Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii
şi Tehnologia Informaţiei
Algebră, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC
http://math.etti.tuiasi.ro/maticiuc/

CURS III – V

1 Spaţii vectoriale

1.1 Definiţii, exemple şi proprietăţi generale

Fie K un corp comutativ (**câmp**) ale cărui elemente le vom numi **scalari** şi le vom nota cu litere greceşti $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, având elementul nul notat cu 0 şi elementul unitate (neutru) cu 1. Fie V o mulţime a cărei elemente le vom numi **vectori** şi le vom nota cu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v}, \ldots$ (vectorii se mai pot nota şi cu $\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, \ldots$).

Definiţia 1 *Vom spune că V este un **spaţiu vectorial** peste câmpul K dacă pe mulţimea V sunt definite două legi de compoziţie, una internă "$+$" numită **adunarea vectorilor,** astfel încât*

$$\text{pentru orice } \vec{x}, \vec{y} \in V \text{ avem că } \vec{x} + \vec{y} \in V,$$

*şi una externă "$\cdot$" numită **înmulţirea vectorilor cu scalari,** astfel încât*

$$\text{pentru } \alpha \in K \text{ şi } \vec{x} \in V \text{ avem că } \alpha \cdot \vec{x} \in V,$$

şi astfel încât:

*1. Adunarea vectorilor este **asociativă***

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} \in V, \ \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V,$$

*2. Adunarea vectorilor este **comutativă***

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,$$

*3. Există un vector notat $\vec{0} \in V$, numit **vector nul**, astfel încât*

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}, \ \forall \vec{x} \in V,$$

*4. Pentru orice $\vec{x} \in V$ există vectorul $-\vec{x} \in V$, numit **opusul** lui $\vec{x}$, astfel încât*

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0},$$

5.

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}, \ \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall \vec{x} \in V,$$

6.

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}, \ \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall \vec{x} \in V,$$

7.

$$\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}, \ \forall \alpha \in K, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,$$

8.

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x}, \ \forall \vec{x} \in V,$$

unde 1 este elementul (unitate) neutru pentru operaţia de înmulţire în corpul K.

Remarca 2 *Reamintim că o mulţime K înzestrată cu două operaţii (unda aditivă şi una multiplicativă), notat $(K, +, \cdot)$, este corp comutativ sau câmp dacă:*
– $(K, +)$ este grup comutativ (adică operaţia $+$ este asociativă, admite element neutru, fiecare element din K admite invers (opus) şi $+$ este comutativă);
– operaţia $\cdot$ este asociativă;
– operaţia $\cdot$ este distributivă faţă de $+$
– operaţia $\cdot$ admite element unitate (diferit de zero)
(menţionăm că cele două operaţii $+, \cdot$ sunt altele decât cele definite pe spaţiul vectorial, ele fiind doar notate similar).

Remarca 3 *Din definiţia de mai sus se observă că V are structură de grup comutativ în raport cu operaţia "$+$" de adunare a vectorilor.*

Remarca 4 *În cele ce urmează corpul K va desemna câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ sau câmpul numerelor complexe $\mathbb{C}$ (înzestrate cu operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire a numerelor).*

Propoziţia 5 *Din definiţia de mai sus deducem următoarele:*

1. $0 \cdot \vec{x} = \vec{0},\ \forall \vec{x} \in V$
2. $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0},\ \forall \alpha \in K$
3. $(-\alpha) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (-\vec{x}) = -(\alpha \cdot \vec{x}),\ \forall \alpha \in K,\ \forall \vec{x} \in V$
4. $(-\alpha) \cdot (-\vec{x}) = \alpha \cdot \vec{x},\ \forall \alpha \in K,\ \forall \vec{x} \in V$

Demonstraţie. Folosind axiomele din definiţia spaţiului vectorial deducem

$$\vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = (1 + 0) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

Pe de altă parte $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ deci, din unicitatea elementului neutru, obţinem

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

De asemenea

$$\alpha \cdot \vec{0} + \alpha \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (\vec{0} + \vec{x}) = \alpha \cdot \vec{x},$$

deci, din unicitatea elementului neutru, obţinem

$$\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Obţinem a treia afirmaţie:

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{x} = (\alpha + (-\alpha)) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + (-\alpha) \cdot \vec{x} \Leftrightarrow (-\alpha) \cdot \vec{x} = -\alpha \cdot \vec{x}.$$

■

Exemplul 6 *Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale formează un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.*

Exemplul 7 *Mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe formează un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.*

Exemplul 8 *Mulţimea $\mathcal{P}_n(x)$ a **polinoamelor cu coeficienţi reali de grad cel mult** n (unde $n \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar fixat). formează un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ cu operaţiile de adunare ale polinoamelor şi de înmulţirea a acestora cu un număr real.*

Exemplul 9 ***Spaţiul vectorial aritmetic*** K^n. *Fie* K *un câmp oarecare şi* $n \in \mathbb{N}^*$. *Să considerăm spaţiul* K^n *dat de produsul cartezian*

$$K^n := K \times K \times \cdots \times K = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in K\}$$

Definim operaţiile

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in K^n$$
$$\alpha \cdot \vec{x} = \alpha (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n), \ \forall \alpha \in K, \ \forall \vec{x} \in K^n$$

Observăm că opusul lui $\vec{x}$ *este*

$$-\vec{x} = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

Se poate verifica că, în raport cu aceste două operaţii, K^n *este spaţiu vectorial peste câmpul* K.

Exemplul 10 *În particular pentru* $K = \mathbb{R}$ *obţinem* $\mathbb{R}^n$ *numit* ***spaţiul vectorial aritmetic real*** n***-dimensional***.

Exemplul 11 ***Spaţiul vectorial*** $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ ***al matricelor cu elemente din*** K *situate pe* m *linii şi* n *coloane.*

Vom nota cu a_{ij} *elementul matricei* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ *situat pe linia* i *şi coloana* j. *Deci* A *se va scrie sub forma*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sau prescurtat $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$.

Definim operaţiile

$$A + B = (a_{ij})_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}} + (b_{ij})_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}} = (a_{ij} + b_{ij})_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}, \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$
$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{ij})_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}} = (\alpha a_{ij})_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}, \ \forall \alpha \in K, \ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

Se poate verifica că, în raport cu aceste două operaţii, $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ *este spaţiu vectorial peste câmpul* K.

În particular pentru $m = n$ *obţinem* $\mathcal{M}_n(K)$ *numit* ***spaţiul vectorial al matricelor pătratice de ordin*** n.

Remarca 12 *În continuare vom renunţa, pentru simplitatea scrierii, la notaţia "$\cdot$"; astfel* $\alpha \cdot \vec{x}$ *se va scrie, mai simplu,* $\alpha\vec{x}$ *(dacă nu există posibilitate de confuzie).*

Definiţia 13 *O submulţime* $V' \subset V$ *ale cărei elemente verifică axiomele spaţiului vectorial* V *definit peste* K *se numeşte* ***subspaţiu vectorial*** *al lui* V.

Teorema 14 *O submulţime* $V' \subset V$ *este un subspaţiu vectorial al lui* V *dacă şi numai dacă avem:*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V', \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V'. \tag{1}$$

Demonstraţie. *Necesitatea ("$\Rightarrow$")* Dacă $V' \subset V$ este un subspaţiu vectorial al lui V atunci are loc, evident condiţia (1).

Suficienţa ("$\Leftarrow$") Menţionăm, mai întâi, că dacă are loc (1) atunci să luăm $\alpha = \beta = 1$ şi obţinem că $\vec{u} + \vec{v} \in V'$, apoi $\beta = 0$ şi obţinem că $\alpha\vec{u} \in V'$, şi apoi să luăm $\alpha = \beta = 0$ şi obţinem că $\vec{0} \in V'$. Se poate arăta uşor că sunt verificate toate axiomele spaţiului vectorial. ■

Remarca 15 *Pentru caracterizarea unui subspaţiu vectorial relaţia (1) poate fi înlocuită, echivalent, cu*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V', \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V' \text{ şi } \alpha\vec{u} \in V'. \tag{2}$$

Exemplul 16 *Submulţimea* $\{\vec{0}\}$ *a unui spaţiu vectorial este un subspaţiu vectorial.*

Exemplul 17 *Considerăm spaţiul vectorial aritmetic* K^n*. Atunci submulţimea sa*

$$V = \{\vec{u} \in K^n : \vec{u} = (0, u_2, u_3, \ldots, u_n)\,,\ u_2, u_3, \ldots, u_n \in K\} \subset K^n$$

este un subspaţiu vectorial. Într-adevăr, pentru orice $\vec{u}, \vec{v} \in V, \forall \alpha, \beta \in K$ *avem că*

$$\begin{aligned}\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} &= \alpha(0, u_2, u_3, \ldots, u_n) + \beta(0, v_2, v_3, \ldots, v_n) = (0, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n) + (0, \beta v_2, \ldots, \beta v_n) \\ &= (0, \alpha u_2 + \beta v_2, \ldots, \alpha u_n + \beta v_n) \in V\end{aligned}$$

(adică vectorul care s-a obţinut este de forma celor din mulţimea V*).*

Exemplul 18 *Pe de altă parte, submulţimea* $V' = \{\vec{u} \in K^n : \vec{u} = (1, u_2, u_3, \ldots, u_n)\,,\ u_2, u_3, \ldots, u_n \in K\} \subset K^n$ *nu este un subspaţiu vectorial. Într-adevăr, pentru orice* $\vec{u}, \vec{v} \in V', \forall \alpha, \beta \in K$ *avem că*

$$\begin{aligned}\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} &= \alpha(1, u_2, u_3, \ldots, u_n) + \beta(1, v_2, v_3, \ldots, v_n) = (1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n) + (1, \beta v_2, \ldots, \beta v_n) \\ &= (2, \alpha u_2 + \beta v_2, \ldots, \alpha u_n + \beta v_n) \notin V',\end{aligned}$$

deoarece $2 \neq 1$ *(adică vectorul care s-a obţinut nu este de forma celor din mulţimea* V'*).*

Exemplul 19 *Fie* $\mathcal{M}_n(K)$ *spaţiul vectorial al matricelor pătratice cu elemente din* K*. Atunci submulţimea sa* $V = \{A \in \mathcal{M}_n(K) : A = A^t\} \subset \mathcal{M}_n(K)$ *(submulţimea matricelor simetrice) este un subspaţiu vectorial. Într-adevăr, pentru orice* $A, B \in V, \forall \alpha, \beta \in K$ *avem că*

$$(\alpha A + \beta B)^t = (\alpha A)^t + (\beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B,$$

adică vectorul matrice care s-a obţinut este o matrice simetrică şi deci $\alpha A + \beta B \in V$*.*

Definiţia 20 *Fie* $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ *un sistem de* $n \in \mathbb{N}^*$ *vectori din spaţiul vectorial* V*. Spunem că vectorul* $\vec{v} \in V$ *este o* ***combinaţie liniară*** *de vectorii sistemului* S *dacă există* n *elemente* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ *astfel încât are loc*

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n.$$

Teorema 21 *Mulţimea vectorilor din* V *care se pot exprima ca o combinaţie liniară de vectorii sistemului* S *formează un subspaţiu vectorial al lui* V*.*

Demonstraţie. Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V$ doi vectori din V care se pot exprima ca combinaţii liniare de vectori din S,deci

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_p\vec{v}_p \text{ şi } \vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_p\vec{v}_p\,.$$

Atunci $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \cdots = (\alpha a_1 + \beta b_1)\vec{v}_1 + (\alpha a_2 + \beta b_2)\vec{v}_2 + \cdots + (\alpha a_p + \beta b_p)\vec{v}_p$, adică $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ este de asemenea o combinaţie liniară de vectori din S şi, aplicând caracterizarea dată de Teorema 14, obţinem concluzia. ■

Definiţia 22 *Vom nota cu* $[S]$ *mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de vectori din* S*,*

$$[S] := \{\vec{u} \in V : \vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n,\ \forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in K\} \subseteq V.$$

Acest spaţiu este, conform teoremei precedente, un subspaţiu vectorial şi se numeşte ***subspaţiul vectorial generat*** *de submulţimea* S*. Vectorii* $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p$ *spunem că formează un* ***sistem de generatori*** *pentru* $[S]$*.*

1.2 Dependenţă liniară, independenţă liniară şi baze într-un K–spaţiu

Fie V un K–spaţiu vectorial şi $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ un sistem finit de vectori din V.

