Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului
Analiză Matematică II, Semestrul II,
Conf. dr. Lucian MATICIUC

Sinteză – Analiză Matematică II
Formule

Cap. I Integrala definită. Primitive

1. Se numeşte primitivă a funcţiei f pe $[a, b]$ o funcţie F cu proprietatea că este derivabilă pe $[a, b]$ şi are loc $F'(x) = f(x), \quad \forall\, x \in [a, b]$
2. Dacă f admite primitiva F atunci mulţimea $\{F + C,\ C \in R\}$ se numeşte tot integrala nedefinită a lui f şi se notează cu $\int f(x)\, dx$
3. Integrala definită $\int_a^b f(x)\, dx$ este un număr, pe când primitiva unei funcţii este o funcţie (iar integrala nedefinită este mulţime infinită de funcţii)
4. Formula lui Leibniz-Newton. Fie f o funcţie integrabilă şi care admite primitive pe $[a, b]$. Atunci are loc
$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a),$$
oricare ar fi F o primitivă a lui f
5. Metoda de integrare prin părţi. Dacă f, g sunt derivabile cu derivatele continue pe intervalul I, atunci
$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$
6. *F*ormula de integrare prin părţi pentru integrale definite
$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$$
7. Exemple standard în care se foloseşte metoda de integrare prin părţi:
$$\begin{array}{ll} \int x^n e^{ax}\, dx & \int x^n \ln^m x dx \\ \int e^{ax} \sin(bx)\, dx & \int e^{ax} \cos(bx)\, dx \\ \int x^n \sin(ax)\ dx & \int x^n \cos(ax)\ dx \\ \int \sqrt{x^2 + a^2} dx & \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \end{array}$$

8. Prima metodă de schimbare de variabilă. Fie funcţiile $u : I \to J$ şi $f : J \to R$, unde I, J sunt intervale. Dacă u este derivabilă pe I iar f admite primitive pe J atunci funcţia $f(u)\, u' : I \to R$ admite primitive pe I şi are loc

$$\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = F(u(x)) + C,$$

unde F este o primitivă a lui f

9. Practic: notăm $y := u(x)$ şi deci $dy = u'(x)\, dx$ iar

$$\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int f(y)\, dy = F(y) + C = F(u(x)) + C$$

10. Prima metodă de schimbare de variabilă pentru integrala definită. Dacă u este derivabilă pe J cu derivata continuă şi f este continuă pe I, atunci

$$\int_a^b f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\, dy = F(u(b)) - F(u(a))$$

11. Folosim forma canonică a trinomului de gradul 2

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a},$$

unde $\Delta = b^2 - 4ac$.

De exemplu,

$$6x - x^2 - 5 = -x^2 + 6x - 5 = -(x^2 - 6x) - 5 = -(x-3)^2 + 9 - 5 = 4 - (x-3)^2$$

12. A doua metodă de schimbare de variabilă. Fie funcţiile $u : I \to J$ şi $f : J \to R$, unde I, J sunt intervale. Dacă f e continuă pe J iar u este strict monotonă şi derivabilă pe I iar inversa sa $v : J \to I$ are derivata continuă pe J atunci funcţia $f(u) : I \to R$ admite primitive pe I şi are loc

$$\int f(u(x))\, dx = F(u(x)) + C$$

unde F este o primitivă a lui fv', adică $\int f(y)\, v'(y)\, dy = F(y) + C$

13. Practic: facem substituţia $x = u^{-1}(y) = v(y)$ deci $dx = v'(y)\, dy$ iar

$$\int f(u(x))\, dx = \int f(u(v(y)))\, v'(y)\, dy = \int f(y)\, v'(y)\, dy = F(y) + C = F(u(x)) + C$$

14. A doua metodă de schimbare de variabilă pentru integrala definită. În aceleaşi ipoteze ca mai sus avem

$$\int_a^b f(u(x))\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\, v'(y)\, dy$$

15. Practic: notăm $y := u(x)$ deci avem şi $x = u^{-1}(y) = v(y) \Rightarrow dx = v'(y)\, dy$

$$\int_a^b f(u(x))\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u(v(y)))\, v'(y)\, dy = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\, v'(y)\, dy$$

16. Substituţia trigonometrică $x = a\sin y$ sau $x = a\cos y$. Dacă folosim substituţia $x = a\sin y$ atunci

$$dx = (a\sin y)'\, dy = a\cos y dy$$

şi

$$x = a\sin y \Leftrightarrow y = \arcsin x/a\,.$$

17. Calculul primitivelor funcţiilor raţionale. Pentru calculul primitivelor unei funcţii raţionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se parcurg următoarele etape:

(a) Dacă $\operatorname{grad} P(x) \geq \operatorname{grad} Q(x)$ atunci se va împărţi P la Q şi se va obţine $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ unde $\operatorname{grad} P_1(x) < \operatorname{grad} Q(x)$.

