

Facultatea de Electronică, Telecomunicații
și Tehnologia Informației
Algebră, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC
<http://math.etti.tuiasi.ro/maticiuc/>

CURS VIII – X

1 Forme biliniare și forme pătratice

1.1 Forme bilinare. Definiții, proprietăți generale

Fie V un K -spațiu vectorial n -dimensional.

Definiția 1 O aplicație $\mathcal{A} : V \times V \rightarrow K$ se numește **formă biliniară** pe V dacă satisface condițiile:

- (i) $\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\mathcal{A}(\vec{y}, \vec{z}), \forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ (i.e., \mathcal{A} este operator liniar în raport cu primul argument),
(ii) $\mathcal{A}(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) + \beta\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{z}), \forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ (i.e., \mathcal{A} este operator liniar în raport cu al doilea argument).

Vom nota cu $\mathcal{L}_2(V) = \{\mathcal{A} : V \times V \rightarrow K : \mathcal{A} \text{ este formă biliniară}\}$.

Propoziția 2 Mulțimea $\mathcal{L}_2(V)$ este un spațiu vectorial peste K , numit **spațiul vectorial al formelor biliniare definite pe K -spațiul vectorial V** .

Fie $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ o bază în V . Fie $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_2(V)$ și $\vec{x}, \vec{y} \in V$ cu descompunerea

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i, \quad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n = \sum_{j=1}^n y_j\vec{e}_j.$$

Atunci vom obține

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j\vec{e}_j\right) = (\text{din liniaritate}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \mathcal{A}(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij}, \quad (1)$$

unde $a_{ij} := \mathcal{A}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$.

Expresia (1) reprezintă **expresia în coordonate a formei biliniare \mathcal{A}** în raport cu baza B . Vom nota cu $A = (a_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ numită **matricea coordonatelor formei biliniare \mathcal{A}** în raport cu baza B . Astfel, folosind (1), obținem **expresia matriceală a formei biliniare \mathcal{A}** în raport cu baza B

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = X^t \cdot A \cdot Y,$$

unde X, Y reprezintă matricile coloană ale vectorilor \vec{x} și \vec{y} în baza B .

Corolarul 3 Se poate arăta dimensiunea spațiului vectorial $\mathcal{L}_2(V)$ este $\dim \mathcal{L}_2(V) = \dim \mathcal{M}_n(K) = n^2$.

Prezentăm în continuare cum se schimbă matricea A la o schimbare de baze. Fie $\bar{B} = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ o nouă bază în V cu $S = (s_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$ matricea schimbării de baze, $B \xrightarrow{S} \bar{B}$. Atunci $\vec{f}_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} \vec{e}_i$ și, notând $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$, unde $\bar{a}_{ij} = \mathcal{A}(\vec{f}_i, \vec{f}_j)$, obținem

$$\bar{a}_{ij} = \mathcal{A}(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^n s_{ki} \vec{e}_k, \sum_{l=1}^n s_{lj} \vec{e}_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n s_{ki} s_{lj} \mathcal{A}(\vec{e}_k, \vec{e}_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n s_{ki} s_{lj} a_{kl}, \quad i, j \in \overline{1,n}.$$

Deci, sub formă matriceală obținem următoarea **formulă matriceală de schimbare a coordonatelor la schimbare de baze**

$$\bar{A} = S^t \cdot A \cdot S. \quad (2)$$

Prin definiție, rangul unei forme biliniare este rangul matricii sale într-o bază oarecare a lui V (menționăm că matricea S este nesingulară și, din relația (2), deducem că rangul matricii \bar{A} este egal cu rangul matricii A , deci rangul matricii formei este invariant la schimbări de baze).

Definiția 4 O formă biliniară se numește nedegenerată dacă rangul ei coincide cu dimensiunea n a spațiului V (și degenerată caz contrar).

Definiția 5 O formă biliniară \mathcal{A} se numește simetrică dacă $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{y}, \vec{x})$, pentru orice $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

Se poate arăta că:

Propoziția 6 O formă biliniară \mathcal{A} este simetrică dacă și numai dacă există o bază a lui V în raport cu care matricea formei este simetrică.

1.2 Forme pătratică. Definiții, proprietăți generale

Fie V un K -spațiu vectorial n -dimensional.

Definiția 7 O aplicație $\mathcal{Q} : V \rightarrow K$ se numește **formă pătratică** pe V dacă există o formă biliniară simetrică $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_2(V)$ astfel încât

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}, \vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in V. \quad (3)$$

Propoziția 8 Mulțimea tuturor formelor pătratice $\mathcal{Q} : V \rightarrow K$ este un spațiu vectorial peste K .

Propoziția 9 Dacă \mathcal{Q} este o formă pătratică atunci forma biliniară simetrică \mathcal{A} de la care provine este unic determinată.

Demonstrație. Din (3) obținem

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\vec{x} + \vec{y}) &= \mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x}, \vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) + \mathcal{A}(\vec{y}, \vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y}, \vec{y}) \\ &= \mathcal{A}(\vec{x}, \vec{x}) + 2\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) + \mathcal{A}(\vec{y}, \vec{y}) = \mathcal{Q}(\vec{x}) + \mathcal{Q}(\vec{y}) + 2\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}), \end{aligned}$$

deci \mathcal{A} este unic determinată de egalitatea

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} [\mathcal{Q}(\vec{x} + \vec{y}) - \mathcal{Q}(\vec{x}) - \mathcal{Q}(\vec{y})], \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$$

■ Fie $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ o bază în V . Fie \mathcal{Q} o formă pătratică și $\vec{x} \in V$ dat de descompunerea $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$. Atunci vom obține

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\vec{x}) &= \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j\right) = (\text{din liniaritate}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \mathcal{A}(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j a_{ij}. \end{aligned} \quad (4)$$

Expresia (4) reprezintă **expresia în coordonate a formei pătratice** Q în raport cu baza B . Folosind matricea A obținem și **expresia matriceală a formei pătratice** Q în raport cu baza B

$$Q(\vec{x}) = X^t \cdot A \cdot X,$$

unde X reprezintă matricea coloană a vectorului \vec{x} în baza B .