Definiţia 23 *Sistemul S se numeşte **liniar dependent** dacă există scalarii $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$, nu toţi egali cu zero, astfel încât să aibă loc*

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0} \tag{3}$$

(combinaţia liniară $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$ să fie vectorul nul).

Definiţia 24 *În caz contrar, adică dacă orice relaţie de forma*

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

*(orice combinaţia liniară $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$ care este $\vec{0}$) implică $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, atunci sistemul S se numeşte **liniar independent**.*

Exemplul 25 *Sistemul $S = \{\vec{0}\}$ este liniar dependent deoarece are loc $\alpha\vec{0} = \vec{0}$, $\forall\alpha \in K$.*

Exemplul 26 *Sistemul $S = \{\vec{v} : \vec{v} \neq \vec{0}\}$ este liniar independent deoarece din relaţia $\alpha\vec{v} = 0$, obţinem $\alpha = 0$ (dacă $\alpha \neq 0$, atunci se obţine $\vec{v} = 0$).*

Exemplul 27 *În spaţiul vectorial aritmetic K^n sistemul de vectori*

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), ..., \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$$

(1 şi 0 sunt elementele neutre în câmpul K) este liniar independent.

Într-adevăr, fie combinaţia liniară

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}.$$

Avem

$$\begin{aligned} &\alpha_1(1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + \alpha_n(0, \ldots, 1) \\ &= (\alpha_1, 0, \ldots, 0) + (0, \alpha_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \end{aligned}$$

deci ecuaţia precedentă devine

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Deci din orice combinaţie liniară obţinem coeficienţii nuli.

Exemplul 28 *În spaţiul vectorial $\mathcal{P}_n(x)$ al polinoamelor de grad cel mult n, polinoamele $1, x, x^2, \ldots, x^n$ formează un sistem liniar independent deoarece relaţia*

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0$$

are loc doar dacă $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Exerciţiul 29 *Studiaţi dacă următorul sistem de vectori din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ este liniar dependent sau nu:*

$$S = \{\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, -1, 1), \vec{v}_3 = (-1, 3, -1)\}.$$

Fie combinaţia liniară

$$\begin{aligned} &\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(1, -1, 1) + \alpha_3(-1, 3, -1) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, 3\alpha_3, -\alpha_3) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = \vec{0} \end{aligned}$$

care este echivalent cu rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0 \\ \alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0 \end{cases}$$

Matricea sistemului are determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

deci sistemul omogen nu admite soluţie unică. Aceasta înseamnă că sistemul admite şi o soluţie diferită de cea banală. Deci sistemul dat este liniar dependent. Prin metodele cunoscute se va găsi soluţia $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(-t,2t,t)$, $t\in\mathbb{R}$. *O soluţie particulară este, luând* $t=-1$, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(1,-2,-1)$, *ceea ce înseamnă că are loc că următoarea combinaţie liniară este vectorul nul:*

$$\vec{v}_1-2\vec{v}_2-\vec{v}_3=\vec{0}$$

(evident se poate verifica imediat, prin calcul direct, că $\vec{v}_1-2\vec{v}_2-\vec{v}_3=0$*).*

Exerciţiul 30 *Să se stabilească dacă următorii vectori sunt liniar independenţi:* $\vec{v}_1=(1,-1,0)$, $\vec{v}_2=(-1,2,1)$, $\vec{v}_3=(1,1,1)$

Să considerăm combinaţia liniară

$$\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2+\gamma\vec{v}_3=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=0 \\ -\alpha+2\beta+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases}$$

Determinantul matricii sistemului este $\det A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ *deci rangul* $\operatorname{rang} A=3$. *Deci sistemul de mai sus este compatibil unic determinat (admite o unică soluţie). Pe de altă parte sistemul este omogen deci admite cel puţin soluţia banală* $(0,0,0)$. *Prin urmare soluţia banală este unica soluţie. În acest caz deducem că vectorii daţi sunt liniar independenţi adică orice relaţie de tipul*

$$\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2+\gamma\vec{v}_3=\vec{0}$$

implică $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Teorema 31 (de caracterizare a dependenţei liniare) *Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul* $S=\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}$ *să fie liniar dependent este ca cel puţin unul din vectorii sistemului* S *să se poată scrie ca o combinaţie liniară de ceilalţi vectori ai sistemului* S.

Demonstraţie. *Necesitatea ("⇒")* Să presupunem că sistemul S este liniar dependent. Deci are loc relaţia (3) cu scalarul $\alpha_1\neq 0$ (de exemplu). În acest caz există $(\alpha_1)^{-1}$ deci obţinem

$$\vec{v}_1=-(\alpha_1)^{-1}\alpha_2\vec{v}_2-(\alpha_1)^{-1}\alpha_3\vec{v}_3-\cdots-(\alpha_1)^{-1}\alpha_n\vec{v}_n$$

adică $\vec{v}_1$ este o combinaţie liniară de ceilalţi $n-1$ vectori.

Suficienţa ("⇐") Să presupunem că un vector (de exemplu $\vec{v}_1$) este o combinaţie liniară de ceilalţi $n-1$ vectori. Are loc

$$\vec{v}_1=\beta_1\vec{v}_2+\beta_2\vec{v}_3+\cdots+\beta_{n-1}\vec{v}_n$$

sau echivalent

$$\vec{v}_1 + (-\beta_1)\,\vec{v}_2 + (-\beta_2)\,\vec{v}_3 + \cdots + (-\beta_{n-1})\,\vec{v}_n = \vec{0}$$

adică are loc relaţia (3) cu coeficientul 1, al lui $\vec{v}_1$, diferit de zero. Deci sistemul de vectori S este liniar dependent. ■

Teorema 32 *Fie V un K–spaţiu vectorial. Atunci:*
1. Orice sistem de vectori care conţine un subsistem liniar dependent este de asemenea sistem liniar dependent.
2. Orice subsistem de vectori liniar independent este de asemenea un sistem liniar independent.

Demonstraţie. Fie $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ un sistem finit de vectori din V şi să presupunem că $S_1 = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\} \subset S$, $k < n$ este o submulţime de vectori liniar dependent. Deci există scalarii α_i, $i = \overline{1,k}$, astfel încât cel puţin unul este nenul şi are loc

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

Deducem că există scalarii α_i, $i = \overline{1,k}$, astfel încât cel puţin unul este nenul şi are loc

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k + 0\vec{v}_{k+1} + \cdots + 0\vec{v}_n = \vec{0}$$

ceea ce înseamnă că sistemul S este liniar dependent.

A doua afirmaţie se obţine din prima prin reducere la absurd. ■

Având în vedere că sistemul $S = \{\vec{0}\}$ este liniar dependent obţinem

Propoziţia 33 *Orice sistem S care conţine vectorul nul este liniar dependent deoarece are loc $0\vec{v}_1 + \cdots + 0\vec{v}_n + \alpha\vec{0} = \vec{0}$, $\forall \alpha \in K$.*

Vom prezenta în continuare noţiunea de bază într-un spaţiu vectorial.

Definiţia 34 *Vom spune că submulţimea (cu un număr finit de vectori) $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \subset V$ este un* ***sistem de generatori*** *al lui V dacă subspaţiul vectorial generat de S coincide cu V, adică*

$$[S] = V$$

(ceea ce înseamnă că orice element vector din V se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectori din S).

Definiţia 35 *Sistemul finit de vectori $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ se numeşte bază în K–spaţiul vectorial V dacă satisface condiţiile:*
(a) B este sistem liniar independent.
(b) B este un sistem de generatori al lui V.

Exemplul 36 *În spaţiul vectorial aritmetic K^n sistemul de vectori*

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)\,, \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, ..., 1)\}$$

(1 şi 0 sunt elementele neutre în câmpul K) este bază în K^n deoarece este liniar independent şi este şi sistem de generatori al lui K^n. Această bază se numeşte ***bază canonică****.*

Într-adevăr, am văzut deja că aceşti vectori sunt liniari independenţi. În continuare arătăm că formează un sistem de generatori pentru K^n. Fie $\vec{x} \in K^n$ şi deci $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, unde $x_i \in K$, $i = \overline{1,n}$. Prin urmare

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, x_n) \\ &= x_1\,(1, 0, \ldots, 0) + x_2\,(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n\,(0, 0, \ldots, 1) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n\,. \end{aligned}$$

Exemplul 37 *În particular, în spaţiul vectorial aritmetic* $\mathbb{R}^n$ *sistemul de vectori*

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), ..., \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$$

este bază în $\mathbb{R}^n$ *deoarece este liniar independent şi este şi sistem de generatori al lui* $\mathbb{R}^n$*. Această bază se numeşte* ***bază canonică****.*

Exemplul 38 *În spaţiul vectorial* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *al matricelor de tip* $(2, 2)$ *cu elemente din* $\mathbb{R}$*, sistemul de vectori matrice*

$$B = \left\{ E_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

este bază în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *deoarece este liniar independent şi este şi sistem de generatori al lui* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*. Această bază se numeşte* ***bază canonică****.*

Exemplul 39 *În spaţiul vectorial* $\mathcal{P}_n(x)$ *al polinoamelor de grad cel mult* n*, polinoamele* $1, x, x^2, \ldots, x^n$ *formează un sistem liniar independent şi este sistem de generatori pentru orice vector (polinom) din* $\mathcal{P}_n(x)$*. Deci* $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ *formează o bază în spaţiul* $\mathcal{P}_n(x)$*.*

Teorema 40 (de caracterizare a bazelor) *Condiţia necesară şi suficientă ca submulţimea finită* $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ *să fie bază în* K*–spaţiul vectorial* V*, este ca orice vector* $\vec{x} \in V$ *să se descompună în mod unic după vectorii lui* B*, adică*

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n \tag{4}$$

unde scalarii $x_i \in K$*,* $i = \overline{1, n}$ *sunt unic determinaţi.*

Demonstraţie. *Necesitatea ("*$\Rightarrow$*")* Să presupunem că sistemul $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ este bază în K–spaţiul vectorial V, deci (având în vedere că orice bază este un sistem de generatori) obţinem că $\vec{x}$ are o descompunere de tipul (4). Să presupunem prin reducere la absurd că descompunerea nu este unică deci are loc

$$\vec{x} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n$$

Prin scădere obţinem

$$\vec{0} = (x_1 - y_1)\vec{e}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\vec{e}_n$$

Sistemul de vectori B fiind liniar independent deducem că scalarii $(x_i - y_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$ adică

$$x_i = y_i,\ i = \overline{1, n},$$

deci cele două descompuneri coincid.

Suficienţa ("$\Leftarrow$*")* Să presupunem că orice vector $\vec{x} \in V$ se descompune în mod unic după vectorii lui B. Deci B este un sistem de generatori pentru V, adică $[B] = V$. A mai rămas de demonstrat că B este liniar independent. Să presupunem că avem o combinaţie liniară de tipul

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0} \tag{5}$$

Pe de altă parte ecuaţia de mai sus reprezintă şi o descompunere a lui $\vec{0}$ după baza B. Având în vedere că, evident,

$$0\vec{v}_1 + \cdots + 0\vec{v}_n = \vec{0}$$

şi că descompunere lui $\vec{0}$ este unică deducem că

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

■

Definiţia 41 *Scalarii* $x_i \in K$*,* $i = \overline{1, n}$ *(din teorema precedentă) ce dau descompunerea unică a lui* $\vec{x}$ *în baza* $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ *se numesc* ***coordonatele vectorului*** $\vec{x}$ *în baza* $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$*.*

Teorema 42 *Dacă $V \neq \{\vec{0}\}$ este un K–spaţiu finit generat atunci oricare două baze ale lui V au acelaşi număr de vectori.*

(fără demonstraţie).

