Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii
şi Tehnologia Informaţiei
Algebră, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC
http://math.etti.tuiasi.ro/maticiuc/

Lucian Maticiuc

CURS XIII – XIV

1 Geometria planului şi a dreptei

1.1 Planul în spaţiu

Un plan poate fi determinat în mod unic în următoarele trei moduri:
(A) printr-un punct şi un vector nenul dat ce defineşte direcţia normală la plan,
(B) printr-un punct şi doi vectori necoliniari daţi,
(C) prin trei puncte necoliniare date.

Fie $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper ortonormat fixat în spaţiu ($B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ este o bază ortonormată iar O este originea reperului).

(A) **Planul determinat de un punct şi de un vector normal nenul dat**.

Fie P_0 un punct de vector de poziţie $\vec{r}_0$ relativ la $\mathcal{R}$ şi $\vec{N} \in V_3$.

Definiţia 1 *Se numeşte* ***dreaptă normală la planul*** π ***într-un punct*** P_0*, dreapta ce trece prin* P_0 *şi este perpendiculară pe planul* π*; direcţia normală* $\vec{N}$ *la un plan este orice vector nenul care are direcţia ortogonală planului.*

Vom nota acest plan prin $\pi(P_0, \vec{N})$.

Propoziţia 2 (Ecuaţia vectorială a planului determinat de un punct şi de o direcţie normală) *Condiţia necesară şi suficientă ca punctul* P *de vector de poziţie* $\vec{r}$ *să aparţină planului* $\pi(P_0, \vec{N})$ *este*

$$\langle \vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = 0.$$

Demonstraţie. Dacă $P \in \pi(P_0, \vec{N})$ atunci $\overrightarrow{P_0P}$ este vector ortogonal pe $\vec{N}$ deci $\langle \vec{N}, \overrightarrow{P_0P} \rangle = 0$. Dar $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ deci obţinem concluzia. ■

Luând $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{N} = (A, B, C)$, putem scrie explicit produsul scalar de mai sus şi obţinem **ecuaţia generală a planului (care trece prin** $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ **şi de normală** $\vec{N} = (A, B, C)$**):**

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0,$$

sau echivalent

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Scalarii A, B, C sunt coordonatele normalei la plan.

Exemplul 3 (Cazuri particulare) (a) *Dacă* $D = 0$ *obţinem ecuaţia unui plan care trece prin origine*

$$Ax + By + Cz = 0.$$

(b) *Dacă* $A = 0$ *obţinem ecuaţia unui plan cu normala* $\vec{N} = (0, B, C)$ *care este deci paralelă cu planul* YOZ *sau echivalent, ortogonală pe* $\vec{i}$. *Obţinem deci un plan paralel cu versorul* $\vec{i}$, *adică paralel cu axa* OX :

$$By + Cz + D = 0.$$

(c) *Dacă* $A = D = 0$ *obţinem ecuaţia unui plan cu normala* $\vec{N} = (0, B, C)$ *(care este ortogonal pe* $\vec{i}$ *) şi care trece prin origine. Obţinem deci un plan care conţine axa* OX :

$$By + Cz = 0.$$

(d) *Dacă* $A = B = 0$ *obţinem ecuaţia unui plan cu normala* $\vec{N} = (0, 0, C)$ *care este paralelă cu axa* OZ. *Obţinem deci un plan este perpendicular pe* OZ, *deci e paralel cu* XOY :

$$Cz + D = 0.$$

(B) **Planul determinat de un punct şi de doi vectori necoliniari daţi.**

Fie P_0 un punct de vector de poziţie $\vec{r}_0$ relativ la $\mathcal{R}$ şi $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ doi vectori liberi necoliniari daţi. Vom nota planul determinat de $P_0, \vec{u}, \vec{v}$ prin $\pi(P_0, \vec{u}, \vec{v})$.