Definiția 10 Matricea unei forme pătratice Q este prin definiție matricea A a formei biliniare asociate iar rangul unei forme pătratice este rangul acestei matrice.

Definiția 11 O formă pătratică se numește nedegenerată dacă rangul ei coincide cu dimensiunea n a spațiului V .

Exercițiul 12 Fie forma pătratică $Q(\vec{x}) = Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$. Forma biliniară asociată lui Q se obține prin dedublare. Mai precis, urmăm următoarele asocieri:

$$\begin{aligned} (x_i)^2 &= x_i x_i \rightsquigarrow x_i y_i, \\ x_i x_j &= \frac{1}{2} x_i x_j + \frac{1}{2} x_j x_i \rightsquigarrow \frac{1}{2} x_i y_j + \frac{1}{2} x_j y_i. \end{aligned} \tag{5}$$

Deci avem

$$Q(\vec{x}) = Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 + 2 \cdot 2x_1x_3 + 3 \cdot 2x_2x_3$$

și prin dedublare obținem

$$\begin{aligned} A(\vec{x}, \vec{y}) &= A(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + 2x_1 y_3 + 2y_1 x_3 + 3x_2 y_3 + 3y_2 x_3 \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_1 y_3 + 2x_3 y_1 + 3x_2 y_3 + 3x_3 y_2. \end{aligned}$$

Se vor calcula $A(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ și vom obține matricea A a coordonatelor lui Q în raport cu baza canonică

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Se va determina rangul matricii și se va obține $\text{rang} Q = \text{rang} A = 3$.

1.3 Forma canonică a unei forme pătratice

Fie V un K -spațiu vectorial n -dimensional.

Definiția 13 Spunem că forma pătratică Q este redusă la forma canonică, dacă s-a găsit o bază $\vec{B} = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ a lui V , în raport cu care expresia în coordonate a lui Q este

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 (y_1)^2 + \lambda_2 (y_2)^2 + \dots + \lambda_n (y_n)^2, \tag{6}$$

unde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ nu sunt, în mod necesar, toți nenuli iar

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \text{ (descompunerea în baza } B) \\ &= y_1 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2 + \dots + y_n \vec{f}_n \text{ (descompunerea în baza } \vec{B}). \end{aligned}$$

Definiția 14 O formă pătratică Q se numește pozitiv definită dacă toți cei n coeficienți sunt strict pozitivi. Forma pătratică Q se numește negativ definită dacă toți cei n coeficienți sunt strict negativi. Forma pătratică Q se numește nedefinită dacă există și coeficienți strict pozitivi și coeficienți strict negativi.

Problema este dacă există baze \bar{B} în raport cu care expresia unei forme pătratice să fie de forma canonică (6).

Răspunsul este dat de următoarele trei metode: **metoda lui Gauss**, **metoda lui Jacobi** și **metoda transformărilor ortogonale**. Prezentăm, fără demonstrație, aceste rezultate, metodele fiind aplicate în câteva exemple ulterioare.

Teorema 15 (Metoda lui Gauss) Fie Q o forma pătratică. Atunci există cel puțin o bază \bar{B} a lui V și corespunzător acesteia există scalarii $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, în raport cu care expresia în coordonate a lui Q are forma canonică (6).

Remarca 16 Demonstrația teoremei lui Gauss ne oferă și algoritmul practic de reducere la forma canonică a unei forme pătratice Q , precum și modul de determinare al bazei \bar{B} . Astfel, conform demonstrației teoremei, avem următoarele situații:

1. dacă forma pătratică conține cel puțin un pătrat $(x_i)^2$, atunci grupăm toți termenii care conțin termenul x_i și formăm un pătrat perfect folosind identitatea $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
2. dacă forma pătratică nu conține nici un pătrat dar apare termenul $x_i x_j$, atunci facem schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k, \forall k \neq i, j. \end{cases}$$

Prin înlocuirea în formă pătratică, vor apărea pătratele $(y_i)^2$ și $(y_j)^2$, deci suntem în primul caz.

Exercițiul 17 Se dă forma pătratică

$$Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, Q(\vec{x}) = 5(x_1)^2 + 6(x_2)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Să se scrie forma biliniară simetrică din care provine Q și să se determine matricea formei pătratice în raport cu baza canonică și să se calculeze rangul formei.

De asemenea, să se aducă forma pătratică la forma canonică prin metoda lui Gauss.

Rezolvare:

Forma biliniară asociată se scrie folosind tehnica de dedublare (vezi (5)) și obținem

$$\begin{aligned} A(\vec{x}, \vec{y}) &= 5x_1y_1 + 6x_2y_2 + 4x_3y_3 - 4\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - 4\frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) \\ &= 5x_1y_1 + 6x_2y_2 + 4x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Prin definiție,

$$Q(\vec{x}) = X^t \cdot A \cdot X,$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui \vec{x} , iar A este matricea formei biliniare simetrice corespunzătoare A .

Calculând $a_{ij} = A(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ obținem matricea

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

deci

$$Q(\vec{x}) = X^t \cdot A \cdot X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Rangul formei va fi atunci $\text{rang } Q = \text{rang } A = \text{rang } A = 3$, adică forma biliniară (și cea pătratică) este nedegenerată.