Definiţia 43 *Dacă V este un K–spaţiu finit generat atunci numărul de elemente dintr-o bază a lui V se va numi dimensiunea lui V notată cu $\dim_K V$ sau, mai scurt (dacă nu este pericol de confuzie), $\dim V$.*

Remarca 44 *Dacă V este un K–spaţiu vectorial de dimensiune n, atunci vom mai nota spaţiul şi cu V_n (notaţia va indica astfel şi dimensiunea).*

Un rezultat util în practică este următorul

Propoziţia 45 *Fie V este un K–spaţiu vectorial de dimensiune n. Atunci:*

(a) Orice sistem S format din n vectori liniari independenţi este o bază în V.

(b) Orice sistem S format din n vectori care constitue un sistem de generatori al lui V este o bază în V.

Teorema 46 (de completare a bazei) *Fie V este un K–spaţiu vectorial de dimensiune n şi fie $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\} \subset V$, unde $k < n$, un sistem de vectori liniar independenţi din V. Atunci există vectorii $\vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \ldots, \vec{v}_n \in V$ astfel încât submulţimea $B = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \ldots, \vec{v}_n\}$ este o bază a spaţiului vectorial V.*

(fără demonstraţie).

Definiţia 47 *Fie S un sistem de vectori din spaţiul vectorial V. Se numeşte* ***rangul sistemului de vectori*** *S dimensiunea subspaţiului vectorial generat de S.*

Teorema 48 *Toate sistemele de vectori din V obţinute din S prin următoarele transformări (numite şi transformări elementare):*

1. schimbarea ordinii vectorilor;

2. înmulţirea unui vector cu un scalar nenul;

1. adunarea la un vector din S a unui alt vector din S înmulţit cu un scalar,

au acelaşi rang cu S.

(fără demonstraţie).

Teorema 49 *Rangul unui sistem finit de vectori este egal cu numărul maxim de vectori liniar independenţi ai sistemului.*

(fără demonstraţie).

În cazul particular al spaţiului vectorial aritmetic K^n, dacă avem un număr finit de vectori, atunci, punându-i pe coloană, putem forma cu ei o matrice iar problema independenţei lor liniare se reduce la a determina rangul acelei matrice. Astfel are loc rezultatul următor:

Teorema 50 ***Rangul unei matrice este egal cu numărul maxim al vectorilor coloană (sau linie, evident) liniar independenţi.***

Demonstraţie. Într-adevăr, fie $A = \begin{bmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \cdots & s_n^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & \cdots & s_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1^m & s_2^m & \cdots & s_n^m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice dată şi vectorii coloană ai acesteia notaţi cu

$$v_1 = \begin{bmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \\ \cdots \\ s_1^m \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} s_2^1 \\ s_2^2 \\ \cdots \\ s_2^m \end{bmatrix}, \ \ldots, \ v_n = \begin{bmatrix} s_n^1 \\ s_n^2 \\ \cdots \\ s_n^m \end{bmatrix}.$$

Să presupunem că vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_r$, cu $r \leq n$, sunt liniar independenţi (presupunem, fără a restrânge generalitatea că sunt independenţi primii r vectori), deci din orice combinaţie liniară a lor

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r = 0 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$$

rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$.

Evident, vectorii $v_i \in K^m$, $i = \overline{1,r}$, deci numărul maxim de vectori liniar independenţi este m, ceea ce înseamnă că trebuie să luăm $r \leq m$.

Deci se obţine sistemul

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \\ \cdots \\ s_1^m \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} s_2^1 \\ s_2^2 \\ \cdots \\ s_2^m \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_r \begin{bmatrix} s_r^1 \\ s_r^2 \\ \cdots \\ s_r^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 s_1^1 \\ \alpha_1 s_1^2 \\ \cdots \\ \alpha_1 s_1^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 s_2^1 \\ \alpha_2 s_2^2 \\ \cdots \\ \alpha_2 s_2^m \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \alpha_r s_r^1 \\ \alpha_r s_r^2 \\ \cdots \\ \alpha_r s_r^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1^1 \alpha_1 + s_2^1 \alpha_2 + \cdots + s_r^1 \alpha_r = 0 \\ s_1^2 \alpha_1 + s_2^2 \alpha_2 + \cdots + s_r^2 \alpha_r = 0 \\ \vdots \\ s_1^m \alpha_1 + s_2^m \alpha_2 + \cdots + s_r^m \alpha_r = 0 \end{cases}$$

care este omogen de tip (m, r) şi care trebuie să admită doar soluţia banală. Prin urmare există un determinant principal de rang r care să fie nenul. Acest determinant principal este exact cel care dă rangul matricei iniţiale A, deci $\operatorname{rang} A = r$.

Invers, să presupunem acum că $\operatorname{rang} A = r$ (deci, evident, $r \leq \min(m,n)$) şi să arătăm că numărul maxim de vectori liniar independenţi este tot r. Fie astfel, o combinaţia liniară de $(r+1)$ vectori

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r + \alpha_p v_p = 0 \in \mathcal{M}_{m,1}(K),$$

unde p este un indice oarecare astfel încât $r+1 \leq p \leq n$. Prin urmare obţinem sistemul

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \\ \dots \\ s_1^m \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} s_2^1 \\ s_2^2 \\ \dots \\ s_2^m \end{bmatrix} + \dots + \alpha_r \begin{bmatrix} s_r^1 \\ s_r^2 \\ \dots \\ s_r^m \end{bmatrix} + \alpha_p \begin{bmatrix} s_p^1 \\ s_p^2 \\ \dots \\ s_p^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1^1\alpha_1 + s_2^1\alpha_2 + \dots + s_r^1\alpha_r + s_p^1\alpha_p = 0 \\ s_1^2\alpha_1 + s_2^2\alpha_2 + \dots + s_r^2\alpha_r + s_p^1\alpha_p = 0 \\ \vdots \\ s_1^m\alpha_1 + s_2^m\alpha_2 + \dots + s_r^m\alpha_r + s_p^1\alpha_p = 0 \end{cases}$$

care este un sistem omogen de tipul $(m, r+1)$. Rangul matricei sistemului este r (este exact rangul matricei iniţiale A) şi deci mai mic decât numărul de necunoscute. Prin urmare sistemul nu admite soluţie unică, deci admite şi soluţii nenule. Aceasta înseamnă că există cel puţin un coeficient α_i nenul, deci vectorii $\{v_1, v_2, \dots, v_r, v_p\}$ sunt liniar dependenţi. ■

1.3 Schimbarea bazelor şi schimbarea coordonatelor unui vector într-un K–spaţiu

Fie V este un K–spaţiu vectorial de dimensiune n şi $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, $\tilde{B} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\}$ două baze diferite ale aceluiaşi spaţiu V. A determina schimbarea de baze înseamnă a descompune vectorii bazei $\tilde{B}$ după baza B, adică a obţine relaţii de tipul

$$\vec{f}_j = \sum\nolimits_{i=1}^{n} s_j^i \, \vec{e}_i \, , \; j = \overline{1,n} \tag{6}$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = s_1^1 \, \vec{e}_1 + s_1^2 \, \vec{e}_2 + \dots + s_1^n \, \vec{e}_n \\ \vec{f}_2 = s_2^1 \, \vec{e}_1 + s_2^2 \, \vec{e}_2 + \dots + s_2^n \, \vec{e}_n \\ \vdots \\ \vec{f}_n = s_n^1 \, \vec{e}_1 + s_n^2 \, \vec{e}_2 + \dots + s_n^n \, \vec{e}_n \, . \end{cases}$$

Definim matricea $S := (s_j^i)_{i,j=\overline{1,n}}$ ale cărei **coloane sunt formate din coordonatele vectorilor lui $\tilde{B}$ în baza B**. Deci

$$S = \begin{bmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \cdots & s_n^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & \cdots & s_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^n & s_2^n & \cdots & s_n^n \end{bmatrix} .$$

Matricea S se numeşte **matricea schimbării de baze** de la B la baza $\tilde{B}$ şi vom nota $B \xrightarrow{S} \tilde{B}$.

Teorema 51 *Dacă avem $B \xrightarrow{S} \tilde{B}$ atunci matricea S este inversabilă şi are loc $\tilde{B} \xrightarrow{S^{-1}} B$, unde S^{-1} este inversa matricei S.*
(fără demonstraţie).

Considerăm acum un vector oarecare $\vec{x} \in V$. Atunci vectorul $\vec{x}$ are două descompuneri în cele două baze:

$$\vec{x} = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \, \vec{e}_i \quad \text{şi} \quad \vec{x} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} y_j \, \vec{f}_j \, . \tag{7}$$

Este important determinarea legăturii dintre coordonatele x_i, $i = \overline{1,n}$ ale vectorului în baza B şi coordonatele y_j, $j = \overline{1,n}$ ale vectorului în baza $\tilde{B}$.

Din (6) obţinem

$$\vec{x} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} y_j \, \vec{f}_j = \sum\nolimits_{j=1}^{n} y_j \, \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} s_j^i \, \vec{e}_i \right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} s_j^i \, y_j \right) \vec{e}_i$$

Din unicitatea scrierii vectorului $\vec{x}$ în baza B vom obţine identificarea coeficienţilor:

$$x_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} s_j^i \, y_j \, , \; i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Introducând matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în cele două baze

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ şi } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

putem rescrie (8) sub formă matriceală şi obţinem

Propoziţia 52 *Fie $\vec{x} \in V$ un vector care are descompunerea (7) în raport cu cele două baze B şi $\tilde{B}$. Atunci legătura între coordonatele vectorului $\vec{x}$ din cele două baze este dată de relaţia:*

$$X = S \cdot Y \Leftrightarrow Y = S^{-1} \cdot X \, , \tag{9}$$

*ceea ce constituie **formula matriceală de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze**.*

Exerciţiul 53 *Se dă sistemul de vectori $B = \{\vec{v}_1 = (1,2,1) \, , \vec{v}_2 = (2,3,3) \, , \vec{v}_3 = (3,7,1)\}$.*
a) Să se arate că B este o bază în $\mathbb{R}^3$.
b) Să se scrie matricea schimbării de bază de la baza canonică la B.
c) Să se afle coordonatele vectorului $\vec{x} = (3,-1,2)$ în baza B.

a) Având în vedere că $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ aplicăm Propoziţiei (45) şi deducem că este suficient ca B să fie liniar independent (pentru ca să fie bază). Liniara independenţă a vectorilor lui B se va studia ca în exemplele precedente (de exemplu, scriem vectorii pe coloană şi formăm o matrice; apoi determină $\operatorname{rang} A = 3$).
b) Trebuie determinate mai întâi coordonatele vectorilor bazei B în baza canonică. Avem

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \; \vec{v}_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \; \vec{v}_3 = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \, .$$

Deci matricea schimbării de baze este dată coordonatele de mai sus puse pe coloană:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} .$$

În acest caz $B_c \xrightarrow{S} B$ sau echivalent $B \xrightarrow{S^{-1}} B_c$.

c) Vectorul $\vec{x} = (3,-1,2)$ are deci în baza canonică

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Formula matriceală de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze este $X_B = S^{-1} \cdot X_{B_c}$*, unde* $X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ *este matricea coloană a coordonatelor lui* $\vec{x}$ *în baza* B*,* $X_{B_c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *este matricea coloană a coordonatelor lui* $\vec{x}$ *în baza canonică* B_c *iar*

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \text{calcule.....} = \begin{bmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Deci

$$X_B = \begin{bmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -51 \\ 15 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Exerciţiul 54 *Se consideră bazele* $B_1 = \{\vec{u}_1 = (1,1,1), \vec{u}_2 = (2,-1,1), \vec{u}_3 = (-1,1,1)\}$ *şi* $B_2 = \{\vec{v}_1 = (1,0,1), \vec{v}_2 = (0,1$
precum şi vectorul $\vec{x} = (1,-1,0)$*.*
$a)$ *Să se scrie matricea schimbării de baze de la* B_1 *la* B_2*.*
$b)$ *Să se afle coordonatele vectorului* $\vec{x}$ *în cele două baze.*

