$ sau cu $\nabla\varphi(a)$ şi este definit de:

$$\mathrm{grad}\varphi(a) = \nabla\varphi(a) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(a) \cdot \vec{e}_i\,.$$

Remarca 4 Deci operatorul gradient duce $C^1(D)$ în $\left(C^0(D)\right)^n$.

Remarca 5 În cazul $n = 3$,

$$\mathrm{grad}\varphi(a) = \nabla\varphi(a) := \frac{\partial\varphi}{\partial x}(a)\cdot\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a)\cdot\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(a)\cdot\vec{k}.$$

Definiţia 6 Se numeşte gradientul câmpului scalar φ într-un punct a vectorul care caracterizează (ca valoare numerică şi ca direcţie) viteza maximă de creştere a mărimii φ.

Remarca 7 **Direcţia gradientului coincide cu direcţia normalei la suprafaţa de nivel** $\varphi(x,y,z) = C$ care trece prin punctul respectiv.

Exemplul 8 Fie $\varphi(x,y,z) = x^2yz + xyz^3$ o funcţie scalară şi $a = (1,-1,2)$. Atunci

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) &= \left(x^2yz + xyz^3\right)'_x = \left(x^2yz\right)'_x + \left(xyz^3\right)'_x = yz\left(x^2\right)'_x + yz^3(x)'_x \\
&= 2xyz + yz^3 \\
\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z) &= \left(x^2yz + xyz^3\right)'_y = \left(x^2yz\right)'_y + \left(xyz^3\right)'_y = x^2z(y)'_y + xz^3(y)'_y \\
&= x^2z + xz^3 \\
\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) &= \left(x^2yz + xyz^3\right)'_z = \left(x^2yz\right)'_z + \left(xyz^3\right)'_z = x^2y(z)'_z + xy\left(z^3\right)'_z \\
&= x^2y + 3xyz^2
\end{aligned}$$

şi gradientul este vectorul

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\varphi(x,y,z) &= \left(2xyz + yz^3\right)\vec{i} + \left(x^2z + xz^3\right)\vec{j} + \left(x^2y + 3xyz^2\right)\vec{k} \\
&= \left(2xyz + yz^3, x^2z + xz^3, x^2y + 3xyz^2\right) \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

În particular

$$\mathrm{grad}\varphi(1,-1,2) = -12\vec{i} + 10\vec{j} - 13\vec{k}.$$

Exemplul 9 Fie $\varphi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ şi $a=(3,4)$. Atunci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

şi deci

$$\text{grad}\varphi(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{j}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}\right),$$

sau, notând $\vec{r}=(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\text{grad}\varphi(\vec{r})=\text{grad}\varphi(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)=\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\,.$$

În particular

$$\text{grad}\varphi(3,4)=\frac{1}{5}(3,4)\,.$$

Definiţia 10 Fie $\vec{f}:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ un câmp vectorial astfel încât componentele f_i sunt de clasă C^1 pe D, cu $i=\overline{1,n}$ (vom scrie $f\in\left(C^1(D)\right)^n$). **Divergenţa câmpului $\vec{f}$ în punctul** a este scalarul notat cu $\operatorname{div}\vec{f}(a)$ şi este definit de:

$$\operatorname{div}\vec{f}(a):=\sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a)\;.$$

Remarca 11 Deci operatorul divergenţă duce $\left(C^1(D)\right)^n$ în $C^0(D)$.

Definiţia 12 Fie $\vec{f}:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un câmp vectorial astfel încât $\vec{f}\in\left(C^1(D)\right)^3$. **Rotorul câmpului $\vec{f}$** este vectorul din $\mathbb{R}^3$ notat cu $\operatorname{rot}\vec{f}$ şi definit de:

$$\operatorname{rot}\vec{f}:=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\cdot\vec{k}.$$

Remarca 13 Deci operatorul rotor duce $\left(C^1(D)\right)^3$ în $\left(C^0(D)\right)^3$.