(b) Se va descompune numitorul $Q(x)$ în factori ireductibili, adică

$$\begin{aligned} Q(x) &= \prod_{i=1}^{k} (x-\alpha_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{k} \left(x^2+\beta_j x+\gamma_j\right)^{s_j} \\ &= (x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}\left(x^2+\beta_1 x+\gamma_1\right)^{s_1}\cdots\left(x^2+\beta_l x+\gamma_l\right)^{s_l}\,. \end{aligned}$$

(c) Fracţia raţională $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ (suntem în cazul când gradul numărătorului este mai mic strict decât gradul numitorului) se va descompune în fracţii simple (utilizând descompunerea de mai sus):

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{(x-\alpha_i)^{r_i}} + \sum_{j=1}^{l} \frac{b_j x + c_j}{\left(x^2+\beta_j x+\gamma_j\right)^{s_j}}\,.$$

18. Calculul primitivelor unor expresii iraţionale.

Fie integralele de forma $\int R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{p_1}{q_1}}, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{p_2}{q_2}}, ...\Big)dx$ unde R este o expresie raţională. Aceste integrale se reduc la integrale raţionale cu ajutorul substituţiei

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$$

unde s este cel mai mic multiplu comun al numitorilor $q_1, q_2, ...$

19. Calculul primitivelor unor expresii iraţionale.

Fie integralele de forma $\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$ unde $m, n, p \in Q$ (integrale binome). Aceste integrale se reduc la integrale raţionale doar în următoarele trei situaţii (cu ajutorul substituţiilor respective):

(i) Dacă p este număr întreg (pentru substituţie vezi cazul precedent)

(ii) Dacă $\dfrac{m+1}{n}$ este număr întreg şi în acest caz este utilă substituţia $a+bx^n=t^s$ unde s este numitorul lui p

(iii) Dacă $\dfrac{m+1}{n}+p$ este număr întreg şi în acest caz este utilă substituţia $\dfrac{a+bx^n}{x^n}=t^s$ unde s este numitorul lui p

20. Calculul primitivelor unor expresii ce conţin funcţii trigonometrice. Fie integralele de forma $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ unde $R(a,b)$ este o expresie raţională în a şi b. Aceste integrale se reduc la integrale raţionale cu ajutorul următoarelor substiţituţii:
(i) Dacă $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ atunci este utilă substituţia $\cos x=t$

(ii) Dacă $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ atunci este utilă substituţia $\sin x=t$

(iii) Dacă $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ atunci este utilă substituţia $\mathrm{tg}x=t$

(iv) Substituţia universală $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=t$

21. Sunt utile următoarele formule trigonometrice

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x+\cos^2 x=1,\\
&\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}\,,\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\,,\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\,,\\
&\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\,,\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,,\qquad \text{unde } t=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\,,\\
&\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,,\qquad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\qquad \text{unde } t=\mathrm{tg}\,(x)\,.
\end{aligned}$$

22. Aplicaţii ale integralei definite. Aria unei suprafeţe plane (a unui domeniu din $\mathbb{R}^2$). Dacă domeniul este dat de $D=\{(x,y):a\le x\le b\ ,\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$ atunci aria domeniului D este dată de

$$\mathcal{A}(D)=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx$$

23. Lungimi de curbe (în plan şi spaţiu). Avem trei cazuri:
(a) Curba este dată explicit de $(C):y=f(x)\ ,\ a\le x\le b$ atunci lungimea curbei este dată de

$$\mathcal{L}(C)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

(b_1) Curba este în plan şi este dată parametric de $(C):\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\ ,\ a\le t\le b$ atunci lungimea curbei este dată de

$$\mathcal{L}(C)=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

(b_2) Curba este în spaţiu şi este dată parametric de $(C):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $a \leq t \leq b$ atunci lungimea curbei este dată de

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Cap. II Integrale improprii

1. Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, o funcţie integrabilă Riemann pe intervale compacte de tipul $[a,b]$, $\forall\ b>a$. Integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ se numeşte integrala improprie de primul tip. Dacă $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ există şi este finită vom spune că integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă (C) şi vom scrie
$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$
O integrală care nu este convergentă se va numi divergentă (D).

2. Fie $a>0$. Integrala
$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$$
este convergentă pentru $\alpha>1$ şi divergentă pentru $\alpha\le 1$.