Exerciţiul 55 $a)$ *Trebuie determinate mai întâi coordonatele vectorilor bazei* B_2 *în baza iniţială* B_1*. Vom determina elementele* s^i_j*,* $i, j = \overline{1,3}$ *astfel încât*

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 = a'\vec{u}_1 + b'\vec{u}_2 + c'\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 = a''\vec{u}_1 + b''\vec{u}_2 + c''\vec{u}_3 \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} (1,0,1) = (a + 2b - c, a - b + c, a + b + c) \\ (0,1,1) = (a' + 2b' - c', a' - b' + c', a' + b' + c') \\ (1,1,0) = (a'' + 2b'' - c'', a'' - b'' + c'', a'' + b'' + c'') \end{cases}$$

ceea ce înseamnă a rezolva următoarele trei sisteme liniare neomogene:

$$\begin{cases} a + 2b - c = 1 \\ a - b + c = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}, \begin{cases} a' + 2b' - c' = 0 \\ a' - b' + c' = 1 \\ a' + b' + c' = 1 \end{cases}, \begin{cases} a'' + 2b'' - c'' = 1 \\ a'' - b'' + c'' = 1 \\ a'' + b'' + c'' = 0 \end{cases}.$$

Vom obţine soluţiile

$$\begin{aligned} &a = 1/4,\ b = 1/2,\ c = 1/4 \\ &a' = 1/2,\ b' = 0,\ c' = 1/2 \\ &a'' = 5/4,\ b'' = -1/2,\ c'' = -3/4, \end{aligned}$$

adică matricea S *este dată de (coordonatele puse pe coloane)*

$$S = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 5/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{bmatrix}.$$

Remarca 56 ***Există şi o metodă alternativă de a găsi matricea de schimbare de baze, când nici una dintre cele două baze nu sunt cele canonice****. Având în vedere că este uşor de citit matricea de trecere de la baza canonică, fie*

$$B_c \xrightarrow{S_1} B_1 \quad \text{şi} \quad B_c \xrightarrow{S_2} B_2,$$

unde S_1 şi S_2 sunt:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fiind ambele baze, avem că S_1 şi S_2 sunt nesingulare şi deci

$$B_1 \xrightarrow{S_1^{-1}} B_c \quad \text{şi} \quad B_c \xrightarrow{S_2} B_2.$$

Acum putem scrie direct matricea S de schimbare de bază de la B_1 la B_2 :

$$B_1 \xrightarrow{S_1^{-1}S_2} B_2,$$

adică $S = S_1^{-1}S_2$, deci

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 5/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Având în vedere că putem scrie imediat coordonatele vectorului $\vec{x}$ în baza canonică, obţinem că $X_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Scriem acum matricele schimbării de baze S_1, S_2 astfel încât $B_c \xrightarrow{S_1} B_1$, $B_c \xrightarrow{S_2} B_2$:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Deci $X_{B_1} = S_1^{-1} \cdot X_{B_c}$, $X_{B_2} = S_2^{-1} \cdot X_{B_c}$. Se vor calcula şi inversele

$$S_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}, \quad S_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

şi atunci

$$X_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se vor face calculele şi se va obţine

$$\begin{aligned} X_{B_1} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ şi} \\ X_{B_2} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.4 Spaţii euclidiene

Definiţia 57 *Fie V un spaţiu vectorial. Se numeşte* ***produs scalar*** *pe V o funcţie*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

care asociază fiecărei perechi de vectori din V un număr real notat $\langle u,v\rangle$ şi care satisface condiţiile:
(i) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle,\ \forall u,v \in V;$
(ii) $\langle u_1+u_2,v\rangle = \langle u_1,v\rangle + \langle u_2,v\rangle,\ \forall u_1,u_2,v \in V;$
(iii) $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall u,v\in V;$
(iv) $\langle u,u\rangle \geq 0,\ \forall u\in V$ *şi* $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=0.$

Remarca 58 *Din cele patru proprietăţi de mai sus, se mai pot deduce următoarele:*
1. $\langle u,v_1+v_2\rangle = \langle u,v_1\rangle + \langle u,v_2\rangle,\ \forall u,v_1,v_2\in V$
2. $\langle u,\lambda v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall u,v\in V$
3. $\langle 0,v\rangle = \langle v,0\rangle = 0,\ \forall v\in V$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}&\langle u,v_1+v_2\rangle = \langle v_1+v_2,u\rangle = \langle v_1,u\rangle + \langle v_2,u\rangle = \langle u,v_1\rangle + \langle u,v_2\rangle,\\ &\langle u,\lambda v\rangle = \langle\lambda v,u\rangle = \lambda\langle v,u\rangle = \lambda\langle u,v\rangle,\\ &\langle 0,v\rangle = \langle u-u,v\rangle = \langle u,v\rangle - \langle u,v\rangle = 0.\end{aligned}$$

Definiţia 59 *Un spaţiu vectorial înzestrat cu un produs scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se numeşte* ***spaţiu euclidian****.*

Exemplul 60 *Pe spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ definim produsul scalar standard*

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n\,,$$

unde $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$.

Exemplul 61 *Pe spaţiul vectorial al matricelor pătratice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definim produsul scalar*

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}(A^tB),\ \forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exemplul 62 *Pe spaţiul vectorial al funcţiilor continue definite pe $[a,b]$ definim produsul scalar*

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,\ \forall f,g:[a,b]\to\mathbb{R}\ \textit{continue.}$$

Teorema 63 (Cauchy–Schwarz–Buniakovski) *Fie $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. Atunci are loc inegalitatea*

$$|\langle u,v\rangle| \leq \sqrt{\langle u,u\rangle}\cdot\sqrt{\langle v,v\rangle}\,.$$

Demonstraţie. Inegalitatea cerută este echivalentă cu

$$\langle u,v\rangle^2 \leq \langle u,u\rangle\cdot\langle v,v\rangle.$$

Pentru $u=0$ sau $v=0$, inegalitatea devine egalitate.

Dacă $u,v\in V\setminus\{0\}$, considerăm combinaţia liniară $u+\lambda v\in V$, unde $\lambda\in\mathbb{R}$ este un scalar arbitrar. Din proprietăţile produsului scalar avem că

$$\langle u+\lambda v,u+\lambda v\rangle \geq 0,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Aplicând proprietăţile produsului scalar, membrul stâng al inegalităţii devine

$$\begin{aligned}&\langle u+\lambda v,u+\lambda v\rangle = \langle u,u+\lambda v\rangle + \langle\lambda v,u+\lambda v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,\lambda v\rangle + \langle\lambda v,u\rangle + \langle\lambda v,\lambda v\rangle\\ &= \langle u,u\rangle + \lambda\langle u,v\rangle + \lambda\langle v,u\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\lambda\langle u,v\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle\end{aligned}$$

Notând cu $A = \langle v, v\rangle,\ B = \langle u, v\rangle$ şi $C = \langle u, u\rangle$, inegalitatea (10) devine

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cum $A > 0$, inegalitatea de mai sus are loc pentru orice λ real doar dacă discriminantul

$$\Delta = 4B^2 - 4AC \leq 0,$$

deci $B^2 \leq AC$ ceea ce înseamnă că $\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle$. ■

Definiţia 64 *Se numeşte **normă** pe spaţiul vectorial V o funcţie*

$$\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$$

care satisface condiţiile:
(i) $\|v\| \geq 0,\ \forall v \in V$ *şi* $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$;
(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,\ \forall u, v \in V$.

Definiţia 65 *Un spaţiu vectorial înzestrat cu o normă $\| \cdot \|$ se numeşte **spaţiu normat**.*

Teorema 66 *Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. Atunci funcţia*

$$\| \cdot \| : V \to \mathbb{R},\ \|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle},\ \forall v \in V$$

*este o normă pe V, numită **norma euclidiană** indusă de produsul scalar.*

Demonstraţie. Vom arăta că funcţia definită în enunţ satisface axiomele normei. Deoarece $\langle v, v\rangle \geq 0,\ \forall v \in V$, avem că are sens radicalul şi că $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \geq 0$. Mai mult, $\|v\| = 0$ dacă şi numai dacă $\langle v, v\rangle = 0$ ceea ce înseamnă că $v = 0$. Avem şi

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v\rangle} = |\lambda| \|v\|.$$

Pentru a demonstra că $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,\ \forall u, v \in V$, folosim inegalitatea Cauchy–Schwarz–Buniakovski şi proprietăţile produsului scalar. Astfel

$$\begin{aligned}
&\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u + v\rangle + \langle v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \\
&= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} + \|v\|^2 = \\
&= \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2,
\end{aligned}$$

prin urmare $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. ■

Remarca 67 *Din teorema anterioară rezultă că orice spaţiu vectorial euclidian este un spaţiu normat cu norma indusă de produsul scalar.*

Remarca 68 *Într-un spaţiu vetorial normat, inegalitatea Cauchy–Schwarz–Buniakovski se poate rescrie sub forma*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Definiţia 69 *Fie V un spaţiu vectorial euclidian şi $u, v \in V \setminus \{0\}$. Numărul $\theta \in [0, \pi]$ definit prin*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

*se numeşte **unghiul** dintre vectorii u şi v.*

Definiţia 70 *Un vector se numeşte **versor** (sau **vector unitar**) dacă norma sa este 1.*

Remarca 71 *Orice vector $v \in V \setminus \{0\}$ are un vector unitar corespunzător notat cu v^0 şi dat de:*

$$v^0 = \frac{1}{\|v\|} \cdot v.$$

Definiţia 72 *Se numeşte **distanţă** sau **metrică** pe mulţimea nevidă M o funcţie*

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

care satisface condiţiile:
(i) $d(x, y) \geq 0,\ \forall x, y \in M$ *şi* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(ii) $d(x, y) = d(y, x),\ \forall x, y \in M$;
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),\ \forall x, y, z \in M$.

Definiţia 73 *O mulţime M înzestrată cu o distanţă (metrică) d se numeşte **spaţiu metric**.*

Remarca 74 *Orice spaţiu vectorial normat este spaţiu metric cu distanţa euclidiană definită de $d(u, v) = \|u - v\|$.*

Definiţia 75 *Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. Doi vectori $u, v \in V$ se numesc **ortogonali** dacă produsul lor scalar este nul, i.e. $\langle u, v\rangle = 0$.*

Definiţia 76 *Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian şi o mulţime de vectori $U \subset V$. Mulţimea tuturor vectorilor ortogonali pe vectorii din U*

$$U^{\perp} := \{v \in V : \langle u, v\rangle = 0,\ \forall u \in U\}$$

*se numeşte **complementul ortogonal** al lui U şi este un subspaţiu vectorial al lui V.*

Teorema 77 *Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. Dacă vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$ sunt ortogonali doi câte doi, adică*

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0,\ i, j = \overline{1, n}, i \neq j,$$

atunci aceştia sunt liniar independenţi.