Remarca 14 Dacă $\vec{f}$ este un câmp vectorial, atunci divergenţa este produsul scalar dintre vectorii

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\quad\text{şi}\quad\vec{f}=(P,Q,R)\;,$$

i.e.

$$\operatorname{div}\vec{f}=\left\langle\nabla,\vec{f}\right\rangle=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\,.$$

Remarca 15 Dacă $\vec{f}$ este un câmp vectorial cu $n=3$, atunci rotorul este produsul vectorial dintre vectorii

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\quad\text{şi}\quad\vec{f}=(P,Q,R)\;,$$

i.e.

$$\operatorname{rot}\vec{f}=\nabla\times\vec{f}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\;.$$

Definiţia 16 Se poate defini operatorul rot şi în cazul $n=2$. Fie $\vec{f}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ astfel încât $\vec{f}\in\left(C^1(D)\right)^2$. **Rotorul câmpului $\vec{f}$** este vectorul din $\mathbb{R}^2$ notat cu $\operatorname{rot}\vec{f}$ şi definit de:

$$\operatorname{rot}\vec{f}:=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\vec{i}\,.$$

Folosind definiţiile se pot arăta următoarele două propoziţii ce sintetizează proprietăţi ale celor trei operatori prezentaţi mai sus.

Propoziţia 17 *Fie $\vec{f}, \vec{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ două câmpuri vectoriale astfel încât $\vec{f}, \vec{g} \in \left(C^1(D)\right)^n$ şi $\varphi, \psi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ două funcţii scalare astfel încât $\varphi, \psi \in C^1(D)$.*

Atunci au loc:

$$
\begin{aligned}
(i) &\quad \operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi \operatorname{grad}(\varphi) + \varphi \operatorname{grad}(\psi)\ , \\
(ii) &\quad \operatorname{grad}\big(\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle\big) = \vec{g}\left(J_{\vec{f}}\right)^T + \vec{f}\left(J_{\vec{g}}\right)^T , \\
(iii) &\quad \operatorname{div}\big(\varphi \vec{f}\big) = \left\langle \operatorname{grad}(\varphi), \vec{f} \right\rangle + \varphi \operatorname{div} \vec{f}, \\
(iv) &\quad \operatorname{div}\left(\vec{f} \times \vec{g}\right) = \left\langle \vec{g}, \operatorname{rot} \vec{f} \right\rangle - \left\langle \vec{f}, \operatorname{rot} \vec{g} \right\rangle, \\
(v) &\quad \operatorname{rot}\left(\varphi \vec{f}\right) = \operatorname{grad}(\varphi) \times \vec{f} + \varphi \operatorname{rot}(\vec{f}\,), \\
(vi) &\quad \operatorname{rot}\left(\vec{f} \times \vec{g}\right) = \vec{f} \operatorname{div} \vec{g} - \vec{g} \operatorname{div} \vec{f} + \vec{g}\left(J_{\vec{f}}\right)^T - \vec{f}\left(J_{\vec{g}}\right)^T ,
\end{aligned}
$$

unde $J_{\vec{f}}$, $J_{\vec{g}}$ sunt matricele Jacobiene asociate celor două câmpuri (iar ultimele trei egalităţi au loc doar cazul $n = 3$, când are sens noţiunea de rotor).

Două relaţii de mai sus se pote scrie şi sub forma următoare.

Corolarul 18 *Fie $\vec{f}, \vec{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ două câmpuri vectoriale astfel încât $\vec{f}, \vec{g} \in \left(C^1(D)\right)^n$. Atunci au loc*

$$
\begin{aligned}
(ii)' &\quad \operatorname{grad}\big(\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle\big) = \langle \vec{g}, \nabla \rangle(\vec{f}\,) + \langle \vec{f}, \nabla \rangle(\vec{g}\,), \\
(vi)' &\quad \operatorname{rot}\left(\vec{f} \times \vec{g}\right) = \vec{f} \operatorname{div} \vec{g} - \vec{g} \operatorname{div} \vec{f} + \langle \vec{g}, \nabla \rangle(\vec{f}\,) - \langle \vec{f}, \nabla \rangle(\vec{g}\,),
\end{aligned}
$$