3. Integrala $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ se poate defini prin egalitatea
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^a f(x)\,dx+\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx=\int_{-\infty}^a f(x)\,dx+\int_a^\infty f(x)\,dx$$

4. Să observăm că în exemplele date mai înainte, pentru a calcula integralele improprii, se calcula mai întâi integrala Riemann (pe interval finit) cu ajutorul primitivei iar apoi se trecea la limită. Astfel dacă avem $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ integrabilă Riemann pe orice interval compact de tipul $[a,b]$, $\forall\ b>a$, astfel încât f admite primitiva F atunci, în cazul în care există $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=F(\infty)$, are loc
$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\left.F(x)\right|_a^\infty=F(\infty)-F(a)$$

5. Fie $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ două funcţii astfel încât $f,g\ge 0$ pe $[a,\infty)$. Dacă există limita
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell\in[0,\infty]$$
atunci:

   (a) Dacă $\ell<\infty$ atunci, dacă integrala improprie $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este (C), obţinem că integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este (C).

   (b) Dacă $\ell>0$ atunci, dacă integrala improprie $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este (D), obţinem că integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este (D).

6. Criteriul în α. Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât $f\ge 0$ pe $[a,\infty)$. Atunci

   (a) Dacă $\exists\ \alpha>1$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha f(x)<+\infty$ atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este (C).

   (b) Dacă $\exists\ \alpha\le 1$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha f(x)>0$ atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este (D).

7. Teorema este echivalentă cu următoarele afirmaţii:

   (a) Presupunem că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = \ell \in (0,\infty)$. Atunci $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ este (C) dacă $\alpha > 1$ şi (D) dacă $\alpha \le 1$.

   (b) Presupunem că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = 0$. Atunci $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ este (C) dacă $\alpha > 1$.

   (c) Presupunem că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = +\infty$. Atunci $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ este (D) dacă $\alpha \le 1$.

8. Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, o funcţie integrabilă Riemann pe intervale compacte de tipul $[a,c]$, $\forall\ a < c < b$ şi care satisface $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = \infty$. Integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ se numeşte integrala improprie de al doilea tip. Dacă $\lim\limits_{c\nearrow b} \int_a^c f(x)\,dx$ există şi este finită vom spune că integrala improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ este (C) şi vom scrie

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\nearrow b} \int_a^c f(x)\,dx$$

9. Punctul b de mai sus spunem că este punct singular.

10. Integrala

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}$$

   este convergentă pentru $\lambda < 1$ şi divergentă pentru $\alpha \ge 1$.

11. Analog se poate studia natura integralei

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\lambda}}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Observăm că se integrează funcţia $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^{\lambda}}$ care este continuă deci integrabilă pe orice interval compact $[a,c] \subset (a,b]$. Se obţine că

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\lambda}} = \begin{cases} +\infty\,, & \lambda \ge 1, \\ \dfrac{(b-a)^{-\lambda+1}}{1-\lambda}\,, & \lambda < 1. \end{cases}$$

12. Criteriul în α. Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \ge 0$, $\forall\, x \in [a,b)$. Atunci

   (a) Dacă $\exists\ \lambda < 1$ a.î. $\lim\limits_{x\nearrow b} |x-b|^{\lambda} f(x) < \infty$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este (C).

   (b) Dacă $\exists\ \lambda \ge 1$ a.î. $\lim\limits_{x\nearrow b} |x-b|^{\lambda} f(x) > 0$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este (D).

13. Teorema este echivalentă cu următoarele afirmaţii:

 (a) Presupunem că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x \nearrow b} |x-b|^{\lambda} f(x) = \ell \in (0, \infty)$. Atunci $\int_a^b f(x)\, dx$ este (C) dacă $\lambda < 1$ şi (D) dacă $\lambda \geq 1$.

 (b) Presupunem că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x \nearrow b} |x-b|^{\lambda} f(x) = 0$. Atunci $\int_a^b f(x)\, dx$ este (C) dacă $\lambda < 1$.

 (c) Presupunem că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x \nearrow b} |x-b|^{\lambda} f(x) = +\infty$. Atunci $\int_a^b f(x)\, dx$ este (D) dacă $\lambda \geq 1$.

Cap. III Integrale curbilinii

1. Mulţimea punctelor din plan $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, împreună cu reprezentarea parametrică $(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, se numeşte curbă plană.

2. Mulţimea punctelor din spaţiu $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, împreună cu reprezentarea parametrică $(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, se numeşte curbă în spaţiu.

3. Ecuaţiile parametrice ale cercului sunt
$$\begin{cases} x(t) = r \cos t, \\ y(t) = r \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

4. Ecuaţiile parametrice ale elipsei sunt
$$\begin{cases} x(t) = a \cos t, \\ y(t) = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

5. Cantitatea
$$ds = \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}dt$$
se numeşte elementul lungime de arc de pe curbă.

