Facultatea de Matematică
Calcul Integral şi Aplicaţii, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 7 – 9

Capitolul III. Integrale curbilinii

1. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{(\gamma)} y ds\,,$$

unde (γ) este segmentul parabolei $y^2 = 2px$ de la originea coordonatelor până la $A(a,b)$, $a, b > 0$.

Rezolvare:

Parametrizarea curbei date este $(\gamma) : \begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{2pt}\,, \quad t \in [0,a]\,. \end{cases}$

Se foloseşte formula elementului de arc

$$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Conform **teoremei de reducere**, integrala curbilinie de primul tip se reduce la integrala Riemann:

$$I = \int_0^a \sqrt{2pt}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}(2pt)^{-1/2}\ 2p\right)^2}\,dt = \int_0^a \sqrt{2pt + p^2}\,dt = \frac{1}{2p}\int_0^a \sqrt{2pt + p^2}\ \left(2pt + p^2\right)'\ dt\,.$$

2. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{(\gamma)} xy ds\,,$$

unde (γ) este sfertul din primul cadran al elipsei dată parametric $\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta. \end{cases}$

Rezolvare:

Se foloseşte formula elementului de arc

$$ds = \sqrt{\left(x'(\theta)\right)^2 + \left(y'(\theta)\right)^2}\,d\theta.$$

Integrala curbilinie de primul tip se reduce la integrala Riemann:

$$I = ab\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta\,.$$

Sunt două cazuri: $a = b$ şi $a \neq b$.
În cazul $a = b$ se foloseşte formula

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta.$$

În cazul $a \neq b$, se poate folosi substituţia

$$\mathrm{tg}\,(\theta) = t$$

şi sunt utile formulele trigonometrice

$$\sin\theta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{şi} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \,.$$

Sau se observă că

$$I = \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\theta + b^2}\ \left(\sin^2\theta\right)'\,d\theta\,,$$

deci merge substituţia $\sin^2\theta = t$.

3. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{(\gamma)} xyz\,ds\,,$$

unde (γ) este curba din spaţiu $\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{1}{3}\sqrt{8t^3}, \\ z = \dfrac{1}{2}\,t^2, \quad t\in[0,1]\,. \end{cases}$

Rezolvare:

Se foloseşte formula elementului de arc

$$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt$$

şi se obţine

$$ds = (t+1)\,dt.$$

4. Să se calculeze următoarea integrală curbilinie de primul tip

$$\int_{(\gamma)} ye^{-x}ds$$

unde $(\gamma): x = \ln\left(1+t^2\right),\ y = 2\operatorname{arctg} t - t + 3,\ t\in[0,1]$.

Rezolvare:

Se obţine

$$ds = dt.$$

5. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{(\gamma)} xyds\,,$$

unde (γ) este sfertul din primul cadran al elipsei dată explicit $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Rezolvare:

Parametrizarea curbei date este $(\gamma): \begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,, \quad t\in[0,a]\,. \end{cases}$

Sunt două cazuri: $a=b$ şi $a\neq b$.

Integrala curbilinie de primul tip se reduce la integrala Riemann:

$$I = \frac{b}{a}\int_0^a t\sqrt{a^2-t^2}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\frac{1}{2\sqrt{a^2-t^2}}\,(-2t)\right)^2}\,dt = \frac{b}{a}\int_0^a t\sqrt{(b^2-a^2)\,t^2+a^4}\,dt$$
$$= \frac{b}{a}\frac{1}{2\,(b^2-a^2)}\int_0^a \sqrt{(b^2-a^2)\,t^2+a^4}\ \left[\left(b^2-a^2\right)t^2+a^4\right]'\,dt\,.$$

6. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{(\gamma)} xds\,,$$

unde $(\gamma) : y = x^2$, $x \in [0, 2]$.

Rezolvare:

Integrala curbilinie de primul tip se reduce la integrala Riemann:

$$I = \int_0^2 x\sqrt{1 + (2x)^2}\, dx.$$

Deci

$$I = \frac{1}{8}\int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\ \left(1 + 4x^2\right)'\ dx$$

sau putem vedea integrala iraţională ca pe o integrală binomă, care se rezolvă cu substituţia (este cazul al doilea)

$$1 + 4x^2 = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(t^2 - 1\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{4}\left(t^2 - 1\right)^{-1/2} \cdot (2t)\,.$$

7. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{(\gamma)} xyds\,,$$

unde $(\gamma) : y = x^2$, $x \in [-1, 1]$.

