Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii
şi Tehnologia Informaţiei
Algebră, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC
http://math.etti.tuiasi.ro/maticiuc/

CURS VI – VII

1 Transformări liniare

1.1 Definiţii, exemple şi proprietăţi generale

Fie V, W două K–spaţii vectoriale.

Definiţia 1 *O aplicaţie $T : V \to W$ se numeşte* ***transformare liniară*** *(sau* ***operator liniar****) dacă satisface condiţiile:*
(a) $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$, $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V$ (aditivitatea aplicaţiei liniare);
(b) $T(\lambda\vec{x}) = \lambda T(\vec{x})$, $\forall\, \lambda \in K$, $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V$ (omogenitatea aplicaţiei liniare).

Vom nota cu $\mathcal{L}(V, W)$ mulţimea aplicaţiilor liniare de la V la W, i.e.

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W : T \text{ este transformare liniară}\}.$$

Propoziţia 2 *Dacă $T \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci:*
(a) $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, unde $\vec{0}_V$ este vectorul nul din V şi $\vec{0}_W$ este vectorul nul din W;
(b) $T(-\vec{x}) = -T(\vec{x})$, $\forall\, \vec{x} \in V$.

Propoziţia 3 *O aplicaţie $T : V \to W$ este liniară dacă şi numai dacă are loc*

$$T(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y}),\ \forall\, \lambda, \mu \in K,\ \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V$$

Definiţia 4 *(a) Se numeşte* ***nucleul unei transformări liniare*** *$T \in \mathcal{L}(V, W)$ notat cu $\operatorname{Ker}(T)$, contraimaginea prin T a subspaţiului vectorial nul $\{\vec{0}_W\}$ al lui W, i.e.*

$$\operatorname{Ker}(T) := T^{-1}(\vec{0}_W) = \left\{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0}_W\right\} \subseteq V;$$

(b) Dimensiunea lui $\operatorname{Ker}(T)$ se numeşte ***defectul transformării liniare*** *$T \in \mathcal{L}(V, W)$ şi se notează cu $\operatorname{def}(T)$ (deci $\operatorname{def}(T) := \dim(\operatorname{Ker}(T))$);*
(c) Se numeşte ***imaginea transformării liniare*** *$T \in \mathcal{L}(V, W)$, şi se notează cu $\operatorname{Im}(T)$, mulţimea*

$$T(V) := \{\vec{w} \in W : \exists\, \vec{v} \in V,\ T(\vec{v}) = \vec{w}\};$$

(d) Dimensiunea lui $\operatorname{Im}(T)$ se numeşte ***rangul transformării liniare*** *$T \in \mathcal{L}(V, W)$ şi se notează cu $\operatorname{rang}(T)$ (deci $\operatorname{rang}(T) := \dim(\operatorname{Im}(T))$);*

Exemplul 5 *Fie V un K–spaţiu vectorial şi $\lambda \in K$ fixat. Definim $T : V \to V$, prin $T(\vec{x}) := \alpha\vec{x}$. Evident $T \in \mathcal{L}(V, V)$ deoarece*

$$T(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \alpha \cdot (\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda(\alpha\vec{x}) + \mu(\alpha\vec{y}) = \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y}).$$

Exemplul 6 *Definim aplicaţia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *prin*

$$T(\vec{x}) = (x_1 + x_3, 2x_1 + x_3, x_2, 3x_1 - x_2 + x_3), \forall\, \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Arătaţi că $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

Avem

$$\begin{aligned}
&T(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = T(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) = \\
&= (\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_3 + \mu y_3, 2\lambda x_1 + 2\mu y_1 + \lambda x_3 + \mu y_3, 3\lambda x_1 + 3\mu y_1 - \lambda x_2 - \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3) \\
&= (\lambda x_1 + \lambda x_3, 2\lambda x_1 + \lambda x_3, 3\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3) + (\mu y_1 + \mu y_3, 2\mu y_1 + \mu y_3, 3\mu y_1 - \mu y_2 + \mu y_3) \\
&= \lambda(x_1 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_3, 2y_1 + y_3, 3y_1 - y_2 + y_3) \\
&= \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y}).
\end{aligned}$$

Prezentăm în continuare câteva proprietăţi generale ale transformărilor liniare.

Propoziţia 7 *Fie* V, W *două* K*–spaţii vectoriale şi* $T \in \mathcal{L}(V, W)$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) *Transformarea liniară* T *este injectivă;*
(ii) $\operatorname{Ker}(T) = \{\vec{0}_V\}$;
(iii) *Pentru orice sistem de vectori liniar independent* $S \subset V$ *avem că* $T(S) \subset W$ *este un sistem de vectori liniar independent.*

Demonstraţie. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Fie $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(T)$. Atunci $T(\vec{x}) = \vec{0}_W = T(\vec{0}_V)$ iar din injectivitatea lui T obţinem $\vec{x} = \vec{0}_V$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Fie $S \subset V$ un sistem de vectori liniar independent şi fie $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p\} \subset T(S)$ un subsistem finit. Vom arăta că acest subsitem este liniar independent. Astfel fie combinaţia liniară

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p = \vec{0}_W$$

Din ipoteză avem că pentru $i \in \overline{1,p}$, există $\vec{x}_i \in S$ astfel încât $\vec{v}_i = T(\vec{x}_i)$. Deci ecuaţia de mai sus devine

$$\alpha_1 T(\vec{x}_1) + \cdots + \alpha_p T(\vec{x}_p) = \vec{0}_W \Leftrightarrow T(\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{x}_p) = \vec{0}_W$$

adică $\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{x}_p \in \operatorname{Ker}(T) = \{\vec{0}_V\}$. Prin urmare

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{x}_p = \vec{0}_V$$

Dar S este sistem liniar independent deci $\alpha_i = 0$, $i \in \overline{1,p}$, adică sistemul $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p\}$ este liniar independent.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Pentru a arăta injectivitatea fie $\vec{x}, \vec{v} \in V$ cu $\vec{x} \neq \vec{y}$. Deci $(\vec{x} - \vec{y}) \neq \vec{0}_V$ adică sistemul $\{\vec{x} - \vec{y}\}$ este liniar independent. Din (iii) avem că $\{T(\vec{x} - \vec{y})\}$ este liniar independent ceea ce este echivalent cu faptul că

$$T(\vec{x} - \vec{y}) \neq \vec{0}_W \Leftrightarrow T(\vec{x}) \neq T(\vec{y})$$

ceea ce înseamnă că T este injecţie. ■

Propoziţia 8 *Fie* V, W *două* K*–spaţii vectoriale,* $T \in \mathcal{L}(V, W)$ *şi* $S \subset V$ *un sistem de generatori al lui* V. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Transformarea liniară* T *este surjectivă;*

(ii) *Imaginea* $T(S) \subset W$ *este un sistem de generatori al lui* W.