6. Pentru o curbă dată explicit $(C): y = y(x)$, $x \in [a, b]$, elementul lungime de arc este dat de
$$ds = \sqrt{1 + |y'(x)|^2}dx$$

7. Pentru o curbă $(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, elementul lungime de arc este dat de
$$ds = \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2}dt$$

8. Teorema de reducere a integralei curbilinii de primul tip:
$$\int_{(C)} f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}dt$$

9. Teorema de reducere a integralei curbilinii de primul tip (în cazul în care curba este dată explicit prin ecuaţia $y = y(x)$, $x \in [a, b]$)
$$\int_{(C)} f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + |y'(x)|^2}dx.$$

10. În cazul unei curbe în spaţiu (C) dată prin ecuaţiile parametrice $(C):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, obţinem formula de calcul

$$\int\limits_{(C)} f(x, y, z)\, ds = \int\limits_{a}^{b} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2}\, dt.$$

11. Dacă vom considera $f \equiv 1$ vom obţine lungimea curbei (C) notată cu $\ell(C)$

$$\ell(C) = \int_{(C)} ds$$

12. Teorema de reducere a integralei curbilinii de al doilea tip

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy =$$
$$= \int_a^b \left[P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t)\right] dt,$$

unde curba pe care se intergrează este arcul $(\widehat{AB})$.

13. Teorema de reducere a integralei curbilinii de al doilea tip

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$
$$= \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\right] dt$$

14. Conditia necesară şi suficientă ca o integrală curbilinie să fie independentă de drum. În condiţiile: D un domeniu deschis şi conex, P, Q două funcţii continue pe D, $(\widehat{AB})$ o curbă netedă pe porţiuni, avem că integrala

$$I = \int\limits_{(\widehat{AB})} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

este independentă de drumul $(\widehat{AB})$ dacă şi numai dacă există funcţia $F(x, y)$ diferenţiabilă în D astfel încât avem

$$dF(x, y) = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy,\ (x, y) \in D \tag{1}$$

15. O funcţie F care verifică ecuaţia (1) se numeşte primitivă a formei diferenţiale $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$. Având în vedere expresia diferenţialei unei funcţii

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \cdot dy,$$

deducem că, condiţia (1) este echivalentă cu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \end{cases} \tag{2}$$

16. Condiţia (1) din teorema de mai sus defineşte faptul că forma diferenţială $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ este formă diferenţială totală exactă. Deci Teorema precedentă afirmă că o integrală curbilinie este independentă de drum dacă şi numai dacă forma diferenţială care se integrează este exactă.

17. Pentru integralele care nu depind de drumul ales este valabilă formula lui Leibniz-Newton, adică are loc
$$\int_{(\widehat{AB})} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = F(B) - F(A).$$

18. Din condiţia (2) obţinem, derivând parţial, legătura dintre P şi Q pentru ca integrala curbilinie să nu depindă de drum
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),\ \forall (x,y) \in D \tag{3}$$

19. Conditia necesară şi suficientă ca o integrală curbilinie să fie independentă de drum. Fie P, Q, R trei funcţii continue pe $D \subset \mathbb{R}^3$, $(\widehat{AB})$ o curbă în spaţiu netedă pe porţiuni. Integrala
$$I = \int_{(\widehat{AB})} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$
este independentă de drumul $(\widehat{AB})$ dacă şi numai dacă există funcţia $F(x,y,z)$ diferenţiabilă în D astfel încât avem
$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz,\ (x,y,z) \in D \tag{4}$$

20. O funcţie F care verifică ecuaţia (4) se numeşte primitivă a formei diferenţiale $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$. Având în vedere expresia diferenţialei unei funcţii
$$dF(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\cdot dy + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\cdot dz,$$
deducem că (4) este echivalentă cu
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z) \end{cases} \tag{5}$$

21. Condiţia (4) din teorema de mai sus defineşte faptul că forma diferenţială $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ este formă diferenţială totală exactă. Deci Teorema de mai sus afirmă că o integrală curbilinie este independentă de drum dacă şi numai dacă forma diferenţială care se integrează este exactă.