Rezolvare:

Integrala curbilinie de primul tip se reduce la integrala Riemann:

$$I = \int_{-1}^1 x \cdot x^2\sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_{-1}^1 x^3\sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Am obţinut o integrală binomă, care se rezolvă cu substituţia (este cazul al doilea)

$$1 + 4x^2 = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(t^2 - 1\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{4}\left(t^2 - 1\right)^{-1/2} \cdot (2t)\,.$$

8. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{(\gamma)} y^5ds\,,$$

unde $(\gamma) : x = \frac{y^4}{4}$, $y \in [0, 2]$.

Rezolvare:

Parametrizarea curbei date este $(\gamma) : \begin{cases} x = \frac{t^4}{4}\,, \\ y = t\,, \quad t \in [0, 2]\,. \end{cases}$

Integrala curbilinie de primul tip se reduce la integrala Riemann:

$$I = \int_0^2 t^5\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} \cdot 4t^3\right)^2}\, dt = \int_0^2 t^5\sqrt{1 + t^6}\, dt\,.$$

Deci

$$I = \frac{1}{6}\int_0^2 \sqrt{1+t^6}\,\left(1+t^6\right)'\,dt$$

sau putem vedea integrala iraţională ca pe o integrală binomă, care se rezolvă cu substituţia (este cazul al doilea)

$$1+t^6 = s^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \left(s^2-1\right)^{1/6} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{6}\left(s^2-1\right)^{-5/6}\cdot(2s)\,.$$

9. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{(\gamma)} z\left(x^2+y^2\right)ds\,,$$

unde $(\gamma):\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \\ z = t, \quad t\in[0,1]\,. \end{cases}$

Rezolvare:

Se obţine

$$I = \int_0^1 t\left(t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t\right)\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,dt = \int_0^1 t^3\sqrt{2+t^2}\,dt\,.$$

Am obţinut o integrală binomă, care se rezolvă cu substituţia (este cazul al doilea)

$$2+t^2 = s^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \left(s^2-2\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{2}\left(s^2-2\right)^{-1/2}\cdot(2s)\,.$$

10. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{(\gamma)} x^2 ds\,,$$

unde $(\gamma): x^2+y^2=2, \quad x,y\geq 0.$

Rezolvare:

Curba dată este sfertul din primul cadran al unui cerc dat parametric de $(\gamma):\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta\,, \\ y = \sqrt{2}\sin\theta\,, \quad \theta\in[0,\pi/2]\,. \end{cases}$

Se obţine

$$I = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\sqrt{2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta}\,d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \sqrt{2}\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\,.$$

11. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{(\gamma)} xy\,ds\,,$$

unde (γ) este dată de intersecţia sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$ cu cilindrul $x^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ situată în primul octant ($x,y,z\geq 0$).

Rezolvare:

Deoarece se obţine $z^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$, curba dată este un cerc în spaţiu cu ecuaţiile parametrice

$$(\gamma): \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\cos\theta\,, \\ y = \dfrac{a}{2}\sin\theta\,, \\ z = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\,, \quad \theta \in [0, \pi/2]\,. \end{cases}$$

Se obţine

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a^2}{4}\,\sin\theta\cos\theta\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2 + 0}\,d\theta = \frac{a^3}{8}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{a^3}{8}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2\theta)}{2}\,d\theta = \frac{a^3}{16}\left(-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}.$$

12. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{(\gamma)} (x + y + z)\,ds\,,$$

unde $(\gamma): \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt, \quad t \in [0, \pi/2]\,. \end{cases}$

Rezolvare:

Se obţine

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2}\,dt.$$

13. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{(\gamma)} \left(x^2 + y^2\right)\ln z\,ds\,,$$

unde $(\gamma): \begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \\ z = e^t, \quad t \in [0, 1]\,. \end{cases}$

Rezolvare:

Se obţine

$$ds = \sqrt{3}\,e^t\,dt.$$

14. Să se calculeze lungimea următoarelor curbe:

(a) Intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cu paraboloidul $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

(b) Intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cu cilindrul $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\,, \quad z \in [0, 2]\,.$

(c) Elicea circulară $\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \\ z = ht, \quad t \in [0, 2\pi]\,. \end{cases}$

(d) $x = t^5 - 1\,,\ y = t^4\,, \quad t \in [0, 1]\,.$

(e) Porţiunea din cercul $x^2 + y^2 = 4$ pentru care $y \le 0$.