Demonstraţie. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Fie un vectoar arbitrar ales $\vec{w} \in W$. Vom arăta că $\vec{w}$ este generat de elemente din $T(S)$.

Din (i) deducem că $\exists\, \vec{v} \in V$ astfel încât $T(\vec{v}) = \vec{w}$. Deoarece S este sistem de generatori al lui V obţinem că există scalarii $\lambda_i \in K$, $i \in \overline{1,p}$ şi vectorii $\vec{x}_i \in S$, $i \in \overline{1,p}$ astfel încât

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{x}_i$$

Deci

$$\vec{w} = T(\vec{v}) = T\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T(\vec{x}_i)$$

adică $T(S)$ este un sistem de generatori al lui W.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Fie $\vec{w} \in W$ un vector arbitrar. Din (ii) deducem că $\vec{w}$ este generat de elemente din $T(S)$, adică $\exists\, \vec{w}_i \in T(S)$ şi $\exists\, \lambda_i \in K$, $i \in \overline{1,p}$astfel încât

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{w}_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T(\vec{v}_i)$$

unde $\vec{v}_i \in S$, $i \in \overline{1,p}$. Deci

$$\vec{w} = T\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{v}_i\right)$$

ceea ce înseamnă că $\vec{w}$ este imaginea unui element din V adică T este surjectivă. ■

Definiţia 9 *O aplicaţie $T \in \mathcal{L}(V, W)$ se numeşte **izomorfism de spaţii vectoriale** dacă aplicaţia T este bijectivă.*

1.2 Transformări liniare între K–spaţii finit dimensionale

Fie în continuare V_n un K–spaţiu vectorial n–dimensional şi considerăm spaţiul vectorial aritmetic K^n.

Propoziţia 10 *Orice spaţiu vectorial V_n care este n-dimensional este izomorf cu K^n.*

Demonstraţie. Fie B o bază $B = \{e_i\}_{i \in \overline{1,n}}$ o bază în V_n. Pentru orice $\vec{x} \in V$ are loc descompunerea unică

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$$

unde $\lambda_i \in K$, $i \in \overline{1,n}$. Definim aplicaţia

$$T(\vec{x}) := (\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

Se poate verifica că această aplicaţie este transformare liniară bijectivă, adică T este izomorfism. ■

Teorema 11 *Avem că V_n este izomorf cu K–spaţiul vectorial W dacă şi numai dacă $\dim W = n$ (adică W are aceeaşi dimensiune cu V_n).*

Reamintim Definiţia 4

$$\mathrm{rang} T = \dim(\mathrm{Im}\, T), \ \mathrm{def} T = \dim(\mathrm{Ker} T)$$

Teorema 12 *Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W)$. Atunci are loc*

$$\mathrm{rang}T + \mathrm{def}T = n$$

(numită relaţia dimensiunilor).

Corolarul 13 *Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$. Atunci au loc:*

(i) *T este aplicaţie injectivă* $\Leftrightarrow \mathrm{rang}\, T = n,\ n \leq m$

(ii) *T este aplicaţie surjectivă* $\Leftrightarrow \mathrm{rang}\, T = m,\ m \leq n$

(iii) *T este aplicaţie bijectivă* $\Leftrightarrow \mathrm{rang}\, T = n = m$

Demonstraţie. Se aplică Propoziţiile 7, 8. ∎

Corolarul 14 *Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_n)$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *T este aplicaţie injectivă*

(ii) *T este aplicaţie surjectivă*

(iii) *T este aplicaţie bijectivă*

1.3 Matricea unei transformări liniare între V_n şi W_m

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$, $B = \{e_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ o bază în V_n şi $B' = \{f_j\}_{j\in\overline{1,m}}$ bază în W_m.

Teorema 15 *Aplicaţia $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m) \Leftrightarrow$ pentru orice $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \in V_n$, vectorul $T(\vec{x}) \in W_m$ are în baza B' coordonatele $y_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^j x_i$, $j \in \overline{1,m}$, unde $A = (a_i^j)_{i\in\overline{1,n},\ j\in\overline{1,m}} \in \mathcal{M}_{mn}(K)$.*

Demonstraţie. *Necesitatea "$\Longrightarrow$"* Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$ şi fie $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \in V_n$. Atunci $T(\vec{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i T(\vec{e}_i)$. Vectorii $T(\vec{e}_i) \in W_m$ au următoarea descompunere în baza B'

$$\begin{cases} T(\vec{e}_1) = a_1^1 \vec{f}_1 + a_1^2 \vec{f}_2 + \cdots + a_1^m \vec{f}_m \\ T(\vec{e}_2) = a_2^1 \vec{f}_1 + a_2^2 \vec{f}_2 + \cdots + a_2^m \vec{f}_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T(\vec{e}_n) = a_n^1 \vec{f}_1 + a_n^2 \vec{f}_2 + \cdots + a_{n1}^m \vec{f}_m \end{cases} \tag{1}$$

deci

$$T(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \sum_{j=1}^{m} a_i^j \vec{f}_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i \right) \vec{f}_j$$

adică coordonatele vectorului $T(\vec{x})$ în baza B' sunt date de

$$\vec{y}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i,\ j \in \overline{1,m}$$

Suficienţa "$\Longleftarrow$" Fie $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ astfel încât $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i$, $\vec{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$. Deci

$$\begin{aligned} T(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} (\alpha u_i + \beta v_i) a_i^j \right) \vec{f}_j = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_i a_i^j \vec{f}_j + \beta \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i a_i^j \vec{f}_j = \\ &= \alpha T(\vec{x}) + \beta T(\vec{y}) \end{aligned}$$

adică T este aplicaţie liniară. ■

Din (1) obţinem matricea

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{bmatrix}$$

numită **matricea transformării liniare T în raport cu bazele B** şi B'.

