Algebră liniară şi elemente de geometrie

Mircea Crâşmăreanu

19 Aprilie 2021

Cuprins

Cursul 1

Spaţii şi subspaţii vectoriale

Reamintim că pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ avem două operaţii *interne*, adunarea $+$ şi înmulţirea $\cdot$, astfel încât tripletul $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un *corp comutativ*. Cadrul de lucru al următoarelor cursuri din partea de Algebră este fixat de următoarea noţiune:

Definiţia 1.1 Fixăm mulţimea nevidă $V \neq \emptyset$ ale cărei elemente $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \ldots$, le vom numi *vectori*. O *structură de spaţiu vectorial real* pe V este o pereche de operaţii $(+, \cdot)$ de forma:
i) $+ : V \times V \to V$, $(\bar{u}, \bar{v}) \to \bar{u} + \bar{v} \in V$; deci $+$ este o operaţie internă,
ii) $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, $(\lambda, \bar{u}) \to \lambda\bar{u} \in V$; deci $\cdot$ este o operaţie externă,
ce satisfac următoarele două seturi de axiome:
I) perechea $(V, +)$ este grup comutativ (i.e. abelian):
SV1) $+$ este asociativă: $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$,
SV2) $+$ este comutativă: $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$,
SV3) $+$ admite element neutru: $\exists\ \bar{0} \in V : \bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$,
SV4) orice vector admite invers relativ la $+$: $\bar{u} + (-1)\bar{u} = \bar{0}$.
II) $\cdot$ satisface 4 axiome:
SV5) distributivitatea faţă de $+$: $\lambda(\bar{u} + \bar{v}) = \lambda\bar{u} + \lambda\bar{v}$,
SV6) $(\alpha + \beta)\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}$,
SV7) $\alpha(\beta\bar{u}) = (\alpha\beta)\bar{u}$,
SV8) $1 \cdot \bar{u} = \bar{u}$.
Toate aceste axiome au loc pentru orice vectori şi orice scalari. $\bar{0}$ se numeşte *vectorul nul* iar tripletul $(V, +, \cdot)$ îl numim *spaţiu vectorial real*. $\mathbb{R}$ este *corpul de scalari* al lui V.

Observaţia 1.2 i) În baza axiomei SV4 vectorul $(-\lambda)\bar{u}$ se va nota $-\lambda\bar{u}$ şi avem următoarele identităţi:

$$\lambda \cdot (-\bar{u}) = -(\lambda\bar{u}), \quad \lambda(\bar{u} - \bar{v}) = \lambda\bar{u} - \lambda\bar{v}, \quad (\alpha - \beta)\bar{u} = \alpha\bar{u} - \beta\bar{u}. \tag{1.1}$$

ii) Pentru orice $\bar{u} \in V$ avem $0\bar{u} = \bar{0}$ şi pentru orice scalar λ avem $\lambda\bar{0} = \bar{0}$. Mai mult, relaţia $\lambda\bar{u} = \bar{0}$ implică $\lambda = 0$ sau $\bar{u} = \bar{0}$. Reamintim faptul că elementul neutru al unui grup este unic; deci vectorul nul este unic. La fel, inversul oricărui element din grup este unic.
iii) Extrem de utile pentru Fizică sunt şi spaţiile vectoriale *complexe* care se definesc complet analog prin utilizarea corpului comutativ $\mathbb{C}$ în locul lui $\mathbb{R}$.
iii) Anumiţi autori, de formaţie algebrică, folosesc denumirea de *spaţiu liniar* pentru aceeaşi noţiune. De aceea, teoria spaţiilor vectoriale are numele de *algebră liniară*. Datorită semnificaţiei fizice a vectorilor vom utiliza varianta mai lungă de *spaţiu vectorial* dar recomandăm parcurgerea oricărui material bibliografic indiferent de denumire! $\square$.