Propoziţia 4 (Ecuaţia vectorială a planului determinat de un punct şi de doi vectori necoliniari) *Condiţia necesară şi suficientă ca punctul* P *de vector de poziţie* $\vec{r}$ *să aparţină planului* $\pi(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ *este*

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

Demonstraţie. Dacă $P \in \pi(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ atunci $\overrightarrow{P_0P}$ este vector coplanar cu $\vec{u}$ şi $\vec{v}$, adică produsul lor mixt este nul $\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Dar $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ deci obţinem concluzia. ∎

Luând $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, putem scrie explicit produsul mixt de mai sus şi obţinem **ecuaţia planului determinat de un punct** $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ **şi de două direcţii date** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(C) **Planul determinat de trei puncte.**

Fie P_1, P_2, P_3 trei puncte de vectori de poziţie $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ relativ la $\mathcal{R}$. Vom nota planul determinat de P_1, P_2, P_3 prin $\pi(P_1, P_2, P_3)$.

Propoziţia 5 (Ecuaţia vectorială a planului determinat de trei puncte) *Condiţia necesară şi suficientă ca punctul* P *de vector de poziţie* $\vec{r}$ *să aparţină planului* $\pi(P_1, P_2, P_3)$ *este*

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \rangle = 0.$$

Demonstraţie. Fie $P \in \pi(P_1, P_2, P_3)$. Propoziţia se reduce la cazul precedent deoarece planul este determinat de punctul P_1 şi de direcţiile $\vec{N}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{N}_2 = \overrightarrow{P_1P_3}$. Obţinem deci $\langle \vec{r} - \vec{r}_1, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \rangle = 0$. Dar $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ deci obţinem concluzia. ∎

Luând $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,3}$, putem scrie explicit produsul mixt de mai sus şi obţinem **ecuaţia planului determinat de trei puncte** $P_i\,(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,3}$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Lucian Maticiuc

Se poate demonstra, făcând calculele, că ecuaţia de mai sus este echivalentă cu ecuaţia scrisă sub forma

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.2 Dreapta în spaţiu

O dreaptă poate fi determinată în mod unic în următoarele trei moduri:
(A) printr-un punct şi o direcţie dată,
(B) prin două puncte distincte,
(C) printr-un punct şi două direcţii normale date.

Fie $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper ortonormat fixat în spaţiu ($B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ este o bază ortonormată iar O este originea reperului).

(A) **Dreapta determinată de un punct şi de o direcţie dată**. Fie P_0 un punct de vector de poziţie $\vec{r}_0$ relativ la $\mathcal{R}$. Fie $\vec{u} \in V_3$ şi să notăm cu $d(P_0, \vec{u})$ dreapta determinată de P_0 şi de direcţie $\vec{u}$.

Distanţa dintre două puncte este

$$\text{dist}\,(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{\overrightarrow{PQ}^2} = \sqrt{(\vec{r}_Q - \vec{r}_P)^2} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2},$$

deoarece are loc **ecuaţia vectorului determinat de două puncte**, folosind regula de adunare a vectorilor, $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow -\vec{r}_P + \vec{r}_Q = \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P.$$

Propoziţia 6 (Ecuaţia vectorială a dreptei determinată de un punct şi de o direcţie) *Condiţia necesară şi suficientă ca punctul P de vector de poziţie $\vec{r}$ să aparţină dreptei $d(P_0, \vec{u})$ este*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{u},\ t \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Dacă $P \in d(P_0, \vec{u})$ atunci $\overrightarrow{P_0P}$ este vector coliniar cu $\vec{u}$, adică există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{u} \Leftrightarrow \vec{r}_P - \vec{r}_{P_0} = t\,\vec{u} \Leftrightarrow$

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{P_0} + t\,\vec{u}.$$

■

Luând $\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, putem scrie pe coordonate ecuaţia de mai sus şi obţinem **ecuaţiile parametrice ale dreptei**

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1, \\ y = y_0 + tu_2, \\ z = z_0 + tu_3,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând parametrul t în ecuaţiile de mai sus obţinem **ecuaţiile canonice ale dreptei**

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \tag{1}$$

În cazul în care una dintre coordonatele lui $\vec{u}$ este zero, atunci, prin convenţie, vom considera numărătorul corespunzător nul. De exemplu, dacă $u_3 = 0$ atunci obţinem $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2}$ şi $z - z_0 = 0$.