Această matrice are drept coloane coordonatele vectorilor $T(\vec{e}_i)$ în baza B'.

Ecuaţiile

$$\begin{cases} y_i = a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n \\ y_2 = a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n \end{cases}$$

se numesc ecuaţiile transformării liniare T în raport cu bazele B şi B'. Dacă notăm cu X matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x} \in V_n$ în baza B, şi cu Y matricea coloană a coordonatelor vectorului $T(\vec{x}) \in W_m$ în baza B', atunci ecuaţiile de mai sus se rescriu sub formă matriceală

$$Y = A \cdot X$$

(numită **ecuaţia matriceală a transformării liniare** T).

Propoziţia 16 *Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$. Atunci $\operatorname{rang} T = \operatorname{rang} A$, unde A este matricea transformării liniare T.*

Teorema 17 *Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$, $B, \bar{B}$ două baze în V_n şi $B', \bar{B}'$ două baze în W_m. Presupunem că $B \xrightarrow{S} \bar{B}$ şi $B' \xrightarrow{S'} \bar{B}'$. Atunci are loc relaţia*

$$\bar{A}_{\bar{B}\bar{B}'} = (S')^{-1} \cdot A_{BB'} \cdot S, \tag{2}$$

unde $A_{BB'}$ şi $\bar{A}_{\bar{B}\bar{B}'}$ sunt matricile transformării liniare în raport cu bazele B şi B', respectiv $\bar{B}$ şi $\bar{B}'$.

Remarca 18 *Formula (2) de mai sus, se numeşte* ***formula matriceală de schimbare a matricei unei transfromări liniare la schimbări de baze.***

Demonstraţie. Am văzut mai sus că ecuaţia matriceală a lui T în raport cu perechea de baze B, B' este $Y = A_{BB'} \cdot X$, şi similar ecuaţia matriceală a lui T în raport cu perechea de baze $\bar{B}, \bar{B}'$ este $\bar{Y} = \bar{A}_{\bar{B}\bar{B}'} \cdot \bar{X}$. Pe de altă parte conform formulei matriceale de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze (vezi Cursul 1) avem următoare ecuaţii de legătură

$$X = S \cdot \bar{X} \ , \ Y = S' \cdot \bar{Y}$$

Deci

$$\begin{aligned} Y &= S' \cdot \bar{Y} = A_{BB'} \cdot X = A_{BB'} \cdot S \cdot \bar{X} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ \bar{Y} = \left[(S')^{-1} \ A_{BB'} \ S \right] \cdot \bar{X} \end{aligned}$$

Dar $\bar{Y} = \bar{A}_{\bar{B}\bar{B}'} \cdot \bar{X}$ deci, identificând matricile obţinem

$$\bar{A}_{\bar{B}\bar{B}'} = (S')^{-1} \cdot A_{BB'} \cdot S$$

■

Corolarul 19 *În cazul particular în care luăm endomorfismul $T \in \mathcal{L}(V_n, V_n)$ şi $\bar{B}$ o altă bază în V_n cu $B_c \xrightarrow{S} \bar{B}$, are loc relaţia*

$$\bar{A} = (S)^{-1} \cdot A \cdot S, \tag{3}$$

unde A şi $\bar{A}$ sunt matricile transformării liniare în raport cu vechea bază canonică B_c şi respectiv cu noua bază $\bar{B}$.

1.4 Reducerea unui endomorfism T al lui V_n la forma diagonală

Definiţia 20 *Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$. Spunem că vectorul $\vec{x} \neq \vec{0}_V$ din V_n este vector propriu pentru T dacă $\exists\, \lambda \in K$ astfel încât*

$$T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}.$$

În acest caz $\lambda \in K$ se numeşte valoare proprie corespunzătoare vectorului propriu $\vec{x}$.

Suntem interesaţi să găsim bazele lui V_n în raport cu care matricea endomorfismului $T \in \mathcal{L}(V_n)$ să aibă forma cea mai simplă.

Teorema 21 *Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V_n)$ admite n vectori proprii liniar independenţi dacă şi numai dacă există o bază $B = \{\vec{e}_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ a lui V_n astfel încât să avem că matricea A a transformării liniare T să fie*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Demonstraţie. *Necesitatea* "$\Longrightarrow$" Dacă presupunem că T admite n vectori proprii $\vec{v}_i$, $i \in \overline{1,n}$ liniar independenţi, atunci sistemul $\bar{B} = \{v_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ constituie de asemenea o bază în V_n şi avem că $T(\vec{v}_i) = \lambda \vec{v}_i$, $i \in \overline{1,n}$ ceea ce înseamnă că A are forma de mai sus

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

Suficienţa "$\Longleftarrow$" Dacă există o bază $B = \{\vec{e}_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ a lui V_n astfel încât are loc că matricea A a transformării liniare T este $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, atunci avem că $T(\vec{e}_i) = \lambda \vec{e}_i$, $i \in \overline{1,n}$. ■

Definiţia 22 *Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V_n)$ se numeşte diagonalizabil dacă există o bază B în V_n formată numai din vectori proprii pentru T.*

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$, $B = \{\vec{e}_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ bază a lui V_n şi $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \neq \vec{0}$ un vector propriu pentru T. Fie $A = (a_i^j)_{i\in\overline{1,n},\ j\in\overline{1,m}}$ matricea lui T. Vectorul $\vec{x}$ este propriu $\Leftrightarrow T\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} x_i \vec{e}_i \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i^j\right)\vec{e}_j = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i^j = \lambda x_j$, $j \in \overline{1,n}$ ceea ce înseamnă că

$$(A - \lambda I_n) \cdot X = O \tag{4}$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{x}$ în baza B, I_n este matricea unitate de ordin n.