Exemple 1.3 1) Fixăm numărul natural $n \in \mathbb{N}$ şi considerăm produsul cartezian $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$; deci factorul $\mathbb{R}$ apare de n ori. Prin convenţie $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Elementele $\bar{x}$ ale lui $\mathbb{R}^n$ sunt n-uple:

$$\bar{x} = (x^1, ..., x^n)$$

şi definim:

$$\bar{x} + \bar{y} := (x^1 + y^1, ..., x^n + y^n), \quad \lambda\bar{x} := (\lambda x^1, ..., \lambda x^n). \tag{1.2}$$

Precizăm că un egal precedat de două puncte înseamnă exact "prin definiţie". O verificare imediată a axiomelor dă faptul că $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ este spaţiu vectorial real. În exact aceeaşi manieră $\mathbb{C}^n$ este spaţiu vectorial complex. Vectorul nul este n-upla cu toate elementele zero.
2) Fixăm $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $M_{m,n}(\mathbb{R})$ mulţimea matricilor cu elemente reale având m linii şi n coloane. Cu aceleaşi operaţii element cu element ca mai sus avem că $(M_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ este spaţiu vectorial real. În fapt, $\mathbb{R}^n$ este un caz particular al acestui exemplu deoarece o convenţie utilă în calcule (chiar dacă pare o complicare a scrierii) notează vectorii $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ca fiind matrici coloane:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

O matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ va fi notată $A = (a^i_j)_{i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}}$ cu indicele superior reprezentând linia iar indicele inferior reprezenând coloană!

Astfel, relaţia vectorială $\bar{y} = A \cdot \bar{x}$ va deveni relaţia matriceală:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Egalitatea liniilor $i \in \{1, ..., m\}$ din (1.4) se scrie:

$$y^i = a^i_j x^j \tag{1.5}$$

unde în membrul drept folosim *convenţia Einstein de scriere*: apariţia unui indice atât jos cât şi sus semnifică sumarea după toate valorile acelui indice.

Atenţie: vom utiliza mereu această convenţie!

Prin urmare $\mathbb{R}^m = M_{m,1}(\mathbb{R})$. Analog $M_{m,n}(\mathbb{C})$ este spaţiu vectorial complex. De asemeni, pentru simplitate spaţiul vectorial $M_{n,n}(\mathbb{K})$ se va nota $M_n(\mathbb{K})$ pentru $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
3) Pentru mulţimea nevidă X fie $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f; f : X \to \mathbb{K}\}$ mulţimea tuturor funcţiilor de la X la $\mathbb{K}$. Fie $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$ oarecare. Definim $f + g$ şi $\lambda \cdot f$ punctual:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x).$$

Avem imediat că $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot)$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial. $\square$

O manieră des utilizată de a obţine noi structuri este prin restricţie la submulţimi. Fixăm $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial V şi o submulţime a sa nevidă $W \subset V$.

Definiţia 1.4 Spunem că W *este subspaţiu vectorial în* V şi notăm $W \subset_{sv} V$ dacă restricţiile operaţiilor $(+, \cdot)$ ale lui V la W determină pe W o structură de $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial.

Din punct de vedere tehnic verificăm starea de subspaţiu vectorial cu următoarea **caracterizare**:

Teorema 1.5 *$W \subset_{sv} V$ dacă şi numai dacă sunt satisfăcute următoarele două condiţii*:
sV1) *restricţia operaţiei $+$ la W este internă*: $\bar{u}, \bar{v} \in W \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in W$,
sV2) *restricţia operaţiei $\cdot$ la W este internă*: $\lambda \in \mathbb{K}, \bar{u} \in W \Rightarrow \lambda\bar{u} \in W$.
Echivalent: sV) $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *şi* $\bar{u}, \bar{v} \in W$ *implică* $\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in W$.
Drept consecinţă $\bar{0} \in W$!

Exemple 1.6 1) Orice spaţiu vectorial are măcar două subspaţii, $\{\bar{0}\}$ şi V, numite *subspaţiile triviale*. Dacă există, toate celelalte subspaţii se vor numi *proprii*.
2) Relativ la exemplul 1.3.2 fie $0 < m < n$. Atunci considerăm $\mathbb{K}^m$ ca subspaţiu vectorial în $\mathbb{K}^n$ prin considerarea elementelor $\bar{x} \in \mathbb{K}^m$ ca fiind:

$$\bar{x} = (x^1, ..., x^m, 0, ..., 0) \in \mathbb{K}^n$$

deci având nule ultimele $n - m$ componente!