Aducem acum forma pătratică la forma canonică. În cazul nostru, apare pătratul $5(x_1)^2$ și termenii x_1x_2 , x_1x_3 . Apare și pătratul $6(x_2)^2$ și apoi x_1x_2 . Alegem, pentru simplitate, să plecăm de la termenul x_2 și deci grupăm toți termenii care conțin termenul x_2 și formăm un pătrat perfect

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}(\vec{x}) &= (6(x_2)^2 - 4x_1x_2) + 5(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3 \\
 &= \frac{1}{6}((6x_2)^2 - 24x_1x_2) + 5(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3 \\
 &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 - \frac{1}{6}(2x_1)^2 + 5(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3 \\
 &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + (4(x_3)^2 - 4x_1x_3) + \frac{13}{3}(x_1)^2 \\
 &= (\text{putem pleca și de la } \frac{13}{3}(x_1)^2, \text{ dar pentru simplitatea calculelor plecăm de la } 4(x_3)^2) \\
 &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{1}{4}((4x_3)^2 - 16x_1x_3) + \frac{13}{3}(x_1)^2 \\
 &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{1}{4}(4x_3 - 2x_1)^2 - \frac{1}{4}(2x_1)^2 + \frac{13}{3}(x_1)^2 \\
 &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{1}{4}(4x_3 - 2x_1)^2 + \frac{10}{3}(x_1)^2 \\
 &= \frac{1}{6}(y_1)^2 + \frac{1}{4}(y_2)^2 + \frac{10}{3}(y_3)^2,
 \end{aligned}$$

unde

$$\begin{cases} y_1 = -2x_1 + 6x_2 \\ y_2 = -2x_1 + 4x_3 \\ y_3 = x_1. \end{cases} \quad (7)$$

Deoarece toți coeficienții $1/6, 3/13$ și $40/13$ sunt strict pozitivi, deducem că forma pătratică dată este pozitiv definită.

Să determinăm în continuare baza \bar{B} în raport cu care forma pătratică \mathcal{Q} are forma canonică de mai sus.

Rezolvăm sistemul de mai sus astfel încât să determinăm coordonatele x_i în raport de coordonatele y_j . Vom obține

$$\begin{cases} x_1 = y_3 \\ x_2 = \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{2}y_3. \end{cases}$$

deci

$$X = SY \Leftrightarrow Y = S^{-1}X,$$

unde

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Evident puteam citi și direct din (7) matricea $S^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dar, prin definiție, matricea S este matricea schimbării de baze de la B_c la baza $\bar{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ în raport cu care forma pătratică \mathcal{Q} are forma canonică $\mathcal{Q}(\vec{x}) = \frac{1}{6}(y_1)^2 + \frac{1}{4}(y_2)^2 + \frac{10}{3}(y_3)^2$.

Deci citim coordonatele din matricea S și obținem $\vec{f}_1 = (0, 1/6, 0)$, $\vec{f}_2 = (0, 0, 1/4)$, $\vec{f}_3 = (1, 1/3, 1/2)$.
Evident, din forma canonică, citim că forma pătratică are în raport cu această nouă bază matricea

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \text{Într-adevăr, conform formulei de schimbare a matricei } A \text{ la schimbare de baze,}$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= S^t A S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/3 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 10/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 10/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Teorema 18 (Metoda lui Jacobi) Fie Q o forma pătratică astfel încât $\text{rang } Q = n$. Atunci există o bază B a lui V în care determinanții

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sunt toți nenuli, și există o bază $\bar{B} = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ a lui V în raport cu care expresia în coordonate a lui h are forma canonică

$$Q(\vec{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} (y_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} (y_2)^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} (y_n)^2,$$

unde $\vec{x} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{f}_i$.

Remarca 19 Prezentăm în continuare tehnica concretă de găsire a bazei $\bar{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ (am luat, pentru simplitatea expunerii $n = 3$) în raport cu care are loc scrierea canonică a lui Q . Vom considera că relațiile de legătură dintre \vec{f}_i și \vec{e}_j sunt următoarele:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = c_{11} \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = c_{21} \vec{e}_1 + c_{22} \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = c_{31} \vec{e}_1 + c_{32} \vec{e}_2 + c_{33} \vec{e}_3. \end{cases}$$

Calculul coeficienților c_{ij} se face impunând condițiile suplimentare

$$\mathcal{A}(\vec{f}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j, \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

Obținem astfel sistemele

$$\mathcal{A}(\vec{f}_1, \vec{e}_1) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}(c_{11} \vec{e}_1, \vec{e}_1) = c_{11} \mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = c_{11} a_{11} = 1, \tag{8}$$

și

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathcal{A}(\vec{f}_2, \vec{e}_1) = 0, \\ \mathcal{A}(\vec{f}_2, \vec{e}_2) = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A}(c_{21} \vec{e}_1 + c_{22} \vec{e}_2, \vec{e}_1) = 0, \\ \mathcal{A}(c_{21} \vec{e}_1 + c_{22} \vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{21} \mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + c_{22} \mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 0, \\ c_{21} \mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + c_{22} \mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1 \end{cases} \tag{9} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_{21} a_{11} + c_{22} a_{21} = 0, \\ c_{21} a_{12} + c_{22} a_{22} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

și respectiv

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\vec{f}_3, \vec{e}_1) = 0, \\ \mathcal{A}(\vec{f}_3, \vec{e}_2) = 0, \\ \mathcal{A}(\vec{f}_3, \vec{e}_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A}(c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0, \\ \mathcal{A}(c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0, \\ \mathcal{A}(c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_{31}\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + c_{32}\mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + c_{33}\mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0, \\ c_{31}\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + c_{32}\mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + c_{33}\mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0, \\ c_{31}\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_3) + c_{32}\mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + c_{33}\mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{31}a_{11} + c_{32}a_{21} + c_{33}a_{31} = 0, \\ c_{31}a_{12} + c_{32}a_{22} + c_{33}a_{32} = 0, \\ c_{31}a_{13} + c_{32}a_{23} + c_{33}a_{33} = 1 \end{cases} \quad (10)$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Exercițiul 20 Se dă forma pătratică Q de la Exercițiul 17. Să se aducă forma pătratică Q la forma canonică prin metoda lui Jacobi.