Propoziţia 23 *Vectorul $\vec{x}$ este propriu dacă şi numai dacă matricea coloană X a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza B este soluţie nebanală pentru sistemul liniar şi omogen (4).*

Deci T admite vectori proprii $\Leftrightarrow \lambda$ este soluţie a ecuaţiei algebrice de grad n

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Polinomul $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ se numeşte **polinomul caracteristic asociat matricei** A, iar ecuaţia $p(\lambda) = 0$ se numeşte **ecuaţia caracteristică a matricei** A.

Propoziţia 24 *Fie $\lambda \in K$ o rădăcină a ecuaţiei caracteristice $p(\lambda) = 0$ asociată lui $T \in \mathcal{L}(V_n)$. Atunci λ este valoare proprie pentru T. Invers dacă λ este valoare proprie pentru T atunci λ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice $p(\lambda) = 0$*

Dacă luăm λ o valoare proprie oarecare atunci să notăm cu

$$V(\lambda) := \{\vec{x} \in V_n : T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$$

adică mulţimea tuturor vectorilor proprii pentru T corespunzătoare valorii proprii λ.

Teorema 25 ***(de diagonalizare a unui endomorfism)*** *Operatorul $T \in \mathcal{L}(V_n)$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă următoarele două condiţii sunt satisăcute:*

(i) rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt toate valori proprii pentru T (sunt toate din K)

(ii) ordinul de multiplicitate al fiecărei valori proprii λ_i este egal cu dimensiunea subspaţiului propriu $V(\lambda_i)$.

Algoritmul practic de diagonalizare a unui endomorfism (a unei matrici pătratice)

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$ un endomorfism şi o bază B în V_n. Să notăm cu A matricea lui T în baza B. Se va rezolva ecuaţia caracteristică $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$. Dacă această ecuaţie are rădăcini care nu sunt din K atunci condiţia (i) din teorema precedentă nu este satisfăcută deci endomorfismul T nu este diagonalizabil. Dacă toate rădăcinile sunt din K atunci pentru fiecare valoare λ_i se va determina subspaţiul propriu $V(\lambda_i)$. Pentru aceasta se va identifica orice vector $u \in V_n$ cu matricea coloană X a coordonatelor sale în baza considerată B a lui V_n, şi, pentru fiecare valoare proprie λ_i considerăm sistemul liniar şi omogen

$$(A - \lambda_i I_n) X = 0$$

Se va determina apoi subspaţiu propriu $V(\lambda_i) := \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(K) : (A - \lambda_i I_n) X = 0\}$ şi se va pune în evidenţă câte o bază în fiecare subspaţiu propriu $V(\lambda_i)$ determinând astfel $\dim V(\lambda_i)$. Dacă există o valoare proprie λ_i pentru care $\dim V(\lambda_i)$ este mai mică strict decât ordinul de multiplicitate al lui λ_i atunci condiţia (ii) din teorema precedentă nu este satisfăcută deci endomorfismul T nu este diagonalizabil. Dacă $\dim V(\lambda_i)$ este egală cu ordinul de multiplicitate al lui λ_i atunci condiţia (ii) din teorema precedentă este satisfăcută deci endomorfismul T este diagonalizabil. În acest caz baza $\bar{B}$, formată din reuniunea bazelor tuturor subspaţiilor proprii determinate anterior, este bază a lui V_n în raport cu care matricea endomorfismului T are forma diagonală $diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, unde valoarea proprie λ_i se repetă de atâtea ori cât este ordinul ei de multiplicitate.

Exerciţiul 26 *Să se verifice că endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat de*

$$T(\vec{x}) = (4x_1 + 6x_2, -3x_1 - 5x_2, -3x_1 - 6x_2 + x_3), \ \forall\, \vec{x} = (x_1, x_1, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

este diagonalizabil şi să se determine o bază $\bar{B}$ a lui $\mathbb{R}^3$ în raport cu care matricea lui T are forma diagonală.

Fie B baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, i.e. $B_c := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Calculăm $T(\vec{e}_i)$ şi obţinem

$$T(\vec{e}_1) = (4, -3, -3), \ T(\vec{e}_2) = (6, -5, -6), \ T(\vec{e}_3) = (0, 0, 1)$$

deci matricea endomorfismului în baza B, care se formează punând coordonatele vectorilor $T(\vec{e}_i)$ în baza B pe coloană, este

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricei A este $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$ adică, efectuând calculele,

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) = 0$$

Deci rădăcinile caracteristice ale lui T sunt $\lambda_1 = 1$, rădăcină multiplă de ordin 2, şi $\lambda_2 = -2$, rădăcină simplă. Deoarece valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ obţinem că este satisfăcută condiţia (i) din teoremă.

Vom calcula acum subspaţiile proprii $V(1)$ *şi* $V(2)$ *corespunzătoare celor două valori proprii găsite. Avem* $V(1) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) : (A - I_3) X = 0\}$ *şi dacă rezolvăm sistemul liniar şi omogen* $(A - I_3) X = 0$ *obţinem soluţia*

$$X = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Deci $V(1)$ *este generat de vectorii liniari independenţi* $\vec{f_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *şi prin urmare bază în* $V(1)$ *este* $B_1 = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$ *adică* $\dim V(1) = 2$.

Analog $V(-2) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) : (A + 2I_3) X = 0\}$ *şi dacă rezolvăm sistemul liniar şi omogen* $(A + 2I_3) X = 0$ *obţinem soluţia*

$$X = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Deci $V(-2)$ *este generat vectorul nenul* $\vec{f_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, *şi prin urmare bază în* $V(-2)$ *este* $B_2 = \{\vec{f_3}\}$ *adică* $\dim V(-2) = 1$.