22. Pentru integralele care nu depind de drumul ales este valabilă formula lui Leibniz-Newton, adică are loc

$$\int\limits_{(\widehat{AB})} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = F(B) - F(A)$$

23. Din condiţia (5) obţinem, derivând parţial, legătura dintre P, Q şi R pentru ca integrala curbilinie să nu depindă de drum

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,,\ \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y)\,,\ \frac{\partial R}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial z}(x,y)\,,\ \forall (x,y,z)\in D \tag{6}$$

24. De exemplu, să se studieze dacă următoarea formă diferenţială este exactă şi în caz afirmativ să se calculeze o primitivă a ei:

$$\omega = \left(4x^3y^3 - 3y^2 + 5\right)dx + \left(3x^4y^2 - 6xy - 4\right)dy.$$

În cazul nostru $P(x,y,z) = 4x^3y^3 - 3y^2 + 5$ şi $Q(x,y,z) = 3x^4y^2 - 6xy - 4$. Se verifică mai întâi egalitatea (6)

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 12x^3y^2 - 6y$$

apoi se rezolvă sistemul (5) integrându-se una din ecuaţii.

Se va obţine

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int P(x,y)\,dx = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x + c(y)\,.$$

Folosind acum ecuaţia a doua avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= Q(x,y) \Leftrightarrow 3x^4y^2 - 6xy + 0 + c'(y) = 3x^4y^2 - 6xy - 4\\ &\Leftrightarrow c'(y) = 0 \Leftrightarrow c(y) = c\end{aligned}$$

Deci

$$F(x,y) = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x + c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Cap. IV Integrala dublă

1. Teorema de reducere a integralei duble la o integrală iterată în cazul domeniului dreptunghiular
$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\right\} = [a,b] \times [c,d]$$
este
$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx.$$

2. Atunci când integrăm în raport cu o variabilă vom considera cealaltă variabilă drept constantă. De exemplu,
$$\int_2^5 \left(5xy^2 - 2x^3\right) dy = \left(5x\frac{y^3}{3} - 2x^3 y\right)\Big|_{y=2}^{y=5} = \left(5x \cdot \frac{5^3}{3} - 2x^3 \cdot 5\right) - \left(5x \cdot \frac{2^3}{3} - 2x^3 \cdot 2\right).$$
Sau
$$\int_0^1 \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+x^2+y^2\right)^{-3/2} \cdot \left(1+x^2+y^2\right)'_y\, dy =$$
$$= \text{(folosind prima metodă de schimbare de variabilă)} =$$
$$= \frac{1}{2}\, \frac{\left(1+x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = -\left[\left(2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$$

3. Teorema de reducere a integralei duble la o integrală iterată în cazul unui domeniu dat de
$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\}, \tag{7}$$
este:
$$\iint_{(\mathcal{D})} f(x,y)\, da = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

4. Pentru a determina dacă domeniul este de tipul celui de mai sus trebuie să:
(i) desenăm mai întâi domeniul $\mathcal{D}$
(ii) proiectăm domeniul $\mathcal{D}$ pe axa Ox şi obţinem limitele de variaţie pentru variabila x (i.e. $a \le x \le b$)
(iii) luăm $x \in [a,b]$ arbitrar şi prin x ducem o paralelă la axa Oy care va intersecta domeniul $\mathcal{D}$ în curbele $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_2(x)$.
Deci obţinem explicitarea (7).

5. Formula lui Green (formula de legătură între integrala curbilinie de specia a II-a şi integrala dublă):
$$\oint_{(\mathcal{C})} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = \iint_{(\mathcal{D})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$
unde $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu închis şi mărginit de curba închisă şi netedă $(\mathcal{C})$.

6. Fie
$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta), \ (\xi,\eta) \in \Delta \end{cases}$$
Determinantul funcţional al transformării (jacobianul) este
$$J(\xi,\eta) = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}.$$

7. Elementul de arie este
$$dxdy = |J(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta.$$

8. Teorema de schimbare de variabilă în integrale duble:
$$\iint_{(\mathcal{D})} f(x,y)\ dxdy = \iint_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))\ |J(\xi,\eta)|\ d\xi d\eta.$$

9. Dacă domeniul este dat de inegalităţi, atunci, pentru a desena domeniul, trebuie mai întâi să desenăm curbele date de egalităţi. Atunci domeniul $\mathcal{D}$ este domeniul mărginit de acele curbe.

10. Coordonatele polare sunt (ρ,θ) iar ecuaţiile de legătură sunt
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [0,+\infty),\ \theta \in [0,2\pi] \tag{8}$$
Jacobianul în cazul trecerii la coordonate polare este dat de:
$$J(\rho,\theta) = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

11. Ecuaţia unui cerc centrat în origine şi de rază R este
$$x^2 + y^2 = R^2.$$

12. Ecuaţia unui cerc centrat în $A(a/2,0)$ şi de rază $a/2$ este
$$(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = ax.$$

13. Ecuaţia unui cerc centrat în $A(0,a/2)$ şi de rază $a/2$ este
$$x^2 + (y - a/2)^2 = a^2/4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = ay.$$

14. Discul (cercul cu interiorul lui) centrat în origine şi de rază R este dat de
$$x^2 + y^2 \le R^2.$$

15. Dacă $\mathcal{D}$ este discul $x^2 + y^2 \leq R^2$, atunci coordonatele polare sunt cele date de (8) cu $\rho \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

16. Dacă $\mathcal{D}$ este dat de $x^2 + y^2 \leq R^2$ cu $y \geq 0$ (semidiscul superior), atunci coordonatele polare sunt cele date de (8) cu $\rho \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi]$.