(B) **Dreapta determinată de două puncte.** Fie P_1, P_2 două puncte de vectori de poziţie $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ relativ la $\mathcal{R}$. În acest caz vectorul $\overrightarrow{P_1P_2}$ va constitui direcţia dreptei, deci poblema este redusă la cazul precedent A). Vom lua deci $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Vom nota cu $d(P_1, P_2)$ dreapta determinată de punctele P_1, P_2. Din propoziţia de mai sus obţinem imediat

Propoziţia 7 (Ecuaţia vectorială a dreptei determinată de două puncte) *Condiţia necesară şi suficientă ca punctul P de vector de poziţie $\vec{r}$ să aparţină dreptei $d(P_1, P_2)$ este*

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\ (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\,,\ t \in \mathbb{R}.$$

Luând, ca mai sus, $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_1 = (x_1, y_2, z_3)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, putem scrie pe coordonate ecuaţia de mai sus şi obţinem **ecuaţiile parametrice ale dreptei determinate de două puncte**

$$\begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1)\,, \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t\,(z_2 - z_1)\,,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând parametrul t în ecuaţiile de mai sus obţinem **ecuaţiile canonice ale dreptei determinate de două puncte**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

În cazul în care unul dintre numitori este nul atunci, prin convenţie, vom considera numărătorul corespunzător nul.

(C) **Dreapta determinată de un punct şi de două direcţii normale (direcţie normală planară).** Fie P_0 un punct de vector de poziţie $\vec{r}_0$ relativ la $\mathcal{R}$ şi $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ doi vectori liberi necoliniari şi ortogonali pe direcţia dreptei. Vom nota cu $d(P_0, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ dreapta determinată de P_0 şi de direcţii normale $\vec{N}_1, \vec{N}_2$.

Propoziţia 8 (Ecuaţia vectorială a dreptei determinată de un punct şi de două direcţii normale) *Condiţia necesară şi suficientă ca punctul P de vector de poziţie $\vec{r}$ să aparţină dreptei $d(P_0, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ este*

$$\begin{cases} \langle \vec{N}_1, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = 0, \\ \langle \vec{N}_2, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = 0. \end{cases}$$

Demonstraţie. Dacă $P \in d(P_0, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ atunci $\overrightarrow{P_0P}$ este un vector ortogonal pe $\vec{N}_1$ şi pe $\vec{N}_2$, adică următoarele produsele scalare sunt nule

$$\langle \vec{N}_1, \overrightarrow{P_0P} \rangle = \langle \vec{N}_2, \overrightarrow{P_0P} \rangle = 0.$$

Dar $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ deci obţinem concluzia. ∎

Luând $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ putem scrie explicit produsele scalare de mai sus şi obţinem **ecuaţiile dreptei dată ca intersecţie de două plane**

$$\begin{cases} A_1\,(x - x_0) + B_1\,(y - y_0) + C_1\,(z - z_0) = 0, \\ A_2\,(x - x_0) + B_2\,(y - y_0) + C_2\,(z - z_0) = 0, \end{cases}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

unde $D_i = -A_i x_0 - B_i y_0 - C_i z_0$, $i = \overline{1,2}$.

Remarca 9 *Dreapta determinată în acest mod este de fapt dată (vezi Planul) ca intersecţie de două plane, unde $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ sunt normalele celor două plane. Direcţia dreptei este ortogonală pe normalele celor două plane, adică direcţia este dată de produsul vectorial $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$. Putem considera deci dreapta, ca în cazul A), de tipul $d(P_0, \vec{u} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2)$.*

Lucian Maticiuc

Exemplul 10 *$a)$ O dreaptă perpendiculară pe OZ are direcţia perpendiculară pe OZ, deci conţinută în planul XOY, adică de tipul $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$, deci are ecuaţia (conform (1))*