Deci $\dim V(1) = 2 =$ *ordinul de multiplicitate al lui* λ_1 *şi* $\dim V(-2) = 1 =$ *ordinul de multiplicitate al lui* λ_2. *deci şi condiţia* (ii) *este îndeplinită. Prin urmare endomorfismul este diagonalizabil şi baza* $\bar{B} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ *este cea în raport cu care matricea lui* T *are forma diagonală deoarece* $T(\vec{f_1}) = \vec{f_1}$, $T(\vec{f_2}) = \vec{f_2}$, $T(\vec{f_3}) = -\vec{f_3}$. *Matricea schimbării de baze de la baza canonică la baza* $\bar{B}$ *este*

$$S = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

iar matricea lui T *în raport cu noua bază* $\bar{B}$ *este dată de*

$$\bar{A} = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

1.5 Exerciţii

1. Să se arate că aplicaţia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dată de $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$ este o transformare liniară. Să se scrie matricea acestei transformări. Să se determine apoi $\operatorname{Ker} T$ şi $\operatorname{Im} T$.

2. Să se verifice dacă următoarele aplicaţii $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ sunt transformări liniare:
   (a) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 + x_3, x_2, 3x_1 - x_2 + x_3)$;
   (b) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 1, x_2 + x_3, x_3 + 2)$;
   (c) $T(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 + x_2, x_1 + x_3, (x_3)^2, x_1 - x_3\right)$.

   În caz afirmativ să se scrie matricea transformării liniare în raport cu bazele canonice.

3. Fie transformarea liniară $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dată prin $T(\vec{e}_1) = 3\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 - \vec{f}_3$ şi $T(\vec{e}_2) = -2\vec{f}_1 - \vec{f}_2 + \vec{f}_3$, unde $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ şi $\bar{B} = \left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right\}$ sunt bazele canonice din $\mathbb{R}^2$ şi respectiv $\mathbb{R}^3$. Să se scrie matricea transformării liniare şi să se determine $T(\vec{x})$, pentru $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ şi apoi $\operatorname{Ker} T$ şi $\operatorname{Im} T$.

4. Fie transformarea liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dată prin $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $T(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ şi $T(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, unde $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ este o bază în $\mathbb{R}^3$. Să se scrie matricea transformării liniare în raport cu baza B.

5. Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune 2 şi două transformări liniare $T_1, T_2 : V \to V$ (endomorfisme). Presupunem că T_1 are în baza $B_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ matricea $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ iar T_2 are în baza $B_2 = \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$ matricea $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Să se afle matricea endomorfismelor $T_1 + T_2$ şi $T_1 \circ T_2$ (definit de $(T_1 \circ T_2)(\vec{x}) := T_1(T_2(\vec{x}))$) în baza B_1 ştiind că $\vec{e}\,'_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

6. Se dă endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$. Să se scrie matricea acestei transformări. Să se determine apoi nucleul $\operatorname{Ker} T$ şi imaginea $\operatorname{Im} T$ precum şi dimensiunea acestor subspaţii (punându-se în evidenţă o bază).

7. Se dă endomorfismul $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(\vec{x}) = (x_3, x_1 + x_4, x_2 - x_4, x_3)$. Să se scrie matricea acestei transformări. Să se determine apoi nucleul $\operatorname{Ker} T$ şi defectul şi apoi imaginea $\operatorname{Im} T$ şi rangul transformării (punându-se în evidenţă o bază).

8. Se dă endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\vec{x}) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$. Să se scrie matricea acestei transformări. Să se determine apoi nucleul $\operatorname{Ker} T$ şi defectul şi apoi imaginea $\operatorname{Im} T$ şi rangul transformării (punându-se în evidenţă o bază).

9. Se dă endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\vec{x}) = (2x_1 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 3x_3)$. Să se scrie matricea acestei transformări. Să se determine apoi nucleul $\operatorname{Ker} T$ şi defectul şi apoi imaginea $\operatorname{Im} T$ şi rangul transformării (punându-se în evidenţă o bază).

10. Să se afle matricea endomorfismului $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $T(1, 2) = (5, 0)$ şi $T(2, 1) = (4, 3)$. Determinaţi $T(\vec{x})$, pentru $x \in \mathbb{R}^2$.

11. Să se afle matricea endomorfismului $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care transformă $(0, 0, 1)$ în $(2, 3, 5)$, $(0, 1, 1)$ în $(1, 0, 0)$ şi $(1, 1, 1)$ în $(0, 1, -1)$ (adică are loc $T(0, 0, 1) = (2, 3, 5)$, $T(0, 1, 1) = (1, 0, 0)$ şi $T(1, 1, 1) = (0, 1, -1)$).

12. Endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are în baza $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Să se scrie matricea acestei transformări în raport cu baza $B_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2\}$ şi apoi în raport cu baza $B_2 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$.

13. Endomorfismul $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ are în baza $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ matricea $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$. Să se scrie matricea acestei transformări în raport cu baza $B_1=\{\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$, unde
$$\begin{cases}\vec{e}_1'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3\\ \vec{e}_1'=2\vec{e}_1+\vec{e}_2+3\vec{e}_3\\ \vec{e}_1'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\,.\end{cases}$$

14. Endomorfismul $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ are în baza
$$B=\{\vec{v}_1=(2,1,1)\,,\vec{v}_2=(1,2,1)\,,\vec{v}_1=(1,1,2)\}$$
matricea $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\-3&0&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}$. Să se scrie matricea acestei transformări şi în raport cu baza
$$\bar{B}=\{\vec{w}_1=(1,-1,0)\,,\vec{w}_2=(0,1,-1)\,,\vec{w}_3=(2,0,2)\}\,.$$

15. Fie două endomorfisme $T_1,T_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. Presupunem că T_1,T_2 au în baza $B_1=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ matricele $A_1=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&2&1\\1&2&3\end{bmatrix}$ şi respectiv $A_2=\begin{bmatrix}-1&4&2\\0&4&1\\0&0&5\end{bmatrix}$. Determinaţi imaginea lui $\vec{v}=(1,3,-2)$ prin T_1,T_2 şi apoi prin T_1+T_2.