Rezolvare:

Matricea formei pătratice este

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculăm determinanții

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80.$$

Deci forma canonică va fi

$$Q(\vec{x}) = \frac{1}{5}(y_1)^2 + \frac{5}{26}(y_2)^2 + \frac{13}{40}(y_3)^2.$$

Pentru a determina baza $\vec{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ în care are loc această scriere canonică a lui Q , considerăm că relațiile de legătură dintre \vec{f}_i și \vec{e}_j sunt următoarele:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3. \end{cases}$$

Calculul coeficienților c_{ij} se face impunând condițiile suplimentare

$$\mathcal{A}(\vec{f}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j, \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

În cazul nostru sistemul (8–10) de mai sus devin, în particular,

$$5c_{11} = 1 \Leftrightarrow c_{11} = 1/5$$

și

$$\begin{cases} 5c_{21} - 2c_{22} = 0, \\ -2c_{21} + 6c_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow c_{21} = 1/13, c_{22} = 5/26$$

și respectiv

$$\begin{cases} 5c_{31} - 2c_{32} - 2c_{33} = 0, \\ -2c_{31} + 6c_{32} = 0, \\ -2c_{31} + 4c_{33} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow c_{31} = 3/20, c_{32} = 1/20, c_{33} = 13/40.$$

Prin urmare noua bază în raport cu care Q are forma canonică este

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \frac{1}{5}\vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = \frac{1}{13}\vec{e}_1 + \frac{5}{26}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = \frac{3}{20}\vec{e}_1 + \frac{1}{20}\vec{e}_2 + \frac{13}{40}\vec{e}_3. \end{cases}$$

Citim matricea schimbării de baze

$$S = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/13 & 3/20 \\ 0 & 5/26 & 1/20 \\ 0 & 0 & 13/40 \end{bmatrix}.$$

Calculăm

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 26/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 40/13 \end{bmatrix}$$

Deoarece legătura dintre cele două tipuri de coordonate (în funcția de baza în care se face descompunerea) este

$$X = SY \Leftrightarrow Y = S^{-1}X,$$

deducem că

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/13 & 3/20 \\ 0 & 5/26 & 1/20 \\ 0 & 0 & 13/40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

sau echivalent

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 26/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 40/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Deci

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}y_1 + \frac{1}{13}y_2 + \frac{3}{20}y_3 \\ x_2 = \frac{5}{26}y_2 + \frac{1}{20}y_3 \\ x_3 = \frac{13}{40}y_3 \end{cases}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ y_2 = \frac{26}{5}x_2 + \frac{1}{20}y_3 \\ y_3 = \frac{13}{40}y_3 \end{cases}$$

Remarca 21 Cea de a treia metodă este **metoda transformărilor ortogonale (sau a valorilor proprii)**. Fie forma pătratică Q dată de $Q(\vec{u}) = X^t \cdot A \cdot X$. Fie transformarea liniară T care are drept matrice tot pe A . Deoarece A este simetrică, se poate arăta că ea va avea valori proprii reale și simple (adică diferite între ele) iar vectorii proprii corespunzători vor fi ortogonali doi câte doi. Normând acești vectori vom obține deci niște versori (vectori de normă 1) ortogonali doi câte doi. Aceștia vor forma o nouă bază \vec{B} și în raport

cu aceeași transformarea liniară T este diagonalizabilă matricea nouă fiind diagonală având valorile proprii pe diagonala principală, și deci Q va avea o formă canonică în raport cu această nouă bază \bar{B} .

Într-adevăr, dacă are loc relația $X = SY$ unde $B \xrightarrow{S} \bar{B}$ iar S se poate arăta, folosind definiția bazei \bar{B} , că este matrice ortogonală (i.e. $S^{-1} = S^t$) și X, Y reprezintă matricele coloană ale vectorului \bar{x} în raport cu baza B și respectiv \bar{B} , atunci

$$Q(\bar{u}) = X^t \cdot A \cdot X = (SY)^t \cdot A \cdot (SY) = (Y^t S^t) \cdot A \cdot (SY) = Y^t \cdot (S^t \cdot A \cdot S) \cdot Y = Y^t \cdot (S^{-1} \cdot A \cdot S) \cdot Y.$$

Dar T este diagonalizabilă în această nouă bază, deci noua matrice (obținută prin schimbarea bazelor) este $\bar{A} = S^{-1} \cdot A \cdot S$ și are formă diagonală. Deoarece

$$Q(\bar{u}) = Y^t \cdot \bar{A} \cdot Y,$$

obținem că Q are deci formă canonică.

Exercițiul 22 Se dă forma pătratică Q de la Exercițiul 17. Să se aducă forma pătratică Q la forma canonică prin metoda transformărilor ortogonale.

Rezolvare:

Matricea formei pătratică este

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ecuția caracteristică asociată matricei A este

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0,$$

deci, efectuând calculele, obținem

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 66\lambda + 80 = 0.$$

Se va obține, căutând rădăcinile printre divizorii termenului liber și folosind schema lui Horner,

$$\det(A - \lambda I_3) = -(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda - 8) = 0,$$

și deci rădăcinile sunt $\lambda_1 = 2, m_1 = 1, \lambda_2 = 5, m_2 = 1, \lambda_3 = 8, m_3 = 1$. Acestea fiind din câmpul de scalari, obținem că sunt chiar valori proprii.

Vom calcula acum subspațiile proprii $V(2), V(5)$ și $V(8)$ corespunzătoare celor trei valori proprii găsite. Avem

$$V(\lambda) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) : (A - \lambda I_3)X = 0\},$$

deci trebuie rezolvat sistemul liniar și omogen

$$\begin{cases} (5 - \lambda)x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (6 - \lambda)x_2 = 0 \\ -2x_1 + (4 - \lambda)x_3 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Pentru determinarea lui $V(2)$, rezolvăm, prin urmare, sistemul liniar și omogen (11):

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Rangul matricii sistemului este 2, deci sistemul are două necunoscute principale, x_1, x_2 , și o necunoscută secundară, $x_3 = \alpha$. Vom obține soluția $X = \alpha(2, 1, 2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Deci

$$V(2) = \{\alpha(2, 1, 2) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

adică $V(2)$ este generat de vectorul $\vec{f}_1 = (2, 1, 2)$ și prin urmare $\{\vec{f}_1\}$ este bază în $V(2)$ și deci $\dim V(2) = 1 = m_1$.