17. Dacă $\mathcal{D}$ este dat de $x^2 + y^2 \leq R^2$ cu $x, y \geq 0$ (semidiscul din primul cadran), atunci coordonatele polare sunt cele date de (8) cu $\rho \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi/2]$.

18. Dacă $\mathcal{D}$ este interiorul de cerc $x^2 + y^2 \leq ax$, atunci

$$x^2 + y^2 \leq ax \Leftrightarrow (x - a/2)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} .$$

Deci $\mathcal{D}$ este interiorul unui cerc de centru $A\,(a/2, 0)$ şi de rază $a/2$. Coordonatele polare sunt cele date de (13). Din desen se vede că $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Pentru a găsi domeniul lui ρ folosim inegalitatea care dă domeniul:

$$x^2 + y^2 \leq ax \Rightarrow \rho^2 \leq a\rho\cos\theta \Leftrightarrow \rho \leq a\cos\theta$$

deci $\rho \in [0, a\cos\theta]$.

19. Dacă $\mathcal{D}$ este interiorul de cerc $x^2 + y^2 \leq ay$, atunci

$$x^2 + y^2 \leq ay \Leftrightarrow x^2 + (y - a/2)^2 \leq \frac{a^2}{4} .$$

Deci $\mathcal{D}$ este interiorul unui cerc de centru $A\,(o, a/2)$ şi de rază $a/2$. Coordonatele polare sunt cele date de (13). Din desen se vede că $\theta \in [0, \pi]$. Pentru a găsi domeniul lui ρ folosim inegalitatea care dă domeniul:

$$x^2 + y^2 \leq ay \Rightarrow \rho^2 \leq a\rho\sin\theta \Leftrightarrow \rho \leq a\sin\theta$$

deci $\rho \in [0, a\sin\theta]$.

20. Aria unui domeniu plan. Fie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu plan. Aria lui este dată de integrala dublă

$$\mathcal{A} = \iint_{(\mathcal{D})} dxdy$$

Cap. V Integrale de suprafaţă

1. Dacă suprafaţa (S) este dată de reprezentarea parametrică

$$(S) : x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v), \ (u,v) \in \Delta$$

(u şi v sunt parametrii ai unui punct $M(x,y,z)$ de pe suprafaţă), atunci:

2. Definim determinanţii funcţionali

$$A := \frac{D(g,h)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{vmatrix}, \quad B := \frac{D(h,f)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} h'_u & h'_v \\ f'_u & f'_v \end{vmatrix},$$
$$C := \frac{D(f,g)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}.$$

3. Definim cantităţile

$$E := (f'_u)^2 + (g'_u)^2 + (h'_u)^2, \quad G := (f'_v)^2 + (g'_v)^2 + (h'_v)^2.$$

şi

$$F := f'_u \cdot f'_v + g'_u \cdot g'_v + h'_u \cdot h'_v.$$

4. Cosinuşii directori sunt daţi de formulele

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{9}$$

5. Are loc egalitatea

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2.$$

6. Forma diferenţială

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv = \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$$

se numeşte elementul de arie al suprafeţei (S).

7. Aria suprafeţei (S) dată parametric este dată de integrala dublă

$$\mathcal{A}_S = \iint_{(S)} d\sigma = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2}dudv$$

8. Dacă suprafaţa este dată explicit prin ecuaţia $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathcal{D}$, atunci luând $x = u$, $y = v$, $z = f(u,v)$ vom obţine că elementul de arie este dat de

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy,$$

unde

$$p = f'_x, \ q = f'_y.$$

9. Aria suprafeţei (S) dată explicit este dată de integrala dublă

$$\mathcal{A}_S = \iint_{(S)} d\sigma = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy$$