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{0} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} \text{ şi } z = z_0$$

$b)$ O dreaptă paralelă cu OZ are direcţia paralelă cu OZ, deci de tipul $\vec{u} = (0, 0, u_3)$ deci are ecuaţia (conform (1))

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{u_3} \Leftrightarrow x = x_0 \text{ şi } y = y_0.$$

$c)$ Ecuaţiile axei OZ sunt date de (având în vedere că $\vec{N}_1 = \vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{N}_2 = \vec{j} = (0, 1, 0)$ sunt versori ortogonali pe OZ şi ecuaţia (2))

$$\begin{cases} x + D_1 = 0, \\ y + D_2 = 0. \end{cases}$$

Dar originea $O\,(0, 0, 0)$ aparţine dreptei date, deci verifică sistemul de mai sus, adică $D_1 = D_2 = 0$. Vom obţine deci ecuaţiile axei OZ dată ca intersecţie de două plane (planul YOZ şi planul XOZ):

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

1.2.1 Dreapta în plan

În cazul dreptei în plan lipseşte componenta z.

Fie $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper ortonormat fixat în plan ($B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ este o bază ortonormată iar O este originea reperului).

$A)$ **Dreapta determinată de un punct şi de o direcţie dată**. Fie P_0 un punct de vector de poziţie $\vec{r}_0$ relativ la $\mathcal{R}$. Fie $\vec{u} \in V_2$ şi să notăm cu $d(P_0, \vec{u})$ dreapta determinată de P_0 şi de direcţie $\vec{u}$.

Similar ca mai sus deducem

Propoziţia 11 (Ecuaţia vectorială a dreptei determinată de un punct şi de o direcţie) *Condiţia necesară şi suficientă ca punctul P de vector de poziţie $\vec{r}$ să aparţină dreptei $d(P_0, \vec{u})$ este*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{u}, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Luând $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$, putem scrie pe coordonate ecuaţia de mai sus şi obţinem **ecuaţiile parametrice ale dreptei**

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1, \\ y = y_0 + tu_2, \ \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând parametrul t în ecuaţiile de mai sus obţinem **ecuaţiile canonice ale dreptei**

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$

$B)$ **Dreapta determinată de două puncte.** Fie P_1, P_2 două puncte de vectori de poziţie $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ relativ la $\mathcal{R}$. În acest caz vectorul $\overrightarrow{P_1P_2}$ va constitui direcţia dreptei, deci poblema este redusă la cazul precedent $A)$. Vom lua deci $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Vom nota cu $d(P_1, P_2)$ dreapta determinată de punctele P_1, P_2. Din propoziţia de mai sus obţinem imediat

Lucian Maticiuc

Propoziţia 12 (Ecuaţia vectorială a dreptei determinată de două puncte) *Condiţia necesară şi suficientă ca punctul P de vector de poziţie $\vec{r}$ să aparţină dreptei $d(P_1, P_2)$ este*

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\ (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\ ,\ t \in \mathbb{R}.$$

Luând, $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}_1 = (x_1, y_2)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$, putem scrie pe coordonate ecuaţia de mai sus şi obţinem **ecuaţiile parametrice ale dreptei determinate de două puncte**

$$\begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1)\,, \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1)\,,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând parametrul t în ecuaţiile de mai sus obţinem **ecuaţiile canonice ale dreptei determinate de două puncte**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

C) **Dreapta în plan determinată de un punct şi de o direcţie normală.**

Fie P_0 un punct de vector de poziţie $\vec{r}_0$ relativ la $\mathcal{R}$ şi $\vec{N}$ un vector liber ortogonal pe direcţia dreptei (vector normal). Vom nota cu $d(P_0, \vec{N})$ dreapta determinată de P_0 şi de direcţie normală $\vec{N}$.