Analog

$$V(5) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) : (A - 5I_3)X = 0\}$$

și sistemul liniar și omogen $(A - 5I_3)X = 0$ este

$$\begin{cases} -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

care are soluția $X = \alpha(1, 2, -2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Deci

$$V(5) = \{\alpha(1, 2, -2) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

adică $V(5)$ este generat de vectorul nenul $\vec{f}_2 = (1, 2, -2)$ și prin urmare $\{\vec{f}_2\}$ este bază în $V(5)$ și deci $\dim V(5) = 1 = m_2$.

Analog $V(8) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) : (A - 8I_3)X = 0\}$ și sistemul liniar și omogen $(A - 8I_3)X = 0$ este

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

care are soluția $X = \alpha(2, -2, -1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Deci

$$V(8) = \{\alpha(2, -2, -1) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

adică $V(8)$ este generat de vectorul nenul $\vec{f}_3 = (2, -2, -1)$ și prin urmare $\{\vec{f}_3\}$ este bază în $V(8)$ și deci $\dim V(8) = 1 = m_3$.

Observăm, mai întâi că, dacă notăm prin T endomorfismul care are drept matrice pe A , atunci, conform teoremei de diagonalizare, endomorfismul T este diagonalizabil (rădăcinile caracteristice sunt din câmpul de scalari, i.e. $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, 3}$, și subspațiile proprii au dimensiunea egală cu multiplicitatea valorii proprii, i.e. $\dim V(\lambda_i) = m_i$, $\forall i = \overline{1, 3}$).

Pe de altă parte, conform teoriei, deoarece valorile proprii sunt simple (au multiplicitatea 1) atunci vectorii proprii corespunzători sunt ortogonali. Aceștia mai **trebuie doar normalizați**. Mai precis dacă avem vectorul $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, atunci versorul lui \vec{u} este dat de formula

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2}} \vec{u}$$

Deci prin normalizare obținem baza ortonormată

$$\vec{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \left\{ \frac{1}{\|\vec{f}_1\|} \vec{f}_1, \frac{1}{\|\vec{f}_2\|} \vec{f}_2, \frac{1}{\|\vec{f}_3\|} \vec{f}_3 \right\} = \left\{ \frac{1}{3} (2, 1, 2), \frac{1}{3} (1, 2, -2), \frac{1}{3} (2, -2, -1) \right\}.$$

Matricea schimbării de baze $B_c \xrightarrow{S} \vec{B}$ este deci

$$S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

care este, conform teoriei, **matrice ortogonală**, adică $S^{-1} = S^t$.

Verificăm mai întâi egalitatea de mai sus calculând transpusa S^t și apoi inversa

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} S^* = \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} -6 & -3 & -6 \\ -3 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = S = S^t.$$

Matricea formei pătratice în raport cu noua bază va fi atunci dată de formula (vezi (2))

$$\bar{A} = S^t \cdot A \cdot S = \text{calcule temă} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Deci forma canonică a formei pătratice va fi atunci

$$Q(\vec{x}) = 2(y_1)^2 + 5(y_2)^2 + 8(y_3)^2,$$

unde $y_i, i = \overline{1, 3}$ sunt coeficienții descompunerii lui \vec{x} în baza \bar{B} , adică are loc descompunerea în cele două baze B_c și \bar{B} dată de:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{e}'_1 + y_2\vec{e}'_2 + y_3\vec{e}'_3.$$

Pentru a determina matricea coloană Y avem formulele

$$X = SY \Leftrightarrow Y = S^{-1}X$$

Se va obține

$$Y = S^{-1}X = S^t X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

deci

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 + 2x_3) \\ y_2 = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 - 2x_3) \\ y_3 = \frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 - x_3). \end{cases}$$

1.4 Exerciții

1. Să se studieze dacă aplicațiile de mai jos sunt forme biliniare. În caz afirmativ să se precizeze dacă sunt simetrice sau nu și să se determine matricea formei \mathcal{A} în raport cu baza canonică.

(a) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 + 1$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$;

(b) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$;

(c) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_4y_1 + x_4y_4$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$;

(d) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$.

Rezolvare:

- (a) Folosind definiția, trebuie deci să verificăm condițiile

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) &= \alpha\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\mathcal{A}(\vec{y}, \vec{z}) \\ \mathcal{A}(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) &= \alpha\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) + \beta\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{z}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (12)$$

Deoarece $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$, obținem că

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) &= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 - (\alpha x_2 + \beta y_2)z_1 + (\alpha x_1 + \beta y_1)z_3 - (\alpha x_3 + \beta y_3)z_1 + 1 \\ &= \alpha x_1z_2 + \beta y_1z_2 - \alpha x_2z_1 - \beta y_2z_1 + \alpha x_1z_3 + \beta y_1z_3 - \alpha x_3z_1 - \beta y_3z_1 + 1 \\ &= \alpha(x_1z_2 - x_2z_1 + x_1z_3 - x_3z_1) + \beta(y_1z_2 - y_2z_1 + y_1z_3 - y_3z_1) + 1. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \alpha\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\mathcal{A}(\vec{y}, \vec{z}) &= \alpha(x_1z_2 - x_2z_1 + x_1z_3 - x_3z_1 + 1) + \beta(y_1z_2 - y_2z_1 + y_1z_3 - y_3z_1 + 1) \\ &= \alpha(x_1z_2 - x_2z_1 + x_1z_3 - x_3z_1) + \beta(y_1z_2 - y_2z_1 + y_1z_3 - y_3z_1) + (\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Deci $\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) \neq \alpha\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\mathcal{A}(\vec{y}, \vec{z})$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\alpha + \beta) \neq 1$. Aceasta înseamnă că nu este satisfăcută prima condiție din (12) (de liniaritate în raport cu primul argument), prin urmare \mathcal{A} nu este formă biliniară.