unde vectorul $\langle \vec{f}, \nabla \rangle(\vec{g}\,)$ este dat de

$$\langle \vec{f}, \nabla \rangle(\vec{g}\,) \stackrel{def}{=\!=} \Big(\langle \vec{f}, \nabla \vec{g}_1 \rangle, \langle \vec{f}, \nabla \vec{g}_2 \rangle, \langle \vec{f}, \nabla \vec{g}_3 \rangle\Big), \tag{1}$$

adică

$$\langle \vec{f}, \nabla \rangle(\vec{g}) \stackrel{def}{=\!=} \vec{f}\left(J_{\vec{g}}\right)^T .$$

Propoziţia 19 *Fie deschisul $D \subset \mathbb{R}^3$, $\varphi : D \to \mathbb{R}$ un câmp scalar astfel încât $\varphi \in C^2(D)$ şi $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial astfel încât $\vec{f} \in \left(C^2(D)\right)^3$.*

Atunci au loc:

$$
\begin{aligned}
(i) &\quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \nabla \times (\nabla\varphi) = \vec{0}\,, \quad \textit{pe } D \\
(ii) &\quad \operatorname{div}\big(\operatorname{rot} \vec{f}\,\big) = \big\langle \nabla, \big(\nabla \times \vec{f}\,\big) \big\rangle = 0\,, \quad \textit{pe } D.
\end{aligned}
$$

Definiţia 20 Fie deschisul $D \subset \mathbb{R}^3$ şi $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial diferenţiabil pe D. Câmpul vectorial $\vec{f}$ se numeşte **câmp irotaţional** dacă

$$\operatorname{rot} \vec{f} = 0\,, \quad \text{pe } D.$$

Definiţia 21 Fie deschisul $D \subset \mathbb{R}^3$ şi $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial. Câmpul vectorial $\vec{f}$ se numeşte **câmp de tip rotor** dacă există un câmp vectorial $\vec{\phi} : D \to \mathbb{R}^3$ astfel încât

$$\vec{f} = \operatorname{rot} \vec{\phi}\,, \quad \text{pe } D.$$

Funcţia $\vec{\phi}$ se va numi **potenţial vectorial** pentru f.

Definiţia 22 Fie deschisul $D \subset \mathbb{R}^n$ şi $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ un câmp vectorial diferenţiabil pe D. Câmpul vectorial $\vec{f}$ se numeşte **câmp solenoidal** dacă

$$\operatorname{div}\big(\vec{f}\,\big) = 0\,, \quad \text{pe } D.$$

Definiţia 23 Fie deschisul $D \subset \mathbb{R}^n$ şi $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ un câmp vectorial. Câmpul vectorial f se numeşte **câmp conservativ** dacă există un câmp scalar $\varphi : D \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$\vec{f} = \text{grad}\varphi\,, \quad \text{pe } D.$$

Funcţia φ se va numi **potenţial scalar** pentru f.

Remarca 24 În definiţiile de mai sus Propoziţia 19 devine:

(i) dacă câmpul vectorial $\vec{f} \in \left(C^1(D)\right)^3$, unde $D \subset \mathbb{R}^3$ este mulţime deschisă, este câmp conservativ (deci admite un potenţial scalar), atunci câmpul vectorial este irotaţional;

(ii) dacă câmpul vectorial $\vec{f} \in \left(C^1(D)\right)^3$, unde $D \subset \mathbb{R}^3$ este mulţime deschisă, este de tip rotor (deci admite un potenţial vectorial), atunci câmpul vectorial este solenoidal.