Demonstraţie. Considerăm combinaţia liniară

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v_1\rangle = \langle 0, v_1\rangle = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_1\langle v_1, v_1\rangle + \alpha_2\langle v_2, v_1\rangle + \cdots + \alpha_n\langle v_n, v_1\rangle = 0 \Rightarrow \alpha_1\|v_1\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

Înmulţind cu ceilalţi vectori $v_2, \ldots, v_n$ obţinem mod analog $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. ∎

Definiţia 78 *Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian n-dimensional şi o bază $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.*
*1. Baza B se numeşte **ortogonală** dacă $e_1, \ldots, e_n$ sunt ortogonali doi câte doi, i.e.*

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0,\ i, j = \overline{1, n}, i \neq j;$$

*2. Baza B se numeşte **ortonormată** dacă este ortogonală şi toţi vectorii din B au norma 1, i.e.*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases},\ i, j = \overline{1, n}.$$

Teorema 79 (Procedeul de ortonormalizare Gram–Schmidt) *Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian n-dimensional şi o bază $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Atunci se poate construi o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ pornind de la baza B.*

Demonstraţie. Construim mai întâi o bază ortogonală pornind de la baza B, iar apoi considerând versorii corespunzători se obţine baza ortonormată căutată.
Pasul 1. Definim $v_1 = u_1$.
Pasul 2. Definim $v_2 = u_2 + \alpha_{21} v_1$, unde scalarul α_{21} se determină punând condiţia ca v_2 să fie ortogonal pe v_1,

$$0 = \langle v_2, v_1 \rangle = \langle u_2 + \alpha_{21} v_1, v_1 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle + \alpha_{21} \langle v_1, v_1 \rangle,$$

de unde rezultă

$$\alpha_{21} = -\frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}.$$

Pasul 3. Definim $v_3 = u_3 + \alpha_{31} v_1 + \alpha_{32} v_2$, unde scalarii $\alpha_{31},\ \alpha_{32}$ se determină punând condiţia ca v_3 să fie ortogonal pe v_1 şi v_2,

$$0 = \langle v_3, v_1 \rangle = \langle u_3 + \alpha_{31} v_1 + \alpha_{32} v_2, v_1 \rangle = \langle u_3, v_1 \rangle + \alpha_{31} \langle v_1, v_1 \rangle + \alpha_{32} \langle v_2, v_1 \rangle,$$

de unde observând că $\langle v_2, v_1 \rangle = 0$ rezultă $\alpha_{31} = -\dfrac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$.

Apoi

$$0 = \langle v_3, v_2 \rangle = \langle u_3 + \alpha_{31} v_1 + \alpha_{32} v_2, v_2 \rangle = \langle u_3, v_2 \rangle + \alpha_{31} \langle v_1, v_2 \rangle + \alpha_{32} \langle v_2, v_2 \rangle$$

de unde observând că $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ rezultă $\alpha_{32} = -\dfrac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle}$.

După n paşi se obţine baza ortogonală $B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Considerând versorii corespunzători vectorilor din B' se obţine baza ortonormată $B'' = \{e_1, \ldots, e_n\}$, unde $e_i = \dfrac{1}{\|v_i\|} \cdot v_i,\ i = \overline{1,n}$. ■

1.5 Exerciţii

1. Fie G un grup aditiv comutativ şi K un câmp. Are G o structură de spaţiu vectorial faţă de înmulţirea cu scalari definită prin $\alpha x = x$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in G$? Dar dacă este definită prin $\alpha x = 0$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in G$?

2. Se notează cu $\mathcal{F}_D(\mathbb{R})$ mulţimea funcţiilor reale definite pe $D \subset \mathbb{R}$. Pentru orice $f, g \in \mathcal{F}_D(\mathbb{R})$ se definesc operaţiile
$$f \oplus g = fg \quad \text{şi} \quad \alpha \odot f = f^{\alpha},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$
Este $\mathcal{F}_D(\mathbb{R})$ un spaţiu vectorial?

3. Să se arate că mulţimea $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ cu operaţiile definite de
$$x \oplus y = xy \quad \text{şi} \quad \alpha \odot x = x^{\alpha},\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in V,$$
este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

   Rezolvare:

   Se observă imediat că operaţiile sunt cu valori în V, adică $\oplus : V \times V \to V$ şi $\odot : K \times V \to V$ (deci pentru orice $x, y \in V$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ avem că $x \oplus y \in V$ şi că $\alpha \odot x \in V$). De asemenea este uşor de verificat că $(V, \oplus)$ este un grup comutativ (are loc asociativitatea, comutativitatea, existenţa vectorului nul şi a opusului oricărui vector din V).

   Să verificăm şi celelalte proprietăţi
$$\begin{aligned}
&\alpha \odot (\beta \odot x) = \alpha \odot \left(x^{\beta}\right) = \left(x^{\beta}\right)^{\alpha} = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \odot x,\\
&(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} = \alpha \odot \vec{x} \oplus \beta \odot \vec{x},\\
&\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = \alpha \odot \vec{x} \oplus \alpha \odot \vec{y},\\
&1 \odot x = x^{1} = x,
\end{aligned}$$
pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi orice $x, y \in V$.

4. Să se verifice dacă următoarea mulţime $\left\{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n : a_0 \neq 0, a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\right\}$ este spaţiu vectorial.

5. Se consideră mulţimea tuturor perechilor de numere reale strict pozitive $V = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ şi se definesc operaţiile
$$x + y = (x_1 y_1, x_2 y_2) \quad \text{şi} \quad \alpha x = \left(x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha}\right),\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in V.$$
Să se arate că mulţimea dată este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

6. Să se verifice dacă următoarele perechi de operaţii definesc pe $\mathbb{R}^2$ o structură de spaţiu vectorial:
$$\begin{aligned}
&(a)\quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0), && \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2),\ \forall \alpha, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\\
&(b)\quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, y_2), && \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2),\ \forall \alpha, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\\
&(c)\quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), && \alpha(x_1, x_2) = (0, \alpha x_2),\ \forall \alpha, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\\
&(d)\quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), && \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1 - \beta x_2, \beta x_1 + \alpha x_2),\\
& && \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

7. Să se arate că mulţimea tuturor şirurilor convergente de numere reale formează un paţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

8. Să se arate că mulţimea tuturor funcţiilor continue definite pe $[a, b]$ formează un paţiu vectorial peste $\mathbb{R}$. Idem pentru funcţiile derivabile pe (a, b).

9. Este mulţimea $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 4x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$? Dar $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$?

10. Fie $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Să se precizeze care din submulţimile determinate de condiţiile de mai jos formează un spaţiu vectorial şi care nu.

    (a) toţi vectorii astfel încât $x_1 = 0$;

    (b) toţi vectorii astfel încât $x_1 = x_2$;

    (c) toţi vectorii astfel încât $x_1 x_2 = 0$;

    (d) toţi vectorii astfel încât $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$;

    (e) toţi vectorii astfel încât $x_1 = 0,\ x_2 = 0$;

    (f) toţi vectorii astfel încât $x_1 + x_2 = 0$.

11. Să se precizeze care din submulţimile de mai jos formează un spaţiu vectorial şi care nu.

    (a) $S_1 = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

    (b) $S_2 = \{(x_1, x_2, 1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

    (c) $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$;

    (d) $S_4 = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

    (e) $S_5 = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 + 3x_2 = 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$;

    (f) $S_6 = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 + 3x_2 = 1, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$;

    (g) $S_7 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 x_2 = 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$;

    (h) $S_8 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 > 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

    Rezolvare:

    Trebuie să verificăm dacă prin orice de combinaţie liniară cu elemente din submulţime, părăsim sau nu submulţimea. Fie, arbitrari, dar fixaţi, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $x, y \in S_i$, $i = \overline{1,8}$, şi să vedem dacă $\alpha x + \beta y$ rămâne sau nu în S_i, $i = \overline{1,8}$.

    Se va obţine că sunt subspaţii vectoriale S_1, S_4 şi S_5.

12. Să se arate că mulţimea matricelor de forma $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

13. Să se arate că mulţimea matricelor de forma $\begin{bmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

14. Dintr-un spaţiu vectorial se exclude un vector $\vec{v}$. Mulţimea rămasă poate fi spaţiu vectorial?

15. Care dintre următoarele submulţimi sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

    (a) $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

    (b) $S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

    (c) $S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

(d) $S_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R}, c = b - a \right\}$;

(e) $S_5 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ 3a & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$?

Rezolvare:

Trebuie să verificăm că dacă prin orice de combinaţie liniară cu elemente din submulţime, părăsim sau nu submulţimea.

(a) Calculăm, pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $A, A' \in S_1$,

$$\alpha A + \beta A' = \alpha \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & a' \\ b' & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a + \beta a' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \end{bmatrix} \in S_1,$$

deci $S_1 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Calculăm, pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $A, A' \in S_2$,

$$\alpha A + \beta A' = \alpha \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & a' \\ b' & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \alpha a + \beta a' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \end{bmatrix} \notin S_2,$$

deoarece $2 \neq 1$, deci $S_2 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nu este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Calculăm, pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $A, A' \in S_3$,

$$\alpha A + \beta A' = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \end{bmatrix} \in S_3,$$

deci $S_3 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(d) Calculăm, pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $A, A' \in S_4$,

$$\alpha A + \beta A' = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & 0 \end{bmatrix} \in S_4,$$

deoarece, evident, $\alpha c + \beta c' = \alpha(b - a) + \beta(b' - a') = (\alpha b + \beta b') - (\alpha a + \beta a')$, şi deci $S_4 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(e) Calculăm, pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $A, A' \in S_5$,

$$\alpha A + \beta A' = \alpha \begin{bmatrix} a & 2a \\ 3a & b \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a' & 2a' \\ 3a' & b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta a' & 2(\alpha a + \beta a') \\ 3(\alpha a + \beta a') & \alpha b + \beta b' \end{bmatrix} \in S_5,$$

deci $S_5 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

16. Să se arate că următorii vectori sunt liniar dependenţi şi să se afle relaţia de dependenţă: $\vec{v}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 3)$, $\vec{v}_3 = (2, -1, 1)$ din $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare:

Fie combinaţia liniară

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 (0, 1, 1) + \alpha_2 (1, 2, 3) + \alpha_3 (2, -1, 1) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (0, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, 2\alpha_2, 3\alpha_2) + (2\alpha_3, -\alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Calculăm $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ şi $\operatorname{rang} A = 2$, deci sistemul omogen este compatibil dar nedeterminat. Rezolvând sistemul format cu primele două ecuaţii şi primele două necunoscute obţinem soluţia $(5\alpha_3, -2\alpha_3, \alpha_3)$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Luând, în particular, $\alpha_3 = 1$ se obţine soluţia $(5, -2, 1)$, deci are loc relaţia de dependenţă

$$5\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0},$$

ceea ce înseamnă că vectorii daţi sunt liniar dependenţi.

Să menţionăm, vezi Teorema 50, că **rangul matricei formată cu vectorii puşi pe coloană este exact numărul de vectori coloană liniari independenţi**. În cazul nostru numărul de vectori linar independenţi este 2.

17. Să se studieze dependenţa liniară a următorilor vectori: $\vec{v}_1 = (1, -1, 2)$, $\vec{v}_2 = (-1, 3, -2)$, $\vec{v}_3 = (5, -11, 10)$.

Rezolvare:

Să considerăm combinaţia liniară

$$\begin{aligned} &\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha(1, -1, 2) + \beta(-1, 3, -2) + \gamma(5, -11, 10) = (0, 0, 0) \\ &= (\alpha, -\alpha, 2\alpha) + (-\beta, 3\beta, -2\beta) + (5\gamma, -11\gamma, 10\gamma) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 5\gamma = 0 \\ -\alpha + 3\beta - 11\gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 10\gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Determinantul matricii sistemului este $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -11 \\ 2 & -2 & -10 \end{vmatrix} = 0$, prin urmare $\operatorname{rang} A < 3$, iar $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, deci rangul $\operatorname{rang} A = 2$. Sistemul de mai sus are două necunoscute principale, α şi β, şi o necunoscută secundară γ şi este deci compatibil nedeterminat (admite o infinitate de soluţii) cu soluţia $\alpha = -2\gamma$, $\beta = 3\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$. În acest caz vectorii daţi sunt liniar dependenţi şi are loc relaţia

$$(-2\gamma) \cdot \vec{v}_1 + 3\gamma \cdot \vec{v}_2 + \gamma \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}, \ \forall \gamma \in \mathbb{R}$$

În particular pentru $\gamma = 1$ obţin relaţia de dependenţă $-2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$.