Propoziţia 13 (Ecuaţia vectorială a dreptei determinată de un punct şi de o direcţie normală) *Condiţia necesară şi suficientă ca punctul P de vector de poziţie $\vec{r}$ să aparţină dreptei $d(P_0, \vec{N})$ este*

$$\langle \vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = 0.$$

Luând $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{N} = (A, B)$ putem scrie explicit produsul scalar de mai sus şi obţinem **ecuaţia genarală a dreptei în plan**

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0,$$

sau echivalent

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

1.3 Probleme referitoare la drepte şi plane

1.3.1 Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie dreapta $d\,(P_0, \vec{u})$ şi punctul $P_1 \notin d\,(P_0, \vec{u})$. Aplicăm vectorul $\vec{u}$ în punctul P_0 şi obţinem vectorul $\vec{u} = \overrightarrow{P_0R}$. Să notăm cu Q piciorul perpendicularei din P_1 pe P_0S. Obţinem deci că distanţa de la P_1 la $d\,(P_0, \vec{u})$ este

$$\text{dist}\,(P_1, d) = ||\overrightarrow{P_1Q}||.$$

Avem pe de o parte că $\mathcal{A}_{\Delta P_0P_1R} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{P_0R}|| \cdot ||\overrightarrow{P_1Q}|| = \frac{1}{2}||\vec{u}|| \cdot \text{dist}\,(P_1, d)$. Pe de altă parte (din definiţia mărimii unui produs vectorial) $\mathcal{A}_{\Delta P_0P_1R} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0R}|| = \frac{1}{2}||\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}||$. Deci are loc următoarea **formulă de calcul a distanţei de la un punct la o dreaptă**:

$$\text{dist}\,(P_1, d) = \frac{||\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}||}{||\vec{u}||}$$

Lucian Maticiuc

1.3.2 Distanţa de la un punct la un plan

Fie planul $\pi\left(P_0,\vec{u},\vec{v}\right)$ şi punctul $P_1\notin\pi\left(P_0,\vec{u},\vec{v}\right)$. Aplicăm vectorii $\vec{u},\vec{v}$ în punctul P_0 şi obţinem vectorii $\vec{u}=\overrightarrow{P_0R}$, $\vec{v}=\overrightarrow{P_0S}$. Să notăm cu Q piciorul perpendicularei din P_1 pe planul vectorilor $\overrightarrow{P_0R}$ şi $\overrightarrow{P_0S}$. Obţinem deci că distanţa de la P_1 la $\pi\left(P_0,\vec{u},\vec{v}\right)$ este

$$\operatorname{dist}\left(P_1,\pi\right)=||\overrightarrow{P_1Q}||.$$

Avem pe de o parte că volumul paralelipipedului format cu vectorii $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0S}$ şi $\overrightarrow{P_0R}$ este (vezi definiţia produsului mixt)

$$\mathcal{V}_{paralelipiped}=\left|\langle\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0S},\overrightarrow{P_0R}\rangle\right|=\left|\langle\overrightarrow{P_0P_1},\vec{u},\vec{v}\rangle\right|$$

Pe de altă parte (din definiţia volumului unui paralelipiped) $\mathcal{V}_{paralelipiped}=$ (aria paraleologramului de la bază înmulţit cu înălţimea) $=||\overrightarrow{P_0S}\times\overrightarrow{P_0R}||\cdot||\overrightarrow{P_1Q}||=||\vec{u}\times\vec{v}||\cdot\operatorname{dist}\left(P_1,\pi\right)$. Deci are loc următoarea **formulă de calcul a distanţei de la un punct la un plan**:

$$\operatorname{dist}\left(P_1,\pi\right)=\frac{\left|\langle\overrightarrow{P_0P_1},\vec{u},\vec{v}\rangle\right|}{||\vec{u}\times\vec{v}||}.$$