Evident dacă nu ar apărea constanta 1 în definiția lui \mathcal{A} , atunci \mathcal{A} ar fi formă biliniară.

- (b) Deoarece $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$, obținem că

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) &= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 - (\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 - (\alpha x_2 + \beta y_2)z_1 + 2(\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 \\ &= \alpha x_1z_1 + \beta y_1z_1 - \alpha x_1z_2 - \beta y_1z_2 - \alpha x_2z_1 - \beta y_2z_1 + 2\alpha x_2z_2 + 2\beta y_2z_2 \\ &= \alpha(x_1z_1 - x_1z_2 + x_2z_1 + 2x_2z_2) + \beta(y_1z_1 - y_1z_2 - y_2z_1 + 2y_2z_2) \\ &= \alpha\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\mathcal{A}(\vec{y}, \vec{z}), \end{aligned}$$

adică este satisfăcută prima condiție din (12) (de liniaritate în raport cu primul argument).

Deoarece $\alpha\vec{y} + \beta\vec{z} = (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2)$, obținem că

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) &= x_1(\alpha y_1 + \beta z_1) - x_1(\alpha y_2 + \beta z_2) - x_2(\alpha y_1 + \beta z_1) + 2x_2(\alpha y_2 + \beta z_2) \\ &= \alpha x_1y_1 + \beta x_1z_1 - \alpha x_1y_2 - \beta x_1z_2 - \alpha x_2y_1 - \beta x_2z_1 + 2\alpha x_2y_2 + 2\beta x_2z_2 \\ &= \alpha(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2) + \beta(x_1z_1 - x_1z_2 - x_2z_1 + 2x_2z_2) \\ &= \alpha\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) + \beta\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{z}), \end{aligned}$$

adică este satisfăcută a doua condiție din (12) (de liniaritate în raport cu al doilea argument).

Prin urmare \mathcal{A} este formă biliniară.

Evident

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 = \mathcal{A}(\vec{y}, \vec{x}),$$

ceea ce înseamnă că forma biliniară \mathcal{A} este simetrică.

Matricea formei biliniare \mathcal{A} se scrie calculând $a_{ij} := \mathcal{A}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, $i, j = \overline{1, 2}$, unde $B_c := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ este baza canonică din \mathbb{R}^2 .

Obținem că $a_{11} := \mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1$, $a_{22} := \mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 2$, $a_{12} := \mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = -1$, $a_{21} := \mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = -1$, adică matricea formei biliniare este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observăm de asemenea că forma biliniară se scrie matriceal astfel:

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = X^t \cdot A \cdot Y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui \vec{x} iar Y este matricea coloană a coordonatelor lui \vec{y} .

(c) Deoarece $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$, obținem că

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) &= 2(\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 + 3(\alpha x_3 + \beta y_3)z_3 \\ &\quad + (\alpha x_4 + \beta y_4)z_1 + (\alpha x_4 + \beta y_4)z_4 \\ &= 2\alpha x_1z_1 + 2\beta y_1z_1 + \alpha x_2z_1 + \beta y_2z_1 + \alpha x_2z_2 + \beta y_2z_2 + 3\alpha x_3z_3 + 3\beta y_3z_3 + \alpha x_4z_1 + \beta y_4z_1 \\ &\quad + \alpha x_4z_4 + \beta y_4z_4 \\ &= \alpha(2x_1z_1 + x_2z_1 + x_2z_2 + 3x_3z_3 + x_4z_1 + x_4z_4) + \beta(2y_1z_1 + y_2z_1 + y_2z_2 + 3y_3z_3 + y_4z_1 + y_4z_4) \\ &= \alpha\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\mathcal{A}(\vec{y}, \vec{z}), \end{aligned}$$

adică este satisfăcută prima condiție din (12) (de liniaritate în raport cu primul argument).

Scriind $\alpha\vec{y} + \beta\vec{z} = (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2)$, obținem că în mod similar că $\mathcal{A}(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) + \beta\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{z})$, adică este satisfăcută a doua condiție din (12) (de liniaritate în raport cu al doilea argument).

Prin urmare \mathcal{A} este formă biliniară.

Evident

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_4y_1 + x_4y_4 \neq \mathcal{A}(\vec{y}, \vec{x}),$$

ceea ce înseamnă că forma biliniară \mathcal{A} nu este simetrică.

Matricea formei biliniare \mathcal{A} se scrie calculând $a_{ij} := \mathcal{A}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, $i, j = \overline{1, 4}$, unde $B_c := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ este baza canonică din \mathbb{R}^4 .

Obținem că:

$$a_{11} := \mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 2, a_{22} := \mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1, a_{33} := \mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 3, a_{44} := \mathcal{A}(\vec{e}_4, \vec{e}_4) = 1,$$

$$a_{12} := \mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0, a_{13} := \mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0, a_{14} := \mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_4) = 0,$$

$$a_{21} := \mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 1, a_{23} := \mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0, a_{24} := \mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_4) = 0,$$

$$a_{31} := \mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0, a_{32} := \mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0, a_{34} := \mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_4) = 0,$$

$$a_{41} := \mathcal{A}(\vec{e}_4, \vec{e}_1) = 1, a_{42} := \mathcal{A}(\vec{e}_4, \vec{e}_2) = 0, a_{43} := \mathcal{A}(\vec{e}_4, \vec{e}_3) = 0, \text{ adică matricea formei biliniare este}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Se dă forma biliniară $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 + x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_2y_4 - x_4y_2 + x_3y_4 - x_4y_3$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$. Să se precizeze dacă forma biliniară \mathcal{A} este sau nu simetrică și să se determine matricea formei \mathcal{A} în raport cu baza canonică. De asemenea, să se scrie matricea formei \mathcal{A} în baza formată de vectorii $\vec{f}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{f}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{f}_3 = (0, 1, 0, 1)$, $\vec{f}_4 = (1, 0, 0, 1)$.