18. Să se studieze dependenţa liniară a următorilor vectori:

(a) $\vec{v}_1 = (1, 2, -1, 1, -2)$, $\vec{v}_2 = (1, 3, 2, -1, -1)$, $\vec{v}_3 = (0, 1, 4, 2, 0)$, $\vec{v}_4 = (2, 4, -3, -2, -3)$ din $\mathbb{R}^5$;

(b) $\vec{v}_1 = (1, -1, 2)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 3)$, $\vec{v}_3 = (2, 1, 1)$ din $\mathbb{R}^3$;

(c) $p_1(x) = 2x^2 + x + 3$, $p_2(x) = x^2 + 5x - 3$, $p_3(x) = 3x^2 - x + 7$ din $\mathcal{P}_2(x)$;

(d) $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Rezolvare:

(a) Fie combinaţia liniară

$$\begin{aligned}&\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\alpha_3\vec{v}_3+\alpha_4\vec{v}_4=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow \alpha_1(1,2,-1,1,-2)+\alpha_2(1,3,2,-1,-1)+\alpha_3(0,1,4,2,0)+\alpha_4(2,4,-3,-2,-3)=\vec{0}\end{aligned}$$

ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_4=0\\ 2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3+4\alpha_4=0\\ -\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3-3\alpha_4=0\\ \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4=0\\ -2\alpha_1-\alpha_2-3\alpha_4=0.\end{cases}$$

Determinăm $\operatorname{rang} A=3$ şi deci sistemul omogen este compatibil dar nedeterminat. Rezolvând sistemul format cu primele trei ecuaţii şi primele trei necunoscute obţinem soluţia $(-\alpha_4,-\alpha_4,\alpha_4,\alpha_4)$, $\alpha_4\in\mathbb{R}$. Luând, în particular, $\alpha_4=-1$ se obţine soluţia $(1,1,-1,-1)$, deci are loc relaţia de dependenţă

$$\vec{v}_1+\vec{v}_2-\vec{v}_3-\vec{v}_4=\vec{0},$$

ceea ce înseamnă că vectorii daţi sunt liniar dependenţi.

(b) Fie combinaţia liniară

$$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\alpha_3\vec{v}_3=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha_1(1,-1,2)+\alpha_2(1,0,3)+\alpha_3(2,1,1)=\vec{0}$$

ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0\\ -\alpha_1+\alpha_3=0\\ 2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0.\end{cases}$$

Determinăm $\operatorname{rang} A=3$ şi deci sistemul omogen este compatibil şi unic determinat, deci soluţia banală este unica, adică $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$ ceea ce înseamnă că vectorii daţi sunt liniar independenţi.

(c) Fie combinaţia liniară

$$\alpha_1p_1(x)+\alpha_2p_2(x)+\alpha_3p_3(x)=0\Leftrightarrow(2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3)x^2+(\alpha_1+5\alpha_2-\alpha_3)x+(3\alpha_1-3\alpha_2+7\alpha_3)=0$$

ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0\\ \alpha_1+5\alpha_2-\alpha_3=0\\ 3\alpha_1-3\alpha_2+7\alpha_3=0.\end{cases}$$

Calculăm $\det A=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&5&-1\\3&-3&7\end{vmatrix}=0$ şi $\operatorname{rang} A=2$, deci sistemul omogen este compatibil dar nedeterminat. Rezolvând sistemul format cu primele două ecuaţii şi primele două necunoscute obţinem soluţia $\left(-\frac{16}{9}\alpha_3,\frac{5}{9}\alpha_3,\alpha_3\right)$, $\alpha_3\in\mathbb{R}$. Luând, în particular, $\alpha_3=-9$ se obţine soluţia $(16,-5,-9)$, deci are loc relaţia de dependenţă

$$16p_1(x)-5p_2(x)-9p_3(x)=0,$$

ceea ce înseamnă că vectorii daţi sunt liniar dependenţi.

(d) Fie combinaţia liniară

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Determinăm $\operatorname{rang} A = 3$ şi deci sistemul omogen este compatibil şi unic determinat, deci soluţia banală este unica, adică $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$ ceea ce înseamnă că vectorii daţi sunt liniar independenţi.

19. Să se studieze după valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ dependenţa liniară a sistemului de vectori $\{\vec{v}_1 = (1, 2, 3), \ \vec{v}_2 = (4, 5, 6), \ \vec{v}_3 = (7, 8, m)\}$.

Rezolvare:

Să considerăm combinaţia liniară

$$\alpha (1, 2, 3) + \beta (4, 5, 6) + \gamma (7, 8, m) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta + 7\gamma = 0 \\ 2\alpha + 5\beta + 8\gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\beta + m\gamma = 0 \end{cases}$$

Determinantul matricii sistemului este $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & m \end{vmatrix} = m - 9$. Dacă $m \neq 9$ obţinem rangul $\operatorname{rang} A = 3$ deci sistemul de mai sus este compatibil unic determinat cu soluţia banală ca unică soluţie $\alpha = \beta = \gamma = 0$. În acest caz vectorii daţi sunt liniar independenţi.

Dacă $m = 9$ atunci $\operatorname{rang} A < 3$ şi $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ deci $\operatorname{rang} A = 2$, adică sistemul de mai sus are două necunoscute principale α şi β, şi o necunoscută secundară γ şi este deci compatibil nedeterminat cu soluţia $\alpha = \gamma$, $\beta = -2\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Atunci are loc relaţia

$$\gamma \cdot \vec{v}_1 - 2\gamma \cdot \vec{v}_2 + \gamma \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}, \ \forall \gamma \in \mathbb{R}.$$

În particular pentru $\gamma = 1$ obţin relaţia de dependenţă

$$\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}.$$

20. Să se arate că următorii vectori sunt liniar dependenţi şi să se afle relaţia de dependenţă:

(a) $\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, -1, 1), \vec{v}_3 = (-1, 3, -1)$ din $\mathbb{R}^3$;

(b) $\vec{v}_1 = (1, 2, 5), \vec{v}_2 = (5, 3, 1), \vec{v}_3 = (-15, -2, 21)$ din $\mathbb{R}^3$;

(c) $p_1(x) = x^2 + 5$, $p_2(x) = x^2 - 4x + 3$, $p_3(x) = x^2 + 16x + 13$ din $\mathcal{P}_2(x)$;

(d) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -8 & 5 & -11 \end{bmatrix}$ din $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

21. Să se arate că următorii vectori sunt liniar independenţi:

(a) $\vec{v}_1 = (5,3,1)\,,\, \vec{v}_2 = (1,1,1)\,,\, \vec{v}_3 = (1,4,2)$ din $\mathbb{R}^3$;

(b) $p_1(x) = x^2 - 4x + 3,\, p_2(x) = 5x - 4,\, p_3(x) = x^2 + x + 1$ din $\mathcal{P}_2(x)$;

(d) $E_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\, E_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\, E_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\, E_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

22. Să se afle numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, unde $\vec{v}_1 = (1,-1,1)\,,\, \vec{v}_2 = (2,-1,3)\,,\, \vec{v}_3 = (1,3,5),\, \vec{v}_4 = (3,1,7)$.

Rezolvare:

Conform Teoremei 50 rangul matricei formată cu vectorii puşi pe coloană este exact numărul de vectori coloană liniari independenţi. În cazul nostru rangul matricei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ este 2, deci numărul maxim de vectori liniar independenţi din S este 2.

Să se găsească, în plus, relaţia de dependenţă dintre primii trei vectori.

23. Să se afle numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, unde $\vec{v}_1 = (2,1,-1)\,,\, \vec{v}_2 = (1,2,1)\,,\, \vec{v}_3 = (3,0,-3),\, \vec{v}_4 = (1,1,0)$.

Rezolvare:

Conform Teoremei 50 rangul matricei formată cu vectorii puşi pe coloană este exact numărul de vectori coloană liniari independenţi. În cazul nostru rangul matricei $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ este 2, deci numărul maxim de vectori liniar independenţi din S este 2.

Să se găsească, în plus, relaţia de dependenţă dintre primii trei vectori.

24. În $\mathbb{R}^4$ se consideră vectorii $\vec{v}_1 = (1,0,2,-1)$, $\vec{v}_2 = (3,1,-1,0)$ şi $\vec{v}_3 = (2,-2,3,1)$. Să se precizeze care este subspaţiul vectorial generat de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ şi $\vec{v}_3$.

Rezolvare:

Conform Teoremei 50 rangul matricei formată cu vectorii puşi pe coloană este exact numărul de vectori coloană liniari independenţi. Iar **dimensiunea subspaţiului generat de vectorii daţi este egală cu numărul maxim de vectori liniar independenţi ai sistemului dat**. În cazul nostru rangul matricei $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ este 3, deci numărul maxim de vectori liniar independenţi dintre cei daţi este 3. Prin urmare dimensiunea subspaţiului generat de cei trei vectori este 3.

25. În $\mathbb{R}^4$ se consideră vectorii $\vec{v}_1 = (2,-1,3,5)\,,\, \vec{v}_2 = (1,3,-2,4)$. Să se arate că $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ sunt liniar independenţi şi să se precizeze care este subspaţiul vectorial generat de $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$. Vectorul $\vec{v} = (-1,11,-12,2)$ aparţine acestui subspaţiu?

Rezolvare:

Conform Teoremei 50 rangul matricei formată cu vectorii puşi pe coloană este exact numărul de vectori coloană liniari independenţi. Iar dimensiunea subspaţiului generat de vectorii daţi este egală cu numărul maxim de vectori liniar independenţi ai sistemului dat. În cazul nostru rangul matricei $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ este 2, deci numărul maxim de vectori liniar independenţi dintre cei daţi este 2. Prin urmare dimensiunea subspaţiului generat de cei trei vectori este 2. Subspaţiul generat de vectorii $\vec{v}_1$şi $\vec{v}_2$ este, prin definiţie,

$$\{\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha\,(2, -1, 3, 5) + \beta\,(1, 3, -2, 4) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(2\alpha + \beta, -\alpha + 3\beta, 3\alpha + -2\beta, 5\alpha + 4\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Vectorul $\vec{v} = (-1, 11, -12, 2)$ aparţine acestui subspaţiu dacă există scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$ sau echivalent

$$(-1, 11, -12, 2) = (2\alpha + \beta, -\alpha + 3\beta, 3\alpha - 2\beta, 5\alpha + 4\beta)$$

ceea ce revine la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -1 \\ -\alpha + 3\beta = 11 \\ 3\alpha - 2\beta = -12 \\ 5\alpha + 4\beta = 2 \end{cases}$$

Studiem compatibilitatea acestui sistem: matricea A are rangul 2 iar $\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & -12 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ are rangul tot 2 (ambii determinaţi de ordinul al treilea $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & -12 \end{vmatrix}$ şi $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 11 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ sunt nuli). Prin urmare, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 2$ deci sistemul este compatibil. Soluţia este dată prin rezolvarea sistemului format cu primele două ecuaţii (cele principale) şi primele două necunoscute (cele principale). Obţinem $\alpha = -2$ şi $\beta = 3$.

Deci avem $\vec{v} = -2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$, adică $\vec{v}$ aparţine subspaţiului generat de cei doi vectori.

26. În spaţiul $\mathcal{P}_3\,(x)$ se consideră vectorii $p_1\,(x) = x^3 + 2x - 1$, $p_2\,(x) = 2x^2 + 1$, $p_3\,(x) = x^3 - x$. Să se arate că $p_1\,(x)$, $p_2\,(x)$ şi $p_3\,(x)$ sunt liniar independenţi şi să se precizeze care este subspaţiul vectorial generat de $p_1\,(x)\,, p_2\,(x)$ şi $p_3\,(x)$. Vectorul $p\,(x) = 2x^2 + 3x$ aparţine acestui subspaţiu? Dar $p\,(x) = x + 1$?

Rezolvare:

Se verifică mai întâi că vectorii daţi sunt liniari independenţi (se pleacă de la o combinaţie liniară egală cu zero, i.e. $\alpha p_1\,(x) + \beta p_2\,(x) + \gamma p_3\,(x) = 0$, şi trebuie să arătăm că $\alpha = \beta = \gamma = 0$).