Folosind consideraţiile teoretice de la capitolul "Integrale curbilinii" legate de forme diferenţiale totale exacte şi de existenţa primitivelor, observăm că are loc şi reciproca afirmaţiei (i) din cadrul Remarcii 24. Prin urmare, obţinem:

Propoziţia 25 *Fie $D \subset R^3$ un domeniu simplu conex şi deschis şi $\vec{f} \in \left(C^1(D)\right)^3$ un câmpul vectorial. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *$\vec{f}$ este câmp conservativ;*

(ii) *$\vec{f}$ este câmp irotaţional.*

Se poate arăta că are loc şi reciproca afirmaţiei (ii) din cadrul Remarcii 24. Prin urmare, obţinem:

Propoziţia 26 *Fie $D \subset R^3$ o mulţime deschisă şi $\vec{f} \in \left(C^1(D)\right)^3$ un câmpul vectorial. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *$\vec{f}$ este de tip rotor;*

(ii) *$\vec{f}$ este câmp solenoidal.*

Definiţia 27 Fie deschisul $D \subset \mathbb{R}^n$ şi $\varphi : D \to \mathbb{R}$ o funcţie scalară astfel încât $\varphi \in C^2(D)$. Atunci operatorul

$$\text{div}\,(\text{grad}\varphi) = \langle \nabla, \nabla\varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$$

se numeşte **operatorul lui Laplace** sau **Laplacianul** şi se notează şi cu Δ.

Prin urmare

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\,.$$

Remarca 28 Deci operatorul lui Laplace duce $C^2(D)$ în $C^0(D)$.

Definiţia 29 Fie deschisul $D \subset \mathbb{R}^n$ şi $\varphi : D \to \mathbb{R}$ o funcţie scalară astfel încât $\varphi \in C^2(D)$. Funcţia φ se numeşte **armonică** pe D dacă

$$\Delta\varphi = 0\,, \text{ pe } D.$$

Cei patru operatori introduşi mai sus sunt legaţi de următoarea relaţie.

Propoziţia 30 *Fie deschisul $D \subset \mathbb{R}^3$ şi $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial astfel încât $\vec{f} \in \left(C^2(D)\right)^3$. Atunci are loc:*

$$\Delta\vec{f} - \text{grad}\big(\text{div}\vec{f}\big) + \text{rot}\left(\text{rot}\,\vec{f}\right) = 0, \quad \textit{pe } D,$$

unde Laplacianul câmpului vectorial $\vec{f}$ este vectorul $\Delta\vec{f} := (\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3) \in \mathbb{R}^3$.

Definiţia 31 Fie câmpul scalar $\varphi : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ şi vectorul $\vec{\ell}$. **Derivata lui** φ **după direcţia** $\vec{\ell}$ este notată cu $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{\ell}}$ şi este dată de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\ell}} := \langle \nabla \varphi, \vec{\ell} \rangle.$$

Remarca 32 (Interpretarea fizică a integralei de suprafaţă) Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ şi S o suprafaţă pe care alegem o faţă a ei. Fie vectorul $\vec{n}$ normala la suprafaţa S într-un punct al ei, pe faţa aleasă, cu cosinuşii directori $\cos \alpha, \cos \beta$ şi respectiv $\cos \gamma$, i.e.

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Atunci integrala de suprafaţă de specia a doua

$$\iint_S P dydz + Q dxdz + R dxdy$$

sau reducerea ei la integrala de suprafaţă de specia întâi[1]

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)\, d\sigma$$

reprezintă **fluxul câmpului vectorial** $\vec{f}$ **prin suprafaţa** S **în direcţia normalei** $\vec{n}$ la faţa aleasă.

Remarca 33 *Dacă* $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *este un câmp vectorial dat de*

$$\vec{f} = (P, Q, R),$$

atunci, folosind egalitatea

$$\langle \vec{f}, \vec{n} \rangle = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma,$$

obţinem că $\iint_S \langle \vec{f}, \vec{n} \rangle d\sigma$ *este, de fapt, fluxul câmpului vectorial* $\vec{f}$ *prin suprafaţa* S *în direcţia normalei* $\vec{n}$ *la faţa aleasă.*

Astfel formula lui Gauss-Ostrogradski devine:

Teorema 34 (Formula lui Gauss-Ostrogradski) *Fie corpul* V *mărginit de suprafaţa* S *(adică* $S = \mathrm{Fr}(V)$ *) la care alegem faţa exterioară. Are loc următoarea formulă de legătură dintre intregrala triplă şi integrala de suprafaţă de specia a doua:*

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Deci, echivalent, putem scrie, notând $\vec{f} := (P, Q, R)$ *şi* ***elementul de volum***

$$\mathrm{dv} := dxdydz,$$

următoarea formulă:

$$\iint_S \langle \vec{f}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\, \vec{f}\, \mathrm{dv}, \tag{2}$$

adică ***fluxul câmpului vectorial*** $\vec{f}$ ***prin suprafaţa*** S ***în direcţia normalei*** $\vec{n}$ ***la faţa aleasă este egală cu integrala triplă din divergenţa câmpului*** $\vec{f}$.