În cazul în care planul este de tipul $\pi(P_0,\vec{N})$, adică are ecuaţia $Ax+By+Cz+D=0$, atunci ţinând cont că normala $\vec{N}=\vec{u}\times\vec{v}$, şi că $\langle\overrightarrow{P_0P_1},\vec{u},\vec{v}\rangle\overset{def}{=}\langle\overrightarrow{P_0P_1},\vec{u}\times\vec{v}\rangle=\langle\overrightarrow{P_0P_1},\vec{N}\rangle$, obţinem, echivalent,

$$\operatorname{dist}\left(P_1,\pi\right)=\frac{\left|\langle\overrightarrow{P_0P_1},\vec{N}\rangle\right|}{||\vec{N}||}=\frac{\left|\left(x_1-x_0\right)A+\left(y_1-y_0\right)B+\left(z_1-z_0\right)C\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Deci are loc următoarea **formulă de calcul a distanţei de la un punct la un plan**:

$$\operatorname{dist}\left(P_1,\pi\right)=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Remarcăm că numărătorul l-am obţinut înlocuind, în ecuaţia planului, coordonatele curente cu coordonatele lui P_1.

Lucian Maticiuc

1.4 Exerciţii

1. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0\,(1,2,-3)$ şi este perpendicular pe segmentul orientat $\overrightarrow{M_1M_2}$, unde $M_1\,(1,-2,3)$ şi $M_2\,(-3,2,5)$.

   Rezolvare:

   În cazul nostru vectorul normal este

   $$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} = (-4,4,2)\,.$$

   Ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0\,(1,2,-3)$ şi are normala $\vec{N} = (-4,4,2)$ este

   $$-4\,(x-1) + 4\,(y-2) + 2\,(z+3) = 0 \Leftrightarrow -4x + 4y + 2z + 2 = 0.$$

2. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0\,(1,2,-3)$ şi este paralel cu planul $2x - y + 5 = 0$.

   Rezolvare:

   Vectorul normal al planului $2x - y + 5 = 0$ este

   $$\vec{N} = (2,-1,0)\,.$$

   Deoarece planul cerut este paralel cu cel dat rezultă că cele două plane au aceeaşi normală $\vec{N}$.
   Ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0\,(1,2,-3)$ şi are normala $\vec{N} = (2,-1,0)$ este

   $$2\,(x-1) - (y-2) + 0\,(z+3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0.$$

   Remarcăm că planul obţinut trece prin originea $O\,(0,0,0)$ şi are normala ortogonală pe versorul $\vec{k}$, deoarece $\langle \vec{N}, \vec{k} \rangle = 0$.
   Deci planul cerut conţine axa OZ.

3. Să se scrie ecuaţia planului care este perpendicular pe segmentul orientat $\overrightarrow{M_1M_2}$ prin mijlocul lui (se numeşte plan mediator al segmentului orientat), unde $M_1\,(1,-2,3)$ şi $M_2\,(3,4,5)$.

   Rezolvare:

   Ecuaţia unui plan care trece prin punctul $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ şi are normala $\vec{N} = (A,B,C)$ este

   $$A\,(x-x_0) + B\,(y-y_0) + C\,(z-z_0) = 0.$$

   În cazul nostru vectorul normal este

   $$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (2,6,2)\,.$$

   Evident se poate scrie şi cu ajutorul vectorilor de poziţie:

   $$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1} = (3,4,5) - (1,-2,3) = (2,6,2)\,.$$

   Dacă notăm cu P mijlocul segmentului orientat $\overrightarrow{M_1M_2}$, atunci are loc

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1P} &= \overrightarrow{PM_2} \Leftrightarrow \vec{r}_P - \vec{r}_{M_1} = \vec{r}_{M_2} - \vec{r}_P \Leftrightarrow \vec{r}_P = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_{M_1} + \vec{r}_{M_2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)\right] = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).\end{aligned}$$

Lucian Maticiuc

Deci mijlocul unui segment este punctul de coordonate

$$P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

În cazul nostru obţinem $P\left(2,1,4\right)$.

Ecuaţia planului care trece prin punctul $P\left(2,1,4\right)$ şi are normala $\vec{N}=(2,6,2)$ este

$$2\left(x-2\right)+6\left(y-1\right)+2\left(z-4\right)=0\Leftrightarrow 2x+6y+2z-18=0\Leftrightarrow x+3y+z-9=0.$$

4. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele $A_1\left(3,-1,0\right)$, $A_2\left(4,1,1\right)$, $A_3\left(2,0,1\right)$.