Subspaţiul generat de vectorii polinoame date este, prin definiţie,

$$\{\alpha p_1\,(x) + \beta p_2\,(x) + \gamma p_3\,(x) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \{\alpha p_1\,(x) + \beta p_2\,(x) + \gamma p_3\,(x) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$
$$= \left\{(\alpha + \gamma)\,x^3 + 2\beta x^2 + (2\alpha - \gamma)\,x + (-\alpha + \beta) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

Vectorul $p\,(x) = 2x^2 + 3x$ aparţine acestui subspaţiu dacă există scalarii $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $p\,(x) = \alpha p_1\,(x) + \beta p_2\,(x) + \gamma p_3\,(x)$ sau echivalent

$$2x^2 + 3x = (\alpha + \gamma)\,x^3 + 2\beta x^2 + (2\alpha - \gamma)\,x + (-\alpha + \beta)$$

ceea ce revine la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ 2\beta=2\\ 2\alpha-\gamma=3\\ -\alpha+\beta=0\end{cases}$$

Studiem compatibilitatea acestui sistem: matricea sistemului este $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&0&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}$ are rangul 3 (avem $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&0&-1\end{vmatrix}=-6\neq 0$) iar $\bar{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&2\\2&0&-1&3\\-1&1&0&0\end{bmatrix}$ are rangul tot 3 (determinantul matricei $\bar{A}$ este este nul). Prin urmare, $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\bar{A}=3$ deci sistemul este compatibil. Soluţia este dată prin rezolvarea sistemului format cu primele trei ecuaţii (cele principale) şi primele trei necunoscute (cele principale). Obţinem $\alpha=1$, $\beta=1$ şi $\gamma=-1$.

Deci avem $p(x)=p_1(x)+p_2(x)-p_3(x)$ adică $p(x)$ aparţine subspaţiului generat de cele trei polinoame.

Prin abordare similară se va demonstra că $x+1$ nu aparţine subspaţiului generat. Într-adevăr, $p(x)=x+1$ aparţine acestui subspaţiu dacă există scalarii $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ astfel încât $p(x)=\alpha p_1(x)+\beta p_2(x)+\gamma p_3(x)$ sau echivalent

$$x+1=(\alpha+\gamma)x^3+2\beta x^2+(2\alpha-\gamma)x+(-\alpha+\beta)$$

ceea ce revine la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ 2\beta=0\\ 2\alpha-\gamma=1\\ -\alpha+\beta=1\end{cases}$$

Studiem compatibilitatea acestui sistem: matricea sistemului este $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&0&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}$ are rangul 3 iar $\bar{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&0\\2&0&-1&1\\-1&1&0&1\end{bmatrix}$ are rangul 4 (determinantul matricei $\bar{A}$ nu este nul). Prin urmare, $\operatorname{rang}A\neq\operatorname{rang}\bar{A}$ deci sistemul este incompatibil. Deci $p(x)$ nu aparţine subspaţiului generat de cele trei polinoame.

27. În $\mathbb{R}^4$ se consideră vectorii $\vec{v}_1=(1,4,-5,2)$, $\vec{v}_2=(1,2,3,1)$. Să se arate că $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ sunt liniar independenţi şi să se precizeze care este subspaţiul vectorial generat de $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$. Vectorul $\vec{v}=(2,14,-34,7)$ aparţine acestui subspaţiu?

28. În $\mathbb{R}^4$ se consideră subspaţiul $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Să se afle un sistem de generatori al lui V.

29. Să se arate că dacă vectorii $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in V$ sunt liniar independenţi atunci şi vectorii

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = \vec{v}_1 \\ \vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{w}_n = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n \end{cases}$$

sunt liniar independenţi.

30. Să se determine λ astfel încât vectorii $\vec{v}_1 = (\lambda, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, \lambda, -1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, \lambda)$ din $\mathbb{R}^3$ să formeze o bază în $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare:

Într-un spaţiu de dimensiune n, dacă avem n vectori liniar independenţi, atunci aceştia formează o bază.

În particular, în spaţiul $\mathbb{R}^3$, care este de dimensiune 3, dacă avem trei vectori liniar independenţi atunci aceştia formează o bază.

Conform Teoremei 50 rangul matricei formată cu vectorii puşi pe coloană este exact numărul de vectori coloană liniari independenţi (iar dimensiunea subspaţiului generat de cei trei vectori este egală cu numărul maxim de vectori liniar independenţi ai sistemului dat). În cazul nostru rangul matricei $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$ depinde de λ. Astfel $\det A = \lambda^3 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 + 2)$, deci dacă $\lambda = 0$, atunci rangul este 2 şi deci numărul maxim de vectori liniar independenţi dintre cei daţi este 2 (deci cei trei vectori nu sunt liniar independenţi, deci nu pot forma o bază). Dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, atunci rangul este 3, prin urmare numărul maxim de vectori liniar independenţi dintre cei daţi este 3, deci cei trei vectori sunt liniar independenţi şi deoarece numărul de vectori liniar independenţi coincide cu dimensiunea spaţiului, vectorii daţi formează o bază în $\mathbb{R}^3$.

31. Să se determine λ astfel încât vectorii $\vec{v}_1 = (1, \lambda, 0)$, $\vec{v}_2 = (\lambda, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, \lambda)$ din $\mathbb{R}^3$ să formeze o bază în $\mathbb{R}^3$.

32. Se dau vectorii $\vec{v}_1 = (1, 2, -3, -1)$, $\vec{v}_2 = (0, -1, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (-2, 0, 1, 3)$ şi $\vec{v}_4 = (-1, 1, 1, 2)$ din $\mathbb{R}^4$. Să se arate că aceştia formează o bază în $\mathbb{R}^4$. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{v} = (-2, 2, -3, 1)$ în această nouă bază.

Rezolvare:

În spaţiul $\mathbb{R}^4$, care este de dimensiune 4, dacă avem patru vectori liniar independenţi atunci aceştia formează o bază.

Rangul matricei A este 4 deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$, deci numărul maxim de vectori liniar independenţi dintre cei daţi este 4, adică cei patru vectori sunt liniar independenţi şi deci pot forma o bază în $\mathbb{R}^4$.

A scrie coordonatele vectorului $\vec{v} = (-2, 2, -3, 1)$ în noua bază în seamnă a găsi scalarii $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 + \delta\vec{v}_4$ sau echivalent

$$(-2, 2, -3, 1) = (\alpha - 2\gamma - \delta, 2\alpha - \beta + \delta, -3\alpha + \beta + \gamma + \delta, -\alpha + 2\beta + 3\gamma + 2\delta)$$

ceea ce revine la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \alpha - 2\gamma - \delta = -2 \\ 2\alpha - \beta + \delta = 2 \\ -3\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3 \\ -\alpha + 2\beta + 3\gamma + 2\delta = 1. \end{cases}$$

Studiem compatibilitatea acestui sistem: matricea A are rangul 4 iar $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ are rangul tot 4, prin urmare, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 4$ deci sistemul este compatibil unic determinat. Soluţia este dată folosind regula lui Cramer. Obţinem $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 2$ şi $\delta = -1$.

Deci avem $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 - \vec{v}_4$ adică coordonatele lui $\vec{v}$ în noua bază sunt $1, -1, 2, -1$.

33. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{v} = (10, 8, 5, 1) \in \mathbb{R}^4$ în baza $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, unde $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 1, 1)$.

34. Să se determine coordonatele următorilor vectori din spaţiul $\mathcal{P}_3(x)$ în baza $B = \{1, x, x^2, x^3\}$:

    (a) $p_1(x) = 4x^3 - x^2 + 5x + 4$, (b) $p_2(x) = 2x - 1$, (c) $p_3(x) = (x + 1)^3$.

35. Să se determine o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

    Rezolvare:

    În mod evident, orice matrice din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ se scrie într-un mod unic, cu ajutorul matricelor E^i_j, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ care au 1 la intersecţia liniei i cu coloana j şi în rest zerouri, deci mulţimea matricelor $\{E^i_j\}_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ formează un sistem de generatori pentru orice matrice din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Se poate arăta uşor că mulţimea $\{E^i_j\}_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ este şi liniar independentă.

36. Fie subspaţiul vectorial al matricelor de forma $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine o bază a acestui subspaţiu.

37. Fie subspaţiul vectorial al matricelor de forma $\begin{bmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine o bază a acestui subspaţiu.

38. Să se determine coordonatele următorilor vectori din spaţiul $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în baza canonică a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

    (a) $A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, (b) $A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

39. Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ dintr-un spaţiu vectorial cu baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Să se arate că $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ formează o nouă bază şi să se afle coordonatele în această bază ale vectorului $\vec{c} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

40. Se dau vectorii $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 2)$, $\vec{c} = (1, 2, 3)$ din $\mathbb{R}^3$. Să se arate că $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ formează o nouă bază şi să se afle coordonatele în această bază ale vectorilor $\vec{u} = (5, -1, 3)$ şi $\vec{v} = (2, 3, -1)$.

41. Se dă vectorul $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ dintr-un spaţiu vectorial cu baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{a}$ în baza $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ ştiind că trecerea de la o bază la alta este realizată de relaţiile $\vec{f}_1 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ şi $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

42. Se dau vectorii $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ şi $\vec{c} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ dintr-un spaţiu vectorial cu baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Să se arate că $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ formează o nouă bază şi să se afle coordonatele în această bază ale vectorului $\vec{d} = \vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$.

43. Să se determine dimensiunea şi o bază a subspaţiului vectorial generat de vectorii:
(a) $\vec{v}_1 = (1, 2, -1, 3)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, -1, 4)$, $\vec{v}_3 = (0, 4, -1, 2)$ din $\mathbb{R}^4$;
(b) $\vec{v}_1 = (-1, 0, 2, -3, 4)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, -3, 0, -1)$, $\vec{v}_3 = (1, 3, 1, 1, 2)$, $\vec{v}_4 = (1, 5, 3, 5, 1)$ din $\mathbb{R}^5$.

Rezolvare:

Dimensiunea subspaţiului generat de vectorii daţi este egală cu numărul maxim de vectori liniar independenţi ai sistemului dat.

(a) Rangul matricei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ este 2, deci numărul maxim de vectori liniar independenţi dintre cei daţi este 2. Prin urmare dimensiunea subspaţiului generat de cei trei vectori este 2 iar o bază este dată, de exemplu, de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

(b) Rangul matricei $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ este 3, deci numărul maxim de vectori liniar independenţi dintre cei daţi este 3. Prin urmare dimensiunea subspaţiului generat de cei patru vectori este 3 iar o bază este dată, de exemplu, de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

44. Să se determine dimensiunea şi o bază a subspaţiului vectorial generat de vectorii $\vec{v}_1 = (2, 1, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 0, 1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, -3, 0)$ din $\mathbb{R}^4$.

45. Se dă vectorul $\vec{a} = (3, -1, 0)$ în baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{a}$ în baza $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ ştiind că trecerea de la o bază la alta este realizată de relaţiile $\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ şi $\vec{f}_3 = -\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

46. Un spaţiu vectorial are baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$. Să se afle matricea de trecere de la baza dată la baza $\{\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Rezolvare:

Pentru a scrie matricea de trecere de la baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ la baza $\{\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, trebuie să scriem vectorii bazei noi descompuşi în funcţie de vectorii bazei vechi. Avem

$$\begin{cases} \vec{e}_3 = (0,0,1,0) \\ \vec{e}_4 = (0,0,0,1) \\ \vec{e}_1 = (1,0,0,0) \\ \vec{e}_2 = (0,1,0,0) \end{cases}$$

Acum matricea de trecere de la o bază la alta se scrie punând coordonatele de mai sus pe coloană. Obţinem

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

47. În spaţiul $\mathcal{P}_2(x)$ să se arate că $B = \{p_1(x) = x^2 + x + 1, p_2(x) = x^2 - x, p_3(x) = x - 1\}$ formează o bază. Să se afle matricea de trecere de la baza canonică $\{1, x, x^2\}$ la baza B. Să se afle coordonatele polinomului $x^2 + 5$ în baza B.