[1] Are loc următoarea formulă de reducere a integralei de suprafaţă de specia II la o integrală de suprafaţă de specia I:

$$\iint_S P dydz + Q dxdz + R dxdy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)\, d\sigma,$$

unde $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ sunt cosinuşii directori ai normalei $\vec{n}$ la un punct curent al suprefeţei la faţa pe care ne situăm.

Corolarul 35 *Fie corpul V mărginit de suprafaţa S (adică $S = \mathrm{Fr}\,(V)$) la care alegem faţa exterioară. Alegând în formula lui Gauss-Ostrogradski câmpul vectorial particular*

$$\vec{f} = \mathrm{grad}\,\varphi$$

(unde φ este un câmp scalar de clasă C^1), obţinem următoarea formulă:

$$\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}\, d\sigma = \iiint_V \Delta\varphi\, \mathrm{dv}\,,$$

unde $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \overset{def}{=\!=} \langle \nabla\varphi, \vec{n}\,\rangle$ *este derivata lui φ după direcţia $\vec{n}$.*

Corolarul 36 (Formula Gradientului) *Fie corpul V mărginit de suprafaţa S (adică $S = \mathrm{Fr}\,(V)$) la care alegem faţa exterioară. Alegând în formula lui Gauss-Ostrogradski câmpul vectorial particular*

$$\vec{f} = \varphi\,\vec{c}$$

(unde φ este un câmp scalar de clasă C^1 iar $\vec{c}$ este un câmp vectorial constant), obţinem următoarea formulă:

$$\iint_S \varphi\,\vec{n}\, d\sigma = \iiint_V \mathrm{grad}\,\varphi\, \mathrm{dv}.$$

Demonstraţie. Aplicăm formula (2) în cazul $\vec{f} = \varphi\,\vec{c}$. Folosim formula (iii) din Propoziţia 17

$$\mathrm{div}\,(\varphi\,\vec{c}) = \langle \mathrm{grad}\,(\varphi)\,, \vec{c}\,\rangle + \varphi\,\mathrm{div}\,\vec{c}$$

şi obţinem, pentru orice câmp vectorial $\vec{c}$, următoarea formulă:

$$\iint_S \langle \varphi\,\vec{c}, \vec{n}\,\rangle d\sigma = \iiint_V \langle \mathrm{grad}\,(\varphi)\,, \vec{c}\,\rangle\,\mathrm{dv} + \iiint_V \varphi\,\mathrm{div}\,\vec{c}\,\mathrm{dv}$$

sau echivalent

$$\iint_S \langle \varphi\,\vec{c}, \vec{n}\,\rangle d\sigma = \iiint_V \langle \nabla\varphi, \vec{c}\,\rangle\,\mathrm{dv} + \iiint_V \varphi\,\nabla\cdot\vec{c}\,\mathrm{dv}, \quad \text{pentru orice } \vec{c}.$$

În cazul particular al unui câmp vectorial constant arbitrar $\vec{c}$ obţinem

$$\begin{aligned}
&\iint_S \langle \vec{f}, \vec{n}\,\rangle d\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{f}\,\mathrm{dv} \\
\Leftrightarrow \quad &\iint_S \langle \varphi\,\vec{c}, \vec{n}\,\rangle d\sigma = \iiint_V \langle \mathrm{grad}\,(\varphi)\,, \vec{c}\,\rangle\,\mathrm{dv} \\
\Leftrightarrow \quad &\Big\langle \vec{c}, \iint_S \varphi\vec{n}\,d\sigma\Big\rangle = \Big\langle \vec{c}, \iiint_V \mathrm{grad}\,(\varphi)\;\mathrm{dv}\Big\rangle, \quad \text{pentru orice } \vec{c} \\
\Leftrightarrow \quad &\iint_S \varphi\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint_V \mathrm{grad}\varphi\,\mathrm{dv}\,,
\end{aligned}$$