Rezolvare:

Ecuaţia planului determinat de cele trei puncte este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 3 & -1 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x-2y+3z-5=0$$

5. Să se verifice dacă următoarele patru puncte sunt coplanare:

(a) $A_1\left(3,1,0\right)$, $A_2\left(0,7,2\right)$, $A_3\left(-1,0,-5\right)$, $A_4\left(4,1,5\right)$;

(b) $A_1\left(1,-1,1\right)$, $A_2\left(0,2,4\right)$, $A_3\left(1,3,3\right)$, $A_4\left(4,0,-3\right)$.

Rezolvare:

Scriem mai întâi ecuaţia planului determinat de trei puncte şi apoi verificăm dacă cel de-al patrulea punct aparţine sau nu planului determinat de celelalte trei puncte.

(a) Ecuaţia unui plan determinat de trei puncte date A_1, A_2 şi A_3 este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

În cazul nostru obţinem

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 7 & 2 & 1\\ -1 & 0 & -5 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Pentru a-l calcula putem dezvolta după prima linie sau, mai simplu, putem crea zerouri adunând ultima linie înmulţită cu -1 la celelalte linii. Astfel obţinem

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 7 & 2 & 1\\ -1 & 0 & -5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+1 & y & z-5 & 0\\ 4 & 1 & 5 & 0\\ 1 & 7 & 7 & 0\\ -1 & 0 & -5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+1 & y & z-5\\ 4 & 1 & 5\\ 1 & 7 & 7\end{vmatrix}=-28\left(x+1\right)-23y+27\left(z-5\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad -28x-23y+27z+107=0.$$

Lucian Maticiuc

Verficăm acum dacă punctul $A_4\,(4,1,5)$ aparţine planului anterior, adică dacă coordonatele lui verifică ecuaţia planului. Avem că

$$-28\cdot 4-23\cdot 1+27\cdot 5+107=0\Leftrightarrow 107=0,$$

deci s-a obţinut o contradicţie, prin urmare punctul A_4 nu aparţine planului determinat de celelalte trei puncte.

6. Să se determine unghiul dintre planele $(\pi_1): 2x-3y+z-5=0$ şi $(\pi 2): -3x-y+z-5=0$.

   Rezolvare:

   Unghiul dintre cele două plane este unghiul dintre normalele la plane.
   Dar $\vec{N}_1=(2,-3,1)$ şi $\vec{N}_2=(-3,-1,1)$ deci

$$\cos(\vec{N}_1,\vec{N}_2)=\frac{\langle \vec{N}_1,\vec{N}_2\rangle}{||\vec{N}_1||\cdot||\vec{N}_2||}=\frac{-6+3+1}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{11}}.$$

7. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0\,(1,-2,-3)$ şi este paralel cu planul XOY.

   Rezolvare:

   Vectorul normal al planului XOY este $\vec{N}=\vec{k}=(0,0,1)$. Deoarece planul cerut este paralel cu cel dat rezultă că cele două plane au aceeaşi normală $\vec{N}=\vec{k}$.

   Ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ şi are normala $\vec{N}=(0,0,1)$ este

$$0\,(x-x_0)+0\,(y-y_0)+1\,(z-z_0)=0\Leftrightarrow z-z_0=0\Leftrightarrow z=z_0\,.$$

   Deci planul cerut este

$$z=-3.$$

8.

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 7 & 2 & 1\\ -1 & 0 & -5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+1 & y & z-5 & 0\\ 4 & 1 & 5 & 0\\ 1 & 7 & 7 & 0\\ -1 & 0 & -5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+1 & y & z-5\\ 4 & 1 & 5\\ 1 & 7 & 7\end{vmatrix}=-28\,(x+1)-23y+27\,(z-5)$$
$$\Leftrightarrow\quad -28x-23y+27z+107=0.$$

Lucian Maticiuc