Rezolvare:

Matricea formei biliniare \mathcal{A} se scrie calculând $a_{ij} := \mathcal{A}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, $i, j = \overline{1, 4}$, unde $B_c := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ este baza canonică din \mathbb{R}^4 .

Obținem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

și deci forma biliniară se scrie matriceal sub forma

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = X^t \cdot A \cdot Y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui \vec{x} iar Y este matricea coloană a coordonatelor lui \vec{y} .

Se citește matricea S a schimbării de baze de la canonică B_c la noua bază $\bar{B} := \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4\} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1)\}$:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

și vom nota $B_c \xrightarrow{S} \bar{B}$.

Conform teoriei, matricea \bar{A} în raport cu noua bază \bar{B} este dată de formula

$$\bar{A} = S^t \cdot A \cdot S$$

deci

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Se dă forma pătratică $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(\vec{x}) = (x_1)^2 + \frac{5}{4}(x_2)^2 + 2(x_3)^2 + 2x_1x_3 - x_2x_3, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Să se scrie forma biliniară simetrică din care provine Q și să se determine matricea formei pătratice Q în raport cu baza canonică și să se calculeze rangul formei.

(b) De asemenea, să se aducă la forma pătratică la forma canonică prin metode cunoscute.

Rezolvare:

(a) Reamintim că prin definiție, pentru forma pătratică Q , există o formă biliniară \mathcal{A} astfel încât $Q(\vec{x}) := \mathcal{A}(\vec{x}, \vec{x}), \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Practic, forma biliniară simetrică din care provine Q se scrie prin procedeul de dedublare prin care înlocuim în modul următor:

$$\begin{aligned} (x_i)^2 &\rightsquigarrow x_i y_i \\ x_i x_j &\rightsquigarrow \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i), \forall i, j. \end{aligned}$$

Astfel se obține

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) &= x_1 y_1 + \frac{5}{4} x_2 y_2 + 2x_3 y_3 + 2 \frac{1}{2} (x_1 y_3 + x_3 y_1) - \frac{1}{2} (x_2 y_3 + x_3 y_2) \\ &= x_1 y_1 + \frac{5}{4} x_2 y_2 + 2x_3 y_3 + x_1 y_3 + x_3 y_1 - \frac{1}{2} x_2 y_3 - \frac{1}{2} x_3 y_2, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Prin definiție,

$$Q(\vec{x}) = X^t \cdot A \cdot X,$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui \vec{x} , iar A este matricea formei biliniare simetrice corespunzătoare \mathcal{A} .

Citim

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5/4 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

deci

$$Q(\vec{x}) = X^t \cdot A \cdot X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5/4 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Se obține $\text{rang } A = 3$ deci rangul formei Q este 3.

(b) Vom aduce forma pătratică la forma canonică prin **metoda lui Gauss**.

Conform teoriei,

– dacă forma pătratică conține cel puțin un pătrat $(x_i)^2$, atunci grupăm toți termenii care conțin termenul x_i și formăm un pătrat perfect prin tehnica prezentată mai jos;

– dacă forma pătratică nu conține nici un pătrat dar apare termenul $x_i x_j$, atunci facem schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k, \forall k \neq i, j. \end{cases}$$

În cazul nostru, apare pătratul $(x_1)^2$ și termenii x_1x_3 și deci grupăm toți termenii care conțin termenul x_1 și formăm un pătrat perfect

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= \left((x_1)^2 + 2x_1x_3 \right) + \frac{5}{4}(x_2)^2 + 2(x_3)^2 - x_2x_3 = (x_1 + x_3)^2 - (x_3)^2 + \frac{5}{4}(x_2)^2 + 2(x_3)^2 - x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + (x_3)^2 + \frac{5}{4}(x_2)^2 - x_2x_3 = (x_1 + x_3)^2 + \left((x_3)^2 - x_2x_3 \right) + \frac{5}{4}(x_2)^2 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}x_2 \right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_2 \right)^2 + \frac{5}{4}(x_2)^2 = (x_1 + x_3)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}x_2 \right)^2 + (x_2)^2 \\ &= (y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ y_3 = x_2. \end{cases} \quad (13)$$

Să determinăm în continuare baza \bar{B} în raport cu care forma pătratică Q are forma canonică de mai sus.

Rezolvăm sistemul (13) astfel încât să determinăm coordonatele x_i în raport de coordonatele y_j . Vom obține

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = y_3 \\ x_3 = y_2 + \frac{1}{2}y_3. \end{cases}$$

deci

$$X = SY \Leftrightarrow Y = S^{-1}X,$$

unde

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Evident puteam citi și direct din (13) matricea $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Dar, prin definiție, matricea S este matricea schimbării de baze de la B_c la baza $\bar{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ în raport cu care forma pătratică Q are forma canonică $Q(\vec{x}) = (y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2$.

Deci citim coordonatele din matricea S și obținem $\vec{f}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{f}_2 = (-1, 0, 1)$, $\vec{f}_3 = (-1/2, 1, 1/2)$.

Evident, din forma canonică, citim că forma pătratică are în raport cu această nouă bază

$$\text{matricea } \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deoarece toți coeficienții 1, 1 și 1 sunt strict pozitivi, deducem că forma pătratică dată este pozitiv definită.

4. Se dă forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(\vec{x}) = 5(x_1)^2 + 6(x_2)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Să se scrie forma biliniară simetrică din care provine Q și să se determine matricea formei pătratice Q în raport cu baza canonică și să se calculeze rangul formei.

(b) De asemenea, să se aducă la forma pătratică la forma canonică prin metode cunoscute.