10. Ecuaţiile parametrice ale sferei $x^2+y^2+z^2=R^2$ sunt

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta\,, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta\,, \\ z = R\cos\varphi\,, \end{cases}, \quad \varphi\in[0,\pi]\,,\ \theta\in[0,2\pi]\,, \tag{10}$$

unde φ este unghiul făcut de vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM}$ cu axa Oz, iar θ este unghiul făcut de proiecţia lui $\overrightarrow{OM}$ pe planul xOy cu axa Ox. În acest caz

$$E = \left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2 + \left(z'_\varphi\right)^2 = \ldots\text{calcule}\ldots = R^2$$
$$G = (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = \ldots\text{calcule}\ldots = R^2\sin^2\varphi$$
$$F = x'_\varphi x'_\theta + y'_\varphi y'_\theta + z'_\varphi z'_\theta = \ldots\text{calcule}\ldots = 0.$$

Deci elementul de arie al suprafeţei este

$$d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\,d\theta d\varphi = R^2\sin\varphi\,d\varphi d\theta$$

11. Ecuaţiile parametrice ale cilindrului sunt

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\,, \\ y = R\sin\theta\,, \\ z = u\,, \end{cases}, \quad \theta\in[0,2\pi]\,,\ u\in(-\infty,+\infty)\,.$$

În acest caz

$$E = (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = \ldots\text{calcule}\ldots = R^2$$
$$G = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = \ldots\text{calcule}\ldots = 1$$
$$F = x'_\theta x'_u + y'_\theta y'_u + z'_\theta z'_u = \ldots\text{calcule}\ldots = 0.$$

Deci elementul de arie al suprafeţei este

$$d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\,d\theta d\varphi = R^2\,d\theta du.$$

12. Teorema de reducere a integralei de suprafaţă de primul tip la o integrală dublă (dacă (S) este dată parametric):

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{\Delta} f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\sqrt{EG-F^2}dudv.$$

13. Teorema de reducere a integralei de suprafaţă de primul tip la o integrală dublă (dacă (S) este dată de ecuaţia explicită $z=z(x,y)$, $(x,y)\in\cdot$):

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{\Delta} f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy.$$

14. Formula de reducere a unei integrale de suprafaţă de al doilea tip la o integrală de suprafaţă de primul tip

$$\iint_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma, \tag{11}$$

unde $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ sunt cosinuşii directori ai normalei pe faţa aleasă a suprafeţei, daţi de formulele (9).

15. În cazul unei reprezentări parametrice a suprafeţei (S), are loc formula generală de reducere a unei integrale de suprafaţă de al doilea tip la o integrală dublă

$$\iint_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm \iint_{\Delta} (A\cdot P + B\cdot Q + C\cdot R)\, dudv.$$

16. Formula lui Stokes:

$$\int_{(\mathcal{L})} Pdx+Qdy+Rdz = \iint_{(\mathcal{S})} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

unde (S) este o suprafaţă mărginită de curba $(\mathcal{L})$.

17. Dacă se ia drept suprafaţă un domeniu plan $\mathcal{D}$ (adică $z = 0$) formula lui Stokes devine formula lui Green, adică

$$\int_{(\mathcal{L})} Pdx + Qdy = \iint_{(\mathcal{D})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

unde $(\mathcal{D})$ este domeniul mărginit de curba $(\mathcal{L})$.

18. Formula lui Stokes se poate rescrie

$$\begin{aligned}&\int_{(\mathcal{L})} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \iint_{(\mathcal{S})} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma\end{aligned}$$

Cap. VI Integrala triplă

1. Teorema de reducere a integralei triple în cazul unui paralelipiped dreptunghic:

$$\begin{aligned}\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[g,h]} f(x,y,z)\,dxdydz &= \int_a^b \left(\iint_{[c,d]\times[g,h]} f(x,y,z)\,dydz\right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_g^h f(x,y,z)\;dz\right) dy\right) dx.\end{aligned}$$

2. Teorema de reducere a integralei triple în cazul unui corp cilindric:
Dacă
$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in\mathcal{D},\;\; g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\right\}, \tag{12}$$
atunci
$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_{\mathcal{D}}\left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\;dz\right)dxdy$$

3. Pentru a determina dacă domeniul V este de tipul celui de mai sus trebuie să:
(i) desenăm mai întâi domeniul V
(ii) proiectăm domeniul V pe planul xOy şi obţinem domeniul plan de variaţie pentru (x,y) (i.e. $(x,y)\in\mathcal{D}$)
(iii) luăm $(x,y)\in\mathcal{D}$ arbitrar şi prin (x,y) ducem o paralelă la axa Oz care va intersecta domeniul V în suprafeţele $g_1(x,y)$ şi $g_2(x,y)$.
Deci obţinem explicitarea (12).