(f) Pătratul cu vârfurile $A(-1,0)\,, B(0,1)\,, C(1,0)\,, D(0,-1)\,.$

Rezolvare:

Trebuie calculată integrala curbilinie care dă **lungimea unei curbe**

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{(\gamma)} ds.$$

(a) Deoarece se obţine

$$z^2 = 1 - 2z \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + 2z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}\,,$$

avem

$$x^2 + y^2 = 1 - z_{1,2}^2 = 1 - \left(-1 \pm \sqrt{2}\right)^2.$$

Nu putem alege z_2 (deoarece $x^2 + y^2 = 1 - z_2^2 = -2 - 2\sqrt{2}$), deci

$$x^2 + y^2 = 1 - z_1^2 = R^2, \quad \text{unde } R = \left[2\left(2^{1/2} - 1\right)\right]^{1/2}.$$

Curba dată este un cerc în spaţiu cu ecuaţiile parametrice $(\gamma) : \begin{cases} x = R\cos\theta\,, \\ y = R\sin\theta\,, \\ z = \sqrt{2} - 1\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,. \end{cases}$

(b) Deoarece se obţine

$$z^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad z_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(alegem doar pe $z_1 \geq 0$), avem

$$x^2 + y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\,.$$

Curba dată este un cerc în spaţiu cu ecuaţiile parametrice $(\gamma) : \begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\theta\,, \\ y = \frac{1}{2}\sin\theta\,, \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,. \end{cases}$

15. Să se determine integrala care dă lungimea elipsei $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

16. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip[1]:

$$I = \int_{(\overset{\frown}{OA})} \left(x^2 - y^2\right) dx\,,$$

unde $(\overset{\frown}{OA})$ este segmentul parabolei $y = x^2$ cuprins între $x = 0$ şi $x = 2$.

Rezolvare:

Parametrizarea curbei date este $(\overset{\frown}{OA}) : \begin{cases} x = t\,, \\ y = t^2\,, \quad t \in [0, 2]\,. \end{cases}$

Conform **teoremei de reducere**, integrala curbilinie de al doilea tip se reduce la integrala Riemann:

$$I = \int_0^2 \left(t^2 - t^4\right)\, d(t)\ .$$

[1] La integrala curbilinie de al doilea tip contează sensul de parcurgere al curbei, mai precis, are loc:

$$\int_{(\overset{\frown}{AB})} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_{(\overset{\frown}{BA})} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy..$$

17. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_{(\overset{\frown}{OA})} 2xydx + x^2dy\,,$$

unde $(\overset{\frown}{OA})$ este

(a) parabola $y^2 = x$ care uneşte $O\,(0,0)$ cu $A\,(1,1)$;

(b) dreapta $y = x$ care uneşte $O\,(0,0)$ cu $A\,(1,1)$;

(c) curba $y = x^3$ care uneşte $O\,(0,0)$ cu $A\,(1,1)$.

Rezolvare:

(a) Parametrizarea curbei date este $(\overset{\frown}{OA}) : \begin{cases} x = t\,, \\ y = \sqrt{t}\,, \quad t \in [0,1]\,. \end{cases}$

Conform **teoremei de reducere**, integrala curbilinie de al doilea tip se reduce la integrala Riemann:

$$I = \int_0^1 \left[2t\sqrt{t}\,d\,(t) + t^2\,d\left(\sqrt{t}\right)\right] = \int_0^1 \left(2t\sqrt{t} + t^2\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) dt\,.$$

18. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_{(\overset{\frown}{AB})} xydx - y^2dy\,,$$

unde $(\overset{\frown}{AB}) : \begin{cases} x = t^2\,, \\ y = t^3\,, \quad t \in [0,1]\,. \end{cases}$

19. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_{(\overset{\frown}{AB})} x^2dx + 2xydy\,,$$

unde $(\overset{\frown}{AB})$ este jumătatea superioară a unei elipse parcursă în sens trigonometric.