Rezolvare:

Dimensiunea lui $\mathcal{P}_2(x)$ este 3, deci cele trei polinoame date formează o bază în $\mathcal{P}_2(x)$ dacă şi numai dacă sunt liniar independete. Considerăm

$$\alpha\left(x^2 + x + 1\right) + \beta\left(x^2 - x\right) + \gamma(x - 1) = 0$$

ceea ce se reduce la sistemul

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

care are matricea cu determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, deci admite soluţie unică (doar soluţia banală). Deci vectorii daţi sunt liniar independenţi, adică formează o bază în $\mathcal{P}_2(x)$.

Pentru a scrie matricea de trecere de la baza canonică $\{1, x, x^2\}$[1] la baza B, trebuie să scriem vectorii bazei B descompuşi în funcţie de vectorii bazei canonice. Avem

$$\begin{cases} p_1(x) = x^2 + x + 1 = (1,1,1) \\ p_2(x) = x^2 - x = (1,-1,0) \\ p_3(x) = x - 1 = (0,1,-1) \end{cases}$$

Acum matricea de trecere de la o bază la alta se scrie punând coordonatele de mai sus pe coloană. Obţinem

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

[1] De fapt, din cauza scrierii polinoamelor sub formă canonică, vom folosi descompunerea în baza $\{x^2, x, 1\}$.

Pentru a găsi coordonatele altui vector în raport cu această nouă bază avem două metode.

Prima metodă este cea prezentată deja: vectorul $p(x) = x^2 + 5$ se scrie sub forma $p(x) = \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_3(x)$ sau echivalent

$$x^2 + 5 = (\alpha + \beta) x^2 + (\alpha - \beta + \gamma) x + (\alpha - \gamma)$$

ceea ce revine la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 5 \end{cases}$$

Studiem compatibilitatea acestui sistem: matricea sistemului este $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ are rangul 3 iar $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ are rangul tot 3. Prin urmare, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 3$ deci sistemul este compatibil. Soluţia este dată de regula lui Cramer: $\alpha = 2$, $\beta = -1$ şi $\gamma = -3$.

Deci avem $p(x) = 2p_1(x) - p_2(x) - 3p_3(x)$.

A doua metodă înseamnă a folosi formula

$$Y = S^{-1} \cdot X,$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui $p(x)$ în vechea bază (cea canonică) iar Y este matricea coloană a coordonatelor lui $p(x)$ în noua bază B. Prin urmare

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

adică coordonatele lui $p(x) = x^2 + 5$ în noua bază sunt $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, deci $p(x) = 2p_1(x) - p_2(x) - 3p_3(x)$.

48. În spaţiul $\mathcal{P}_3(x)$ să se afle matricea de trecere de la baza $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ la baza

$$\left\{1, (x-2), (x-2)^2, (x-2)^3\right\}.$$

49. În $\mathbb{R}^3$ se consideră bazele

$$\begin{aligned} B &= \{\vec{v}_1 = (1,-1,1), \vec{v}_2 = (2,0,1), \vec{v}_3 = (1,-2,0)\} \text{ şi} \\ B' &= \{\vec{w}_1 = (2,1,2), \vec{w}_2 = (-1,-2,-1), \vec{w}_3 = (0,1,1)\}. \end{aligned}$$

Să se determine legătura dintre cele două baze şi să se determine coordonatele vectorului $\vec{v}$ faţă de baza B' ştiind că are coordonatele $(1,1,0)$ faţă de baza B.

Rezolvare:

Pentru a scrie matricea de trecere de la baza B la baza B', trebuie să scriem vectorii bazei B' descompuşi în funcţie de vectorii B. Avem

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 \\ \vec{w}_2 = a'\vec{v}_1 + b'\vec{v}_2 + c'\vec{v}_3 \\ \vec{w}_3 = a''\vec{v}_1 + b''\vec{v}_2 + c''\vec{v}_3 \end{cases}$$

Rescriind acest sistem şi rezolvând-ul obţinem

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{w}_2 = -\vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{w}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3. \end{cases}$$

Matricea de trecere de la o bază la alta se scrie punând coordonatele de mai sus pe coloană. Obţinem

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Există şi o metodă alternativă de a găsi matricea de schimbare de baze, când nici una dintre cele două baze nu sunt cele canonice. Având în vedere că este uşor de citit matricea de trecere de la baza canonică, fie

$$B_c \xrightarrow{S_1} B \quad \text{şi} \quad B_c \xrightarrow{S_2} B',$$

unde S_1 şi S_2 sunt:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fiind ambele baze, avem că S_1 şi S_2 sunt nesingulare şi deci

$$B \xrightarrow{S_1^{-1}} B_c \quad \text{şi} \quad B_c \xrightarrow{S_2} B'.$$

Acum putem scrie direct matricea S de schimbare de bază de la B la B' :

$$B \xrightarrow{S_1^{-1}S_2} B_c,$$

deci

$$\begin{aligned} S &= S_1^{-1}S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pentru a găsi coordonatele lui $\vec{v}$ în baza B' ştiind că are coordonatele $(1, 1, 0)$ în baza B, folosim formula

$$Y = S^{-1} \cdot X,$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{v}$ în bază iniţială B iar Y este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{v}$ în noua bază B'. Prin urmare

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

adică coordonatele lui $\vec{v}$ în noua bază B' sunt $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, deci $\vec{v} = 2\vec{w}_1 + \vec{w}_2 - \vec{w}_3$.

50. În $\mathbb{R}^3$ se consideră baza $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ şi mulţimea

$$B' = \{\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{w}_2 = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2, \vec{w}_3 = 3\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 + 6\vec{v}_3\}.$$

Să se arate că mulţimea B' formează o bază şi să se determine coordonatele vectorului $\vec{w} = 2\vec{v}_1 - 7\vec{v}_3$ în baza nouă B'.

Rezolvare:

Se poate arăta că vectorii $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ sunt liniar independenţi, folosind liniara independenţă a vectorilor $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Apoi $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ formează o bază deoarece sunt trei vectori liniar independenţi într-un spaţiu de dimensiune 3.

O metodă mai uşoară constă în a citi matricea de trecere de la B la B'. Aceasta este

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Deoarece matricea de trecere de la baza B la noua mulţime B' este nesingulară ($\det S \neq 0$), deducem, conform teoriei, că mulţimea care s-a obţinut este tot o bază.

Pentru a găsi coordonatele lui $\vec{w}$ în baza B' ştiind că are coordonatele $(2, 0, -7)$ în baza B, folosim formula

$$Y = S^{-1} \cdot X.$$

Prin urmare

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -12 & 5 \\ -13 & 9 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

adică coordonatele lui $\vec{w}$ în noua bază B' sunt $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, deci $\vec{w} = \vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 - \vec{w}_3$.

51. Fie subspaţiul $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$. Să se găsească o bază în acest subspaţiu şi să se precizeze dimensiunea subspaţiului.

Rezolvare:

Avem evident că $S = \{(x_1, x_2, x_3, -x_1 - 2x_2) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$. Considerăm acum vectorii din S, obţinuţi pentru diverse valori particulare ale variabilelor $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Astfel obţinem $B = \{\vec{v}_1 = (1, 0, 0, -1), \vec{v}_2 = (0, 1, 0, -2), \vec{v}_3 = (0, 0, 1, 0)\}$. Aceştia sunt liniar independenţi deoarece matricea formată cu coordonatele lor scrise pe coloană este $A =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ care are rangul 3. În plus se obţine imediat că orice vector din S se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectori din S, deoarece

$$S \ni \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, -v_1 - 2v_2) = v_1 (1, 0, 0, -1) + v_2 (0, 1, 0, -2) + v_3 (0, 0, 1, 0).$$

Deci B este un sistem de generatori pentru S dar şi un sistem liniar independent de vectori, deci B constitue o bază pentru S. Prin urmare, dimensiunea lui S este 3.

52. Fie subspaţiul $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & a+c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Să se găsească o bază B_1 în acest subspaţiu şi să se precizeze dimensiunea subspaţiului. Să se arate că

$$B_2 = \left\{ F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

formează o bază în spaţiul S.

Rezolvare:

Considerăm matrice din S obţinute pentru diverse valori particulare ale variabilelor $a, b, c \in \mathbb{R}$. Obţinem mulţimea

$$B_1 = \left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Se poate arăta că aceştia sunt liniar independenţi şi se obţine imediat că orice matrice din S se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectori din S, deoarece

$$S \ni A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & a+c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deci B_1 este un sistem de generatori pentru S dar şi un sistem liniar independent de vectori, deci B_1 constitue o bază pentru S. Prin urmare, dimensiunea lui S este 3.

Acum, în mod analog, se poate arăta că vectorii din B_2 sunt liniar independenţi. Acum, spaţiul S fiind de dimensiune 3, rezultă imediat că mulţimea B_2 formată cu 3 vectori liniar independenţi este şi sistem de generatori, deci B_2 formează o bază în S.

Pentru a găsi coordonatele unei matrice oarecare din S în raport cu baza B_2, trebuie să plecăm de la ecuaţia

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & a+c \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha & \alpha & 0 \\ -\alpha & \alpha & 3\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ \beta & \beta & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 2\gamma & 2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & a+c \end{bmatrix},$$

unde $A \in S$, ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} 2\alpha = a \\ \alpha - \beta + \gamma = b \\ 0 = 0 \\ -\alpha + \beta - \gamma = -b \\ \alpha + \beta + 2\gamma = c \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = a \\ \alpha - \beta + \gamma = b \\ \alpha + \beta + 2\gamma = c \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{a}{2},\ \beta = \frac{1}{6}(a - 4b + 2c),\ \gamma = \frac{1}{3}(b + c - a).$$

Deci $S \ni A = \frac{a}{2} B_1 + \frac{1}{6}(a - 4b + 2c) B_2 + \frac{1}{3}(b + c - a) B_3$, adică coordonatele matricei A în baza B_1 sunt (a, b, c) iar în baza B_2 sunt $\left(\frac{a}{2}, \frac{1}{6}(a - 4b + 2c), \frac{1}{3}(b + c - a)\right)$.

53. Să se determine dimensiunea şi să se indice o bază a spaţiului soluţiilor următorului sistem liniar şi omogen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Rezolvare:

Trebuie să rezolvăm sistemul omogen. Matricea sistemului are rangul 2, deci sistemul se reduce la

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\alpha - \beta - 2\gamma \\ x_1 - x_2 = -2\alpha - \beta - \gamma \end{cases}$$

unde $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = \gamma$. Acesta are soluţia $x_1 = \frac{1}{2}(-3\alpha - 2\beta - 2\gamma)$ şi $x_2 = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$, deci soluţia sistemui iniţial este mulţimea

$$S = \left\{\left(\frac{1}{2}(-3\alpha - 2\beta - 2\gamma), \frac{1}{2}(\alpha - \gamma), \alpha, \beta, \gamma\right), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}. \tag{11}$$

O metodă alternativă de a rezolva sistemul este şi metoda lui Gauss. Astfel obţinem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iar sistemul triunghiular obţinut se rezolvă uşor şi are soluţia dată tot de mulţimea (11).

O bază pentru mulţimea soluţiilor S se poate obţine dând diverse valori particulare variabilelor $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Deducem, de exemplu, baza

$$B = \{\vec{v}_1 = (-3, 1, 2, 0, 0), \vec{v}_2 = (-1, 0, 0, 1, 0), \vec{v}_3 = (-3, -1, 0, 0, 2)\},$$

şi deci S are dimensiunea 3.

54. Să se determine dimensiunea şi să se indice o bază a spaţiului soluţiilor următoarelor sisteme liniare şi omogene:

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} ;$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Rezolvare:

(a) $S_1 = \{(0, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, dimensiunea lui S_1 este 1;

(b) $S_2 = \{(2\alpha - \beta, \alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, dimensiunea lui S_2 este 2;

(c) $S_3 = \left\{\left(-\alpha - 3\beta, \alpha + \beta, 5\alpha - \frac{3}{2}\beta, \alpha, \beta\right) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$, dimensiunea lui S_3 este 2.