16. Fie endomorfismul $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dat de $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2,x_2+x_3,x_1+x_3)$. Determinaţi nucleul lui T precum şi valorile şi vectorii proprii.

Rezolvare:

Vom determina, mai întâi, matricea transformării liniare T în raport cu baza canonică B_c a lui $\mathbb{R}^3$, $B_c:=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Calculăm $T(\vec{e}_i)$ şi obţinem
$$T(\vec{e}_1)=(1,0,1)\,,\ T(\vec{e}_2)=(-1,1,0)\,,\ T(\vec{e}_3)=(0,1,1)\,,$$
deci matricea endomorfismului în baza canonică B_c, care se formează punând coordonatele vectorilor $T(\vec{e}_i)$ în baza B_c pe coloană, este
$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}.$$
Prin definiţie
$$\operatorname{Ker}(T):=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3:T(\vec{x})=\vec{0}\right\}.$$
Deci $\vec{x}\in\operatorname{Ker}(T)$ dacă şi numai dacă $T(\vec{x})=\vec{0}$ ceea ce se reduce la sistemul
$$\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_2+x_3=0\\x_1+x_3=0.\end{cases}$$
Rangul matricei sistemului este $\operatorname{rang}A=2$ deoarece $\det A=\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=0$ şi $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}\neq0$. Sistemul se reduce, notând cu $\alpha:=x_3\in\mathbb{R}$,
$$\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_2=-\alpha.\end{cases}$$

care are soluţia $\{(-\alpha,-\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Deci soluţia $\vec{x} = -\alpha\,(1,1,-1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, adică

$$\mathrm{Ker}\,(T) := \{(-\alpha,-\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{-\alpha\,(1,1,-1) : \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Prin urmare $\mathrm{Ker}\,(T) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $(1,1,-1)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Pentru a determina valorile proprii scriem ecuaţia caracteristică a transformării T,

$$p\,(\lambda) = \det\,(A - \lambda I_3) = 0. \tag{5}$$

Obţinem echivalent

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda\left(\lambda^2 - 3\lambda + 3\right) = 0$$

care au soluţiile $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_{2,3} = \dfrac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Deci valoarea proprie este doar $\lambda_1 = 0 \in K := \mathbb{R}$ (deoarece $\lambda_{2,3} \notin \mathbb{R}$).

Vom calcula acum subspaţiile proprii $V\,(\lambda)$ corespunzătoare valorilor proprii λ găsite.

Avem

$$V\,(\lambda_1) = V\,(0) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}\,(\mathbb{R}) : (A - \lambda_1 I_3)\,X = 0\}\,,$$

sau echivalent

$$V\,(\lambda_1) = V\,(0) := \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : T\,(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x}\right\} = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : T\,(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Trebuie deci rezolvat sistemul liniar şi omogen

$$(A - \lambda I_3)\,X = 0, \tag{6}$$

care în cazul nostru devine

$$\begin{cases} (1-\lambda)\,x_1 - x_2 = 0 \\ (1-\lambda)\,x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)\,x_3 = 0 \end{cases}$$

unde λ este o valoare proprie.

Pentru $\lambda_1 = 0$, obţinem sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

care este exact cel iniţial pentru obţinerea nucleului şi care are soluţia $\{(-\alpha,-\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Deci

$$V\,(0) := \{(-\alpha,-\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{-\alpha\,(1,1,-1) : \alpha \in \mathbb{R}\}\,,$$

prin urmare $V\,(0) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $(1,1,-1)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 0$, este deci $\vec{v}_1 = (1,1,-1)$ (este cel care verifică relaţia $T\,(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$).

17. Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat de $T(x_1, x_1, x_3) = (x_1, x_2 + x_3, 2x_3)$. Determinaţi valorile şi vectorii proprii şi scrieţi $T(\vec{x})$, unde $\vec{x} = (2, 0, 1)$. Determinaţi şi subspaţii invariante în raport cu T care au dimensiunea 1.

Rezolvare:

Evident $T(2, 0, 1) = (2, 1, 2)$.

Vom determina, mai întâi, matricea transformării liniare T în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Scriem

$$T(\vec{e}_1) = (1, 0, 0),\ T(\vec{e}_2) = (0, 1, 0),\ T(\vec{e}_3) = (0, 1, 2),$$

deci matricea endomorfismului în baza canonică este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pentru a determina valorile proprii scriem ecuaţia caracteristică a transformării T,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0.$$

Obţinem echivalent

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0.$$

Rădăcinile întregi se găsesc printre divizorii termenului liber. Găsim că $\lambda_1 = 1$ este rădăcină. Folosind schema lui Horner obţinem

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 + 3\lambda - 2\right) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(-\lambda + 2) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

(am mai aplicăm încă o dată schema lui Horner).

Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ şi $\lambda_3 = 2$ (evident $\lambda_i \in K := \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$).

Vom calcula acum subspaţiile proprii $V(\lambda)$ corespunzătoare valorilor proprii λ găsite.

Determinăm

$$V(\lambda_1) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : (A - \lambda_1 I_3) X = 0\} = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : T(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x}\right\},$$

deci trebuie rezolvat sistemul liniar şi omogen

$$(A - \lambda_1 I_3) X = 0 \tag{7}$$

adică

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1) x_1 = 0 \\ (1 - \lambda_1) x_2 + x_3 = 0 \\ (2 - \lambda_1) x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0 \\ 0 \cdot x_2 + x_3 = 0 \\ 1 \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x_3 = 0$$

care are soluţia $\{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Deci

$$V(1) := \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

prin urmare $V(1) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 2 (iar vectorii $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ şi $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$, sunt deci $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ şi $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$ (sunt cei care verifică relaţia $T(\vec{v}_i) = \lambda_1 \vec{v}_i$, $i = \overline{1,2}$).