adică **Formula Gradientului.** ■

Corolarul 37 (Formula Rotorului) *Fie corpul V mărginit de suprafaţa S (adică $S = \mathrm{Fr}\,(V)$) la care alegem faţa exterioară. Alegând în formula lui Gauss-Ostrogradski câmpul vectorial particular*

$$\vec{f} = \vec{v} \times \vec{c}$$

(unde $\vec{v}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 iar $\vec{c}$ este un câmp vectorial constant), obţinem următoarea formulă:

$$\iint_S \vec{n} \times \vec{v}\, d\sigma = \iiint_V \mathrm{rot}\,\vec{v}\,\mathrm{dv}.$$

Demonstraţie. Aplicăm formula (2) în cazul $\vec{f} = \vec{v} \times \vec{c}$. Folosim formula (iv) din Propoziţia 17

$$\operatorname{div}\left(\vec{v} \times \vec{c}\right) = \left\langle \vec{c}, \operatorname{rot} \vec{v} \right\rangle - \left\langle \vec{v}, \operatorname{rot} \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{c}, \operatorname{rot} \vec{v} \right\rangle$$

şi obţinem[2], pentru orice câmp vectorial constant $\vec{c}$,

$$\begin{aligned}
& \iint_S \langle \vec{f}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{f} \, \mathrm{dv} \\
\Leftrightarrow \quad & \iint_S \langle \vec{v} \times \vec{c}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_S \langle \vec{n}, \vec{v} \times \vec{c} \rangle d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{v} \times \vec{c}\right) \mathrm{dv} = \iiint_V \left\langle \vec{c}, \operatorname{rot} \vec{v} \right\rangle \mathrm{dv} \\
\Leftrightarrow \quad & \iint_S \langle \vec{c}, \vec{n} \times \vec{v} \rangle d\sigma = \iiint_V \left\langle \vec{c}, \operatorname{rot} \vec{v} \right\rangle \mathrm{dv} \\
\Leftrightarrow \quad & \left\langle \vec{c}, \iint_S \vec{n} \times \vec{v} \, d\sigma \right\rangle = \left\langle \vec{c}, \iiint_V \operatorname{rot} \vec{v} \, \mathrm{dv} \right\rangle, \quad \text{pentru orice } \vec{c} \\
\Leftrightarrow \quad & \iint_S \vec{n} \times \vec{v} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{rot} \vec{v} \, \mathrm{dv},
\end{aligned}$$

adică **Formula Rotorului**. ■

Remarca 38 (Interpretarea fizică a integralei curbilinii) Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ şi (γ) o curbă în spaţiu. Atunci integrala curbilinie de specia a doua

$$\int_\gamma P dx + Q dy + R dz$$

reprezintă **integrala curbilinie a câmpului vectorial $\vec{f}$ de-a lungul curbei** (γ).

Remarca 39 *Dacă $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este un câmp vectorial dat de*

$$\vec{f} = (P, Q, R),$$

atunci, folosind notaţia

$$d\vec{r} := (dx, dy, dz),$$

obţinem egalitatea

$$\left\langle \vec{f}, d\vec{r} \right\rangle = P dx + Q dy + R dz.$$

Deci $\displaystyle\int_\gamma \left\langle \vec{f}, d\vec{r} \right\rangle$ *este, de fapt, integrala curbilinie a câmpului vectorial $\vec{f}$ de-a lungul curbei (γ).*

Remarca 40 *Dacă (γ) este o curbă închisă, atunci integrala curbilinie de specia a doua*

$$\int_\gamma P dx + Q dy + R dz = \int_\gamma \left\langle \vec{f}, d\vec{r} \right\rangle$$

reprezintă ***circulaţia câmpului vectorial $\vec{f}$ de-a lungul curbei*** (γ).