Rezolvare:

Parametrizarea curbei date este $(\gamma) : \begin{cases} x = a\cos\theta\,, \\ y = b\sin\theta\,, \quad \theta \in [0,\pi]\,. \end{cases}$

Integrala curbilinie de al doilea tip se reduce la integrala Riemann:

$$I = \int_0^\pi \left[(a\cos\theta)^2\ d\,(a\cos\theta) + 2a\cos\theta\cdot b\sin\theta\,d\,(b\sin\theta)\right] = \left(2ab^2 - a^3\right)\int_0^\pi \sin\theta\,\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= -\left(2ab^2 - a^3\right)\int_0^\pi \cos^2\theta\ (\cos\theta)'\ d\theta.$$

20. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_{(\overset{\frown}{AB})} \sqrt{1-x^2}dx + xdy\,,$$

unde $(\overset{\frown}{AB})$ este curba $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ parcursă în sens trigonometric.

Rezolvare:

Parametrizarea curbei date este $(\gamma):\begin{cases} x=\cos\theta\,, \\ y=2\sin\theta\,, \quad \theta\in[0,2\pi]\,. \end{cases}$

Integrala curbilinie de al doilea tip se reduce la integrala Riemann:

$$I=\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{1-\cos^2\theta}\,d(\cos\theta)+\cos\theta\,d(2\sin\theta)\right]=\int_0^{2\pi}\left[|\sin\theta|\,\sin\theta+2\cos^2\theta\right]d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta-\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta+2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta.$$

Sunt utile formulele trigonometrice

$$\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta \quad \text{şi} \quad \cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta.$$

21. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_{(\gamma)}\frac{dx}{x^3+y^3},$$

unde $(\gamma):\begin{cases} x=a\cos\theta\,, \\ y=a\sin\theta\,, \quad \theta\in[0,\pi/2]\,. \end{cases}$

Rezolvare:

Obţinem integrala Riemann:

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{d(a\cos\theta)}{(a\cos\theta)^3+(a\sin\theta)^3}=\frac{-a}{a^3}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}d\theta=\frac{-1}{a^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}d\theta.$$

Având în vedere că integrala este pară în $\sin$ şi $\cos$ se poate folosi substituţia

$$\mathrm{tg}\,(\theta)=t.$$

Sunt utile formulele trigonometrice

$$\sin\theta=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{şi} \quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

22. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_{(\gamma)}\frac{dx}{2a+y}-\frac{dy}{a+x},$$

unde (γ) este curba dată de $x^2+y^2+2ay=0$, $a>0$, cu $x+y\geq 0$, cu extremitatea iniţială în $A(a,-a)$.

Rezolvare:

Observăm că avem un cerc $x^2+(y+a)^2=a^2$ cu centrul în $C(0,-a)$ şi de rază a. Curba (γ) este arcul din cercul anterior parcurs de la $A(a,-a)$ până la originea $O(0,0)$.

Parametrizarea[2] curbei date este $(\gamma):\begin{cases} x=a\cos\theta\,, \\ y+a=a\sin\theta\,, \quad \theta\in[0,\pi/2]\,. \end{cases}$

[2] Ecuaţiile parametrice ale unui cerc

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

sunt $\begin{cases} x-a=R\cos\theta\,, \\ y-b=R\sin\theta\,, \quad \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$ sau, echivalent, $\begin{cases} x=a+R\cos\theta\,, \\ y=b+R\sin\theta\,, \quad \theta\in[0,2\pi]\,. \end{cases}$

Obţinem integrala Riemann:

$$I=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{d\left(a\cos\theta\right)}{2a+\left(a\sin\theta-a\right)}-\frac{d\left(a\sin\theta-a\right)}{a+a\cos\theta}\right]=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{-a\sin\theta}{a+a\sin\theta}-\frac{a\cos\theta}{a+a\cos\theta}\right)d\theta$$
$$=-\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)d\theta.$$

Calculăm

$$\int\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\,d\theta=\int\frac{1+\sin\theta-1}{1+\sin\theta}\,d\theta=\int d\theta-\int\frac{1}{1+\sin\theta}\,d\theta$$
$$\int\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\,d\theta=\int\frac{1+\cos\theta-1}{1+\cos\theta}\,d\theta=\int d\theta-\int\frac{1}{1+\cos\theta}\,d\theta.$$

Ambele integrale se pot rezolva folosind substituţia trigonometrică universală

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)=t.$$

Sunt utile formulele trigonometrice

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}\quad\text{şi}\quad\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

23. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_{(\gamma)}ydx-\left(x-a\right)dy\,,$$

unde $(\gamma):\dfrac{\left(x-a\right)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

Rezolvare:

Parametrizarea elipsei date este $(\gamma):\begin{cases}x-a=a\cos\theta\,,\\ y=b\sin\theta\,,\quad\theta\in[0,2\pi]\,.\end{cases}$

24. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_{(\widehat{AB})}z\sqrt{a^2-x^2}dx+xzdy+\left(x^2+y^2\right)dz\,,$$

unde $(\widehat{AB}):\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\\ z=bt,\quad t\in[0,\pi/2]\,.\end{cases}$

Rezolvare:

Obţinem integrala Riemann:

$$I=\int_0^{\pi/2}\left[bt\sqrt{a^2-\left(a\cos t\right)^2}\,d\left(a\cos t\right)+a\cos t\cdot bt\,d\left(a\sin t\right)+\left(\left(a\cos t\right)^2+\left(a\sin t\right)^2\right)d\left(bt\right)\right]$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left(-a^2b\,t\sin^2t+a^2b\,t\cos^2t+a^2b\,t\sin^2t\right)dt.$$

Sunt utile formulele trigonometrice

$$\sin\left(2\theta\right)=2\sin\theta\cos\theta\quad\text{şi}\quad\cos\left(2\theta\right)=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta.$$

Apoi se foloseşte metoda de integrare prin părţi.

25. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:
$$\int_{(\widehat{AB})} xdx + xydy + xyzdz\,,$$
unde $(\widehat{AB}) : x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = \sqrt{2}t, \quad t \in [0,1]\,.$

26. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:
$$\int_{(\widehat{AB})} \sqrt{yz}dx + \sqrt{xz}dy + \sqrt{xy}dz\,,$$
unde $(\widehat{AB}) : x = t,\ y = t^2,\ z = t^3, \quad t \in [0,1]\,.$

27. Să se calculeze următoarea integrală curbilinie constatând în prealabil că este independentă de drum:
$$\int_{(\widehat{AB})} \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}\,,$$
unde $(\widehat{AB})$ este arcul de curbă ce uneşte punctul $A\,(0,-1)$ cu $B\,(1,0)\,.$

Rezolvare:

Avem de calculat integrala
$$\int_{(\widehat{AB})} P\,(x,y)\,dx + Q\,(x,y)\,dy.$$
În cazul nostru $P\,(x,y) = \frac{-y}{(x-y)^2}$ şi $Q\,(x,y) = \frac{x}{(x-y)^2}\,.$
Se verifică mai întâi condiţiile suficiente
$$\frac{\partial P}{\partial y}\,(x,y) = \frac{-x-y}{(x-y)^3} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,(x,y)\,,\ \text{pentru orice}\ \,(x,y)$$
care asigură existenţa unei primitive[3] F a formei diferenţiale $P\,(x,y)\,dx + Q\,(x,y)\,dy$ care se integrează.
Apoi se rezolvă sistemul
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\,(x,y) = P\,(x,y)\,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\,(x,y) = Q\,(x,y)\,, \end{cases}$$
care defineşte primitiva F (integrându-se una din ecuaţii)[4].

[3]Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu **simplu conex** (domeniu conex cu proprietatea că orice curbă închisă situată în D mărgineşte un domeniu care este de asemenea în D; adică domeniul D **nu are "găuri"**). Fie două funcţii $P,Q : D \to \mathbb{R}$. Dacă avem forma diferenţială de ordinul 1
$$P\,(x,y)\,dx + Q\,(x,y)\,dy,$$
atunci aceasta este o **diferenţială totală exactă** dacă şi numai dacă are loc relaţia
$$\frac{\partial P}{\partial y}\,(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}\,(x,y)\,,\ \text{pentru orice}\ \,(x,y) \in D.$$

[4]Dacă forma diferenţială $P\,(x,y)\,dx + Q\,(x,y)\,dy$ este exactă, atunci există $F \in C^1\,(D)$ astfel încât au loc
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\,(x,y) = P\,(x,y)\,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\,(x,y) = Q\,(x,y)\,, \end{cases}$$
pentru orice $(x,y) \in D$.