Determinăm

$$V(2) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_3)X = 0\} = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : T(\vec{x}) = 2\vec{x}\right\},$$

deci sistemul liniar şi omogen (7) devine

$$\begin{cases} -1 \cdot x_1 = 0 \\ -1 \cdot x_2 + x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $\{(0, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Deci

$$V(2) := \{(0, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(0, 1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

prin urmare $V(2) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v}_3 = (0, 1, 1)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 2$ este deci $\vec{v}_3 = (0, 1, 1)$ (este cel care verifică relaţia $T(\vec{v}_3) = 2\vec{v}_3$).

Pentru a determina subspaţii invariante în raport cu T folosim definiţia. Deci $V' \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu invariant în raport cu T dacă pentru orice $\vec{v} \in V'$ avem că $T(\vec{v}) \in V'$.

Prin urmare, dacă $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ este vector propriu, i.e. $\vec{v} \in V(\lambda)$, atunci, prin definiţie $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ care este evident din $V(\lambda)$.

Deci $V(1)$ şi $V(2)$ sunt subspaţii invariante în raport cu T. Dacă dorim subspaţii invariante în raport cu T de dimensiune 1, atunci luăm

$$V^1 := \{\alpha(1, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}, \; V^2 := \{\beta(0, 1, 0) : \beta \in \mathbb{R}\}, \; V^3 := \{\alpha(0, 1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

care sunt invariante şi de dimensiune 1.

18. Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat de $T(x_1, x_1, x_3) = (x_3, x_2, -x_1 - x_3)$. Determinaţi valorile şi vectorii proprii. Determinaţi şi subspaţii invariante în raport cu T care au dimensiunea 1.

Rezolvare:

Vom determina, mai întâi, matricea transformării liniare T în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Obţinem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pentru a determina valorile proprii scriem ecuaţia caracteristică a transformării T, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$ şi obţinem

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)\left(1 + \lambda + \lambda^2\right) = 0.$$

Obţinem valoarea proprie $\lambda_1 = 1$ (soluţiile $\lambda_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ nu sunt valori proprii, $\lambda_{2,3} \notin \mathbb{R}$).

Vom calcula acum subspaţiile proprii $V(\lambda)$ corespunzătoare valorilor proprii λ găsite.

Determinăm

$$V(1) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : (A - I_3)X = 0\} = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : T(\vec{x}) = \vec{x}\right\},$$

deci trebuie rezolvat sistemul liniar şi omogen $(A - I_3)\, X = 0$, adică

$$\begin{cases} (-\lambda) \cdot x_1 + x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_2 = 0 \\ -1 \cdot x_1 + (-1-\lambda)\, x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $\{(0,\alpha,0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Deci

$$V(1) := \{(0,\alpha,0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha\,(0,1,0) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

prin urmare $V(1) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este deci $\vec{v}_1 = (0,1,0)$ (este cel care verifică relaţia $T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$).

Dacă $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ este vector propriu, i.e. $\vec{v} \in V(\lambda)$, atunci, prin definiţie $T(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{v} \in V(\lambda_1)$ (evident).

Dacă dorim subspaţii invariante în raport cu T de dimensiune 1, atunci luăm

$$V^1 := \{\alpha\,(0,1,0) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

care este invariant şi de dimensiune 1.

19. Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a cărui matrice în raport cu baza canonică este $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Determinaţi valorile şi vectorii proprii ai lui T. Studiaţi dacă endomorfismul T este diagonalizabil.

Rezolvare:

Pentru a determina valorile proprii rezolvăm ecuaţia caracteristică a transformării T,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0.$$

Rădăcinile întregi se găsesc printre divizorii termenului liber. Găsim că $\lambda_1 = 2$ este rădăcină. Folosind schema lui Horner obţinem

$$-\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda-10 = (\lambda-2)\left(-\lambda^2+4\lambda+5\right) = (\lambda-2)(\lambda+1)(-\lambda+5) = -(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-5)$$

(am mai aplicăm încă o dată schema lui Horner).

Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ şi $\lambda_3 = 5$ (evident $\lambda_i \in K := \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$).

Vom calcula acum subspaţiile proprii $V(\lambda)$ corespunzătoare valorilor proprii λ găsite.

Determinăm $V(2)$ prin rezolvarea sistemului liniar şi omogen $(A - 2I_3)\, X = 0$, adică

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $\{(-\alpha, \alpha/2, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Deci

$$V(2) := \{(-\alpha,\alpha/2,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \left\{\frac{-\alpha}{2}\,(2,-1,-2) : \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

prin urmare $V(2) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v} = (2,-1,-2)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 2$ este $\vec{v}_1 = (2,-1,-2)$ (este cel care verifică relaţia $T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$).

Similar, determinăm $V(-1)$ prin rezolvarea sistemului liniar şi omogen

$$(A + I_3) X = 0$$

adică

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $\{(2\alpha, 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Deci

$$V(-1) := \{(2\alpha, 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha (2,2,1) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

prin urmare $V(-1) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v} = (2,2,1)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este $\vec{v}_2 = (2,2,1)$.

Similar, determinăm $V(5)$ prin rezolvarea sistemului liniar şi omogen

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $\{(\alpha/2, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Deci

$$V(-1) := \left\{ \frac{\alpha}{2} (1,-2,2) : \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

prin urmare $V(-1) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v} = (1,-2,2)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 5$ este $\vec{v}_3 = (1,-2,2)$.

Folosim acum teorema de diagonalizare a unui endomorfism. Verificăm condiţiile teoremei şi avem:

(i) toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt valori proprii pentru T (sunt toate din $\mathbb{R}$) şi

(ii) ordinul de multiplicitate al fiecărei valori proprii λ_i este egal cu dimensiunea subspaţiului propriu $V(\lambda_i)$ (deoarece toate cele trei rădăcini au multiplicitatea 1 care coincide cu dimensiunea subspaţiilor proprii corespunzătoare, adică $\dim V(2) = \dim V(-1) = \dim V(5) = 1$).