Astfel formula lui Stokes devine:

[2]Trebuie să folosim şi proprietatea produsului mixt

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$$

de a nu se modifică la schimbări circulare ale argumentelor, i.e.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}).$$

Teorema 41 (Formula lui Stokes) *Fie S o suprafaţă netedă mărginită de curba γ. Vom lua faţa suprafeţei S astfel încât un observator situat pe acea faţă să vadă conturul γ parcurs în sens direct. Fie funcţiile P, Q, R cu derivatele parţiale continue. Atunci are loc*

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Deci, echivalent, putem scrie, notând $\vec{f} := (P, Q, R)$,

$$\int_\gamma \langle \vec{f}, d\vec{r} \rangle = \iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{f}, \vec{n} \rangle d\sigma,$$

*adică **circulaţia câmpului vectorial $\vec{f}$ de-a lungul curbei (γ) este egală cu fluxul rotorului câmpului vectorial $\vec{f}$ prin suprafaţa S în direcţia normalei $\vec{n}$ la faţa aleasă, şi care este mărginită de curba (γ).***

Folosind Propoziţia 25 obţinem următorul rezultat.

Propoziţia 42 *Fie $D \subset R^3$ un domeniu simplu conex şi deschis şi $\vec{f} \in \left(C^1(D)\right)^3$ un câmpul vectorial. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *$\vec{f}$ este câmp conservativ;*

(ii) *$\vec{f}$ este câmp irotaţional;*

(iii) *circulaţia câmpului $\vec{f}$ de-a lungul curbei închise (γ) este nulă;*

(iv) *integrala curbilinie a câmpului $\vec{f}$ de-a lungul curbei (γ) ce uneşte două puncte oarecare ale câmpului nu depinde de forma curbei.*

Corolarul 43 *Fie o suprafaţă netedă S mărginită de curba γ (adică $\gamma = \operatorname{Fr}(S)$). Alegând în formula lui Stokes câmpul vectorial particular*

$$\vec{f} = \varphi \vec{c}$$

(unde φ este un câmp scalar de clasă C^1 iar $\vec{c}$ este un câmp vectorial constant), obţinem următoarea formulă:

$$\int_\gamma \varphi\, d\vec{r} = \iint_S \vec{n} \times \operatorname{grad} \varphi\, d\sigma.$$

Demonstraţie. Se foloseşte şi formula (v) din Propoziţia 17 şi se fac calcule similare celor din Corolarul 37 (privind produsul mixt). ∎

Corolarul 44 *Fie o suprafaţă netedă S mărginită de curba γ (adică $\gamma = \operatorname{Fr}(S)$). Alegând în formula lui Stokes câmpul vectorial particular*

$$\vec{f} = \vec{v} \times \vec{c}$$

(unde $\vec{v}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 iar $\vec{c}$ este un câmp vectorial constant), obţinem următoarea formulă:

$$\int_\gamma \vec{v} \times d\vec{r} = \iint_S \left((\operatorname{div} \vec{v})\, \vec{n} - \vec{n}\, (J_{\vec{v}})^T \right) d\sigma,$$

unde $J_{\vec{v}}$ este matricea Jacobiană asociată câmpului $\vec{v}$

sau echivalent

$$\int_\gamma \vec{v} \times d\vec{r} = \iint_S \left((\operatorname{div} \vec{v})\, \vec{n} - \langle \vec{n}, \nabla \rangle (\vec{v}) \right) d\sigma,$$

unde vectorul $\langle \vec{n}, \nabla \rangle (\vec{v})$ este dat de

$$\langle \vec{n}, \nabla \rangle (\vec{v}) \overset{def}{=\!=} \left(\langle \vec{n}, \nabla \vec{v}_1 \rangle, \langle \vec{n}, \nabla \vec{v}_2 \rangle, \langle \vec{n}, \nabla \vec{v}_3 \rangle \right) = \vec{n}\, (J_{\vec{v}})^T.$$

Demonstraţie. Se foloseşte şi formula (vi) din Propoziţia 17 şi se fac calcule similare celor din Corolarul 37 (privind produsul mixt). ∎