Obţinem, dacă luăm, de exemplu, prima ecuaţie,

$$F(x,y)=\int P(x,y)\,dx=\int \frac{-y}{(x-y)^2}\,dx=-y\,\frac{(x-y)^{-2+1}}{-2+1}+C(y)\,.$$

Folosim a doua ecuaţie şi obţinem

$$\left(\frac{y}{x-y}+C(y)\right)'_y=\frac{x}{(x-y)^2}\quad\Leftrightarrow\quad C'(y)=0\quad\Leftrightarrow\quad C(y)=C,$$

deci

$$F(x,y)=\frac{y}{x-y}+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Se aplică formula lui Leibniz-Newton şi obţine valoarea integralei

$$I=\int_{(\widehat{AB})}dF(x,y)=F(x,y)\,\Big|_{(x,y)=A}^{(x,y)=B}=F(B)-F(A)=F(1,0)-F(0,-1)\,.$$

28. Să se calculeze următoarea integrală curbilinie constatând în prealabil că este independentă de drum:

$$\int_{(\widehat{AB})}\frac{ydx-xdy}{y^2}\,,$$

unde $(\widehat{AB})$ este arcul de curbă ce uneşte punctul $A(1,2)$ cu $B(2,1)\,.$

Rezolvare:

Avem de calculat integrala

$$\int_{(\widehat{AB})}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy.$$

În cazul nostru $P(x,y)=\frac{1}{y}$ şi $Q(x,y)=\frac{-x}{y^2}\,.$

Se verifică mai întâi condiţiile suficiente

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{-1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,,\ \text{pentru orice }\ (x,y)\,,$$

care asigură existenţa unei primitive F a formei diferenţiale $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ care se integrează.

Apoi se rezolvă sistemul care defineşte primitiva F (integrându-se una din ecuaţii).

Obţinem, dacă luăm, de exemplu, prima ecuaţie,

$$F(x,y)=\int P(x,y)\,dx=\int\frac{1}{y}\,dx=\frac{x}{y}+C(y)\,.$$

Folosim a doua ecuaţie şi obţinem

$$\left(\frac{x}{y}+C(y)\right)'_y=\frac{-x}{y^2}\quad\Leftrightarrow\quad C'(y)=0\quad\Leftrightarrow\quad C(y)=C,$$

deci

$$F(x,y)=\frac{x}{y}+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Se aplică formula lui Leibniz-Newton şi obţine că

$$I=\int_{(\widehat{AB})}dF(x,y)=F(x,y)\,\Big|_{(x,y)=A}^{(x,y)=B}=F(B)-F(A)=F(2,1)-F(1,2)\,.$$

29. Să se calculeze următoarea integrală curbilinie constatând în prealabil că este independentă de drum:

$$\int_{(\widehat{AB})} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

unde $(\widehat{AB})$ este arcul de curbă ce uneşte punctul $A(1,1,1)$ cu $B(3,4,5)$.

Rezolvare:

Avem de calculat integrala

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

În cazul nostru $P(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $Q(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $R(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Se verifică mai întâi condiţiile suficiente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = -xy\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = -yz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) = -xz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z), \text{ pentru orice } (x,y,z) \end{cases}$$

care asigură existenţa unei primitive[5] F a formei diferenţiale $P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$ care se integrează.

Apoi se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z), \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z), \end{cases}$$

care defineşte primitiva F (integrându-se una din ecuaţii)[6].

[5]Fie $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un domeniu **simplu conex** (domeniu conex cu proprietatea că orice curbă închisă situată în D mărgineşte un domeniu care este de asemenea în D; adică domeniul D **nu are "găuri"**). Fie două funcţii $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$. Dacă avem forma diferenţială de ordinul 1

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz,$$

atunci aceasta este o **diferenţială totală exactă** dacă şi numai dacă au loc relaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z), \end{cases}$$

pentru orice $(x,y,z) \in D$.

[6]Dacă forma diferenţială $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ este exactă, atunci există $F \in C^1(D)$ astfel încât au loc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z), \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z), \end{cases}$$

pentru orice $(x,y,z) \in D$.