Rezolvare:

(a) Forma biliniară simetrică din care provine Q se scrie prin procedeul de dedublare și se obține

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) &= 5x_1y_1 + 6x_2y_2 + 4x_3y_3 - 4\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - 4\frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) \\ &= 5x_1y_1 + 6x_2y_2 + 4x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Prin definiție,

$$Q(\vec{x}) = X^t \cdot A \cdot X,$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui \vec{x} , iar A este matricea formei biliniare simetrice corespunzătoare \mathcal{A} .

Citim

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

deci

$$Q(\vec{x}) = X^t \cdot A \cdot X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Se obține $\text{rang } A = 3$ deci rangul formei Q este 3.

(b) Vom aduce forma pătratică la forma canonică prin metoda lui Gauss

În cazul nostru, apare pătratul $5(x_1)^2$ și termenii x_1x_2, x_1x_3 . Apare și pătratul $6(x_2)^2$ și apoi x_1x_2 . Alegem, pentru simplitate, să plecăm de la termenul x_2 și deci grupăm toți termenii care conțin termenul x_2 și formăm un pătrat perfect

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= (6(x_2)^2 - 4x_1x_2) + 5(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3 \\ &= \frac{1}{6}((6x_2)^2 - 24x_1x_2) + 5(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3 \\ &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 - \frac{1}{6}(2x_1)^2 + 5(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3 \\ &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{13}{3}(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3 \\ &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \left(\frac{13}{3}(x_1)^2 - 4x_1x_3\right) + 4(x_3)^2 \\ &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{3}{13}\left(\left(\frac{13}{3}x_1\right)^2 - \frac{13}{3}4x_1x_3\right) + 4(x_3)^2 \\ &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{3}{13}\left(\frac{13}{3}x_1 - 2x_3\right)^2 - \frac{3}{13}(2x_3)^2 + 4(x_3)^2 \\ &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{3}{13}\left(\frac{13}{3}x_1 - 2x_3\right)^2 + \frac{40}{13}(x_3)^2 \\ &= \frac{1}{6}(y_1)^2 + \frac{3}{13}(y_2)^2 + \frac{40}{13}(y_3)^2, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{cases} y_1 = 6x_2 - 2x_1 \\ y_2 = \frac{13}{3}x_1 - 2x_3 \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

Deoarece toți coeficienții $1/6$, $3/13$ și $40/13$ sunt strict pozitivi, deducem că forma pătratică dată este pozitiv definită.

5. Se dă forma pătratică $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{Q}(\vec{x}) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Să se scrie forma biliniară simetrică din care provine \mathcal{Q} și să se determine matricea formei pătratice \mathcal{Q} în raport cu baza canonică și să se calculeze rangul formei.

(b) De asemenea, să se aducă la forma pătratică la forma canonică prin metode cunoscute.

Rezolvare:

(a) Forma biliniară simetrică din care provine \mathcal{Q} se scrie prin procedeul de dedublare și se obține

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) &= 2\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - 6\frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) - 6\frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2) \\ &= x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Prin definiție,

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = X^t \cdot A \cdot X.$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui \vec{x} , iar A este matricea formei biliniare simetrice corespunzătoare \mathcal{A} .

Citim

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se obține rang $A = 3$ deci rangul formei \mathcal{Q} este 3.

(b) Vom aduce forma pătratică la forma canonică prin metoda lui Gauss.

În cazul nostru, nu apare nici un pătrat dar apare termenul x_1x_2 , deci, conform teoriei, facem schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3. \end{cases} \quad (14)$$

Înlocuind obținem

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\vec{x}) &= 2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) - 6(y_1 - y_2)y_3 - 6(y_1 + y_2)y_3 \\ &= 2(y_1)^2 - 2(y_2)^2 - 6y_1y_3 + 6y_2y_3 - 6y_1y_3 - 6y_2y_3 = \\ &= 2(y_1)^2 - 2(y_2)^2 - 12y_1y_3 \end{aligned}$$

iar acum se aplică tehnica de formare de pătrate. Vom obține

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\vec{x}) &= 2(y_1)^2 - 2(y_2)^2 - 12y_1y_3 = (2(y_1)^2 - 12y_1y_3) - 2(y_2)^2 = \frac{1}{2}((2y_1)^2 - 24y_1y_3) - 2(y_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(2y_1 - 6y_3)^2 - \frac{1}{2}(6y_3)^2 - 2(y_2)^2 = \frac{1}{2}(z_1)^2 - 2(z_2)^2 - 18(z_3)^2, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 - 6y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3. \end{cases} \quad (15)$$

Să determinăm în continuare baza \bar{B} în raport cu care forma pătratică Q are forma canonică de mai sus.

Rezolvăm sistemul format din (14) și (15) astfel încât să determinăm coordonatele x_i în raport de coordonatele z_j . Vom obține

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(z_1 + 6z_3) - z_2 \\ x_2 = \frac{1}{2}(z_1 + 6z_3) + z_2 \\ x_3 = z_3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}z_1 - z_2 + 3z_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

deci

$$X = SZ \Leftrightarrow Z = S^{-1}X,$$

unde

$$S = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dar, prin definiție, matricea S este matricea schimbării de baze de la B_c la baza $\bar{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ în raport cu care forma pătratică Q are forma canonică $Q(\vec{x}) = \frac{1}{2}(z_1)^2 - 2(z_2)^2 - 18(z_3)^2$.

Deci citim coordonatele din matricea S și obținem $\vec{f}_1 = (1/2, 1/2, 0)$, $\vec{f}_2 = (-1, 1, 0)$, $\vec{f}_3 = (3, 3, 1)$.

Evident, din forma canonică, citim direct că forma pătratică are în raport cu această nouă

bază matricea $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$.

Pe de altă parte avem formula

$$\bar{A} = S^t \cdot A \cdot S,$$

deci se poate face și proba, calculând produsul $(S^t \cdot A) \cdot S$ și obținând exact matricea diagonală \bar{A} de mai sus.

Deoarece nu toți coeficienții $1/2$, -2 și -18 sunt fie strict pozitivi, fie strict negativi, deducem că forma pătratică dată este nedefinită.