4. Planele de coordonate sunt date de
$$\begin{array}{lcl} xOy & : & z=0\\ xOz & : & y=0\\ yOz & : & x=0\end{array}$$

5. Axele de coordonate sunt date de
$$\begin{array}{lcl} Ox & : & y=z=0\\ Oy & : & x=z=0\\ Oz & : & x=y=0\end{array}$$

6. Ecuaţia unei sfere centrată în origine şi de rază R este
$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

7. Bila (sfera cu interiorul ei) centrată în origine şi de rază R este dată de
$$x^2+y^2+z^2\le R^2.$$

8. Ecuaţia unui con cu vârful în origine şi cu axa de simetrie Oz este
$$x^2 + y^2 = z^2.$$

9. Conul cu interiorul lui este dat de
$$x^2 + y^2 \leq z^2.$$

10. Ecuaţia unui cilindru cu axa de simetrie Oz este
$$x^2 + y^2 = R^2.$$

11. Cilindrul cu interiorul lui este dat de
$$x^2 + y^2 \leq R^2.$$

12. Formula lui Gauss–Ostrogradski (face legătura dintre integrala triplă şi integrala de suprafaţa de specia a doua):
$$\iiint_V \left(\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdydz = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$
unde S este suprafaţa care mărgineşte corpul V.

13. Folosind teorema de reducere a integralelor de suprafaţă de al doile tip la integralele de suprafaţă de primul tip obţinem
$$\iiint_V \left(\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdydz = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma$$

14. Elementul de volum $dxdydz$ este dat de
$$dxdydz = |J(\xi,\eta,\zeta)|\ d\xi d\eta d\zeta,$$
unde ecuaţiile de legătură sunt
$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta,\zeta), \\ y = y(\xi,\eta,\zeta), \\ z = z(\xi,\eta,\zeta),\ (\xi,\eta,\zeta) \in \Delta \end{cases}$$
iar jacobianul transformării este
$$J(\xi,\eta,\zeta) \overset{def}{=} \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

15. Coordonatele cilindrice sunt date de

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z, \quad \text{cu } \rho \in [0,\infty),\ \theta \in [0,2\pi]\,,\ z \in (-\infty,\infty)\,. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este

$$J(\rho,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots \text{calcule} \ldots = \rho.$$

Deci elementul de volum $dxdydz$ este în cazul coordonatelor cilindrice

$$dxdydz = \rho\, d\rho d\theta dz.$$

16. Coordonatele sferice (sau coordonate polare în spaţiu) sunt date de

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi, \quad \rho \in [0,\infty),\ \varphi \in [0,\pi]\,,\ \theta \in [0,2\pi] \end{cases} \tag{13}$$

Jacobianul transformării este

$$J(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \ldots \text{calcule} \ldots = \rho^2\sin\varphi$$

Deci elementul de volum $dxdydz$ este în cazul coordonatelor sferice

$$dxdydz = \rho^2\sin\varphi\, d\rho d\varphi d\theta.$$

17. Volumul unui corp V este dat de

$$\mathcal{V}(V) = \iiint_V dxdydz$$

18. Dacă V este interiorul de sferă $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, atunci coordonatele sferice sunt cele date de (13) cu $\rho \in [0,R]\,,\ \varphi \in [0,\pi]\,,\ \theta \in [0,2\pi]\,.$

19. Dacă V este $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ cu $z \ge 0$ (interiorul de sferă din semispaţiul superior), atunci coordonatele sferice sunt cele date de (13) cu $\rho \in [0,R]\,,\ \varphi \in [0,\pi/2]\,,\ \theta \in [0,2\pi]\,.$

20. Dacă V este $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ cu $x,y,z \ge 0$ (interiorul de sferă din primul octant), atunci coordonatele sferice sunt cele date de (13) cu $\rho \in [0,R]\,,\ \varphi \in [0,\pi/2]\,,\ \theta \in [0,\pi/2]\,.$

21. Dacă V este interiorul de sferă $x^2 + y^2 + z^2 \leq az$, atunci

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq az \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2}{4}.$$

Deci V este interiorul unei sfere centru $A\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$ şi de rază $\frac{a}{2}$. Coordonatele sferice sunt cele date de (13). Din desen se vede că $\varphi \in [0, \pi/2]$ şi $\theta \in [0, 2\pi]$. Pentru a găsi domeniul lui ρ folosim inegalitatea care dă domeniul:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq az \Rightarrow \rho^2 \leq a\rho\cos\varphi \Leftrightarrow\Leftrightarrow \rho \leq a\cos\varphi$$

deci $\rho \in [0, a\cos\varphi]$.

Cap. VII Ecuaţii diferenţiale

1. Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile.
2. Ecuaţii diferenţiale liniare.
3. Ecuaţii diferenţiale de ordin n, omogene sau neomogene, cu coeficienţi constanţi.