Obţinem, dacă luăm, de exemplu, prima ecuaţie,

$$F(x,y,z)=\int P(x,y,z)\,dx=\int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx=\frac{1}{2}\int \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\left(x^2+y^2+z^2\right)'_x\,dx$$
$$=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}+C(y,z)\,.$$

Folosim a doua ecuaţie şi obţinem

$$\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C(y,z)\right)'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad\Leftrightarrow\quad C'_y(y,z)=0\quad\Leftrightarrow\quad C(y,z)=C(z)\,,$$

deci

$$F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C(z)\,.$$

Folosim a treia ecuaţie şi obţinem

$$\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C(z)\right)'_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad\Leftrightarrow\quad C'(z)=0\quad\Leftrightarrow\quad C(z)=C,$$

deci

$$F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Se aplică formula lui Leibniz-Newton şi obţine valoarea integralei

$$I=\int_{(\widehat{AB})}dF(x,y,z)=F(x,y,z)\,\Big|_{(x,y,z)=A}^{(x,y,z)=B}=F(B)-F(A)=F(3,4,5)-F(1,1,1)\,.$$

30. Să se studieze dacă următoarele forme diferenţiale sunt exacte şi în caz afirmativ să se calculeze o primitivă a lor:

(a) $\left(4x^3y^3-3y^2+5\right)dx+\left(3x^4y^2-6xy-4\right)dy.$

(b) $z\left(\dfrac{1}{x^2y}-\dfrac{1}{x^2+z^2}\right)dx+\dfrac{z}{xy^2}dy+\left(\dfrac{x}{x^2+z^2}-\dfrac{1}{xy}\right)dz.$

Rezolvare:

(a) În cazul nostru $P(x,y)=4x^3y^3-3y^2+5$ şi $Q(x,y)=3x^4y^2-6xy-4$.

Se verifică mai întâi condiţiile suficiente

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=12x^3y^2-6y=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,,\ \text{pentru orice }(x,y)$$

care asigură existenţa unei primitive F a formei diferenţiale $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$.

Apoi se rezolvă sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=P(x,y)\,,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)\,.\end{cases}$$

Obţinem, dacă luăm, de exemplu, prima ecuaţie,

$$F(x,y)=\int P(x,y)\,dx=\int\left(4x^3y^3-3y^2+5\right)dx=x^4y^3-3xy^2+5x+C(y)\,.$$

Folosim a doua ecuaţie şi obţinem

$$\left(x^4y^3-3xy^2+5x+C(y)\right)'_y=3x^4y^2-6xy-4\quad\Leftrightarrow\quad C'(y)=-4\quad\Leftrightarrow\quad C(y)=-4y+C,$$

deci

$$F(x,y)=x^4y^3-3xy^2+5x-4y+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

(b) În cazul nostru $P(x,y,z) = \frac{z}{x^2y} - \frac{z}{x^2+z^2}$, $Q(x,y,z) = \frac{z}{xy^2}$, $R(x,y,z) = \frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}$.
Se verifică mai întâi condiţiile suficiente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{-z}{x^2y^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{1}{xy^2} = \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{z^2-x^2}{(x^2+z^2)^2} + \dfrac{1}{x^2y} = \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z), \text{ pentru orice } (x,y,z) \end{cases}$$

care asigură existenţa unei primitive F a formei diferenţiale $P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$.
Apoi se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z), \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z), \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z). \end{cases}$$

Obţinem, dacă luăm, de exemplu, a doua ecuaţie,

$$F(x,y,z) = \int Q(x,y,z)\,dy = \int \frac{z}{xy^2}\,dx = \frac{-z}{xy} + C(x,z).$$

Folosim prima ecuaţie şi obţinem

$$\left(\frac{-z}{xy} + C(x,z)\right)'_x = \frac{z}{x^2y} - \frac{z}{x^2+z^2} \quad \Leftrightarrow \quad C'_x(x,z) = -\frac{z}{x^2+z^2}$$
$$\Leftrightarrow C(x,z) = -\text{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) + C(z),$$

deci

$$F(x,y,z) = -\frac{z}{xy} - \text{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) + C(z).$$

Folosim a treia ecuaţie şi obţinem

$$\left(-\frac{z}{xy} - \text{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) + C(z)\right)'_z = \frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy} \quad \Leftrightarrow \quad C'(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C(z) = C,$$

deci

$$F(x,y,z) = -\frac{z}{xy} - \text{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

31. Determinaţi aria domeniului mărginit de curba

$$(\gamma): \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Rezolvare:

Trebuie calculată integrala curbilinie care dă **aria unui domeniu mărginit de o curbă închisă**

$$\mathcal{A}(\gamma) = \frac{1}{2}\int_{(\gamma)} xdy - ydx.$$

32. Să se calculeze aria elipsei $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.