Deci endomorfismul dat este diagonalizabil şi $\bar{B} := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(2,-1,-2), (2,2,1), (1,-2,2)\}$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$ în raport cu care T are forma diagonală, deoarece $T(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1$, $T(\vec{v}_2) = -\vec{v}_2$, $T(\vec{v}_3) = 5\vec{v}_3$. Matricea schimbării de baze de la baza canonică la baza $\bar{B}$ este

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

iar matricea lui T în raport cu noua bază $\bar{B}$ este dată de

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= S^{-1}\cdot A\cdot S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \\ 5 & -10 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

20. Fie endomorfismul $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dat de $T(x_1,x_1,x_3) = (-3x_1+2x_2,-5x_1+4x_2,2x_1-2x_2-x_3)$. Determinaţi valorile şi vectorii proprii ai lui T. Studiaţi dacă endomorfismul T este diagonalizabil.

Rezolvare:

Citim matricea în baza canonică

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Pentru a determina valorile proprii rezolvăm ecuaţia caracteristică a transformării T,

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 0 \\ -5 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3+3\lambda+2=0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-2)=0.$$

Deci valorile proprii sunt $\lambda_1=-1$, $m_1=2$ şi $\lambda_2=2$, $m_2=1$ (care sunt toate din câmpul $\mathbb{R}$).
Determinăm $V(\lambda)$ prin rezolvarea sistemului liniar şi omogen $(A-\lambda I_3)X=0$, adică

$$\begin{cases} (-3-\lambda)x_1+2x_2=0 \\ -5x_1+(4-\lambda)x_2=0 \\ 2x_1-2x_2+(-1-\lambda)x_3=0 \end{cases}$$

Pentru $\lambda=-1$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} -2x_1+2x_2=0 \\ -5x_1+5x_2=0 \\ 2x_1-2x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x_1-x_2=0 \right.$$

care are soluţia $\{(\alpha,\alpha,\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$.
Deci

$$V(-1) := \{(\alpha,\alpha,\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\} = \{\alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\},$$

prin urmare $V(-1)\subset\mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 2 (iar vectorii $\vec{v}_1=(1,1,0)$ şi $\vec{v}_2=(0,0,1)$ formează o bază în acest subspaţiu).
Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1=-1$ sunt $\vec{v}_1=(1,1,0)$ şi $\vec{v}_2=(0,0,1)$.
Pentru $\lambda=2$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} -5x_1+2x_2=0 \\ -5x_1+2x_2=0 \\ 2x_1-2x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

care are soluţia $\left\{\left(-\alpha, -\frac{5}{2}\alpha, \alpha\right) : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

Deci

$$V(2) := \left\{\left(-\alpha, -\frac{5}{2}\alpha, \alpha\right) : \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{-\alpha}{2}(2, 5, -2) : \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

prin urmare $V(2) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v} = (2, 5, -2)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 2$ este $\vec{v}_3 = (2, 5, -2)$.

Folosim acum teorema de diagonalizare a unui endomorfism. Avem $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pentru $i = \overline{1,3}$ şi $\dim V(\lambda_1) = \dim V(-1) = 2 = m_1$ şi $\dim V(\lambda_2) = \dim V(2) = 1 = m_2$.

Deci endomorfismul dat este diagonalizabil şi $\bar{B} := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 5, -2)\}$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$ în raport cu care T are forma diagonală, deoarece $T(\vec{v}_1) = -\vec{v}_1$, $T(\vec{v}_2) = -\vec{v}_2$, $T(\vec{v}_3) = 2\vec{v}_3$. Matricea schimbării de baze de la baza canonică la baza $\bar{B}$ este

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

iar matricea lui T în raport cu noua bază $\bar{B}$ este dată de

$$\begin{aligned} \bar{A} &= S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -2/3 & -1 \\ -2/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

21. Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat de $T(x_1, x_1, x_3) = (2x_1, x_1 + 4x_2 - 2x_3, 7x_1 + 7x_2 - 5x_3)$. Determinaţi valorile şi vectorii proprii ai lui T. Studiaţi dacă endomorfismul T este diagonalizabil.

Rezolvare:

Citim matricea în baza canonică

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 7 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

Pentru a determina valorile proprii rezolvăm ecuaţia caracteristică a transformării T,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & -2 \\ 7 & 7 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 2)^2(\lambda + 3) = 0.$$

Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 2$, $m_1 = 2$ şi $\lambda_2 = -3$, $m_2 = 1$ (care sunt toate din câmpul $\mathbb{R}$).

Determinăm $V(\lambda)$ prin rezolvarea sistemului liniar şi omogen $(A - \lambda I_3) X = 0$, adică

$$\begin{cases} (2-\lambda) x_1 = 0 \\ x_1 + (4-\lambda) x_2 - 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 7x_2 + (-5-\lambda) x_3 = 0 \end{cases}$$

Pentru $\lambda = 2$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $\{(0, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Deci

$$V(2) := \{(0, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha (0, 1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

prin urmare $V(2) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v}_1 = (0, 1, 1)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 2$ este $\vec{v}_1 = (0, 1, 1)$.

Pentru $\lambda = -3$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} 5x_1 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $\{(0, 2\alpha/7, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Deci

$$V(-3) := \{(0, 2\alpha/7, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \left\{\frac{\alpha}{7} (0, 2, 7) : \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

prin urmare $V(-3) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v}_2 = (0, 2, 7)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -3$ este $\vec{v}_3 = (0, 2, 7)$.

Folosim acum teorema de diagonalizare a unui endomorfism. Avem $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pentru $i = \overline{1, 2}$ dar $\dim V(\lambda_1) = \dim V(2) = 1 \neq 2 = m_1$.

Deci endomorfismul dat nu este diagonalizabil (nu este necesar să mai verificăm şi pentru a doua valoare proprie).