Din punct de vedere geometric subspaţiile lui $\mathbb{R}^2$ sunt: $\{\bar{0} = (0, 0)\}$, dreptele prin origine şi $\mathbb{R}^2$. Subspaţiile lui $\mathbb{R}^3$ sunt: $\{\bar{0} = (0, 0, 0)\}$, dreptele prin origine, planele prin origine şi $\mathbb{R}^3$.
3) Fie $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ mulţimea funcţiilor polinomiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu coeficienţi reali respectiv $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ mulţimea funcţiilor polinomiale de grad cel mult n deci a expresiilor:

$$P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_{n-1}X + a_n, \quad a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}.$$

X se numeşte *nedeterminata*. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ şi $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ sunt subspaţii vectoriale importante în $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4) Deosebit de importante în Analiza Fourier a semnalelor şi undelor sunt *polinoamele trigonometrice* adică expresii de forma:

$$T(X) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k \cos(kX) + \beta_k \sin(kX)], \quad \alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Ca la exemplul precedent notăm mulţimea lor cu $\mathcal{T}$ respectiv $\mathcal{T}_n$ şi avem că acestea sunt subspaţii vectoriale în $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $\square$

Cursul 2

Operaţii cu subspaţii vectoriale. Generatori

Fixăm spaţiul vectorial real V şi două subspaţii vectoriale V_1, V_2 oarecare. Reamintim că două operaţii fundamentale cu mulţimi sunt reuniunea $\cup$ şi intersecţia $\cap$.

Observaţia 2.1 În general $V_1 \cup V_2$ nu este subspaţiu şi prezentăm un contra-exemplu. Fie $V = \mathbb{R}^2$ şi $V_1 = B_1$ prima bisectoare respectiv $V_2 = B_2$ a doua bisectoare din plan:

$$B_1 : y = x, \quad B_2 : y = -x. \tag{2.1}$$

Alegem câte un vector în fiecare subspaţiu: $v_1 = (1, 1) \in V_1$ şi $v_2 = (1, -1) \in V_2$. Suma lor $v_1 + v_2 = (2, 0)$ nu aparţine reuniunii $V_1 \cup V_2$. $\square$

Din fericire, pentru intersecţie lucrurile stau bine:

Propoziţia 2.2 *$V_1 \cap V_2$ este subspaţiu vectorial în V. Mai general, pentru orice familie indexată de subspaţii V_i, $i \in I$ avem că intersecţia $\cap_{i\in I} V_i$ este subspaţiu vectorial.*

Deoarece $+$ este operaţie internă pe V putem defini o nouă operaţie pe mulţimea subspaţiilor lui V:

Definiţia 2.3 i) *Suma* subspaţiilor date este mulţimea:

$$V_1 + V_2 := \{\bar{u} + \bar{v}; \bar{u} \in V_1, \bar{v} \in V_2\}. \tag{2.2}$$

ii) V_1 şi V_2 se numesc *direct sumabile* dacă $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$ şi în acest caz notăm suma lor prin $V_1 \oplus V_2$.

Teorema 2.4 i) *Avem $V_1 + V_2 \subset_{sv} V$. Mai general, pentru orice familie finită de subspaţii avem $V_1 + ... + V_n \subset_{sv} V$.*
ii) *V_1 şi V_2 sunt direct sumabile dacă şi numai dacă scrierea oricărui vector $\bar{u} \in V_1 + V_2$ ca sumă este unică i.e. există şi sunt unici vectorii $\bar{v}_1 \in V_1$, $\bar{v}_2 \in V_2$ aşa încât $\bar{u} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$.*

Exemple 2.5 1) Fie $V = \mathbb{R}^3$ şi V_1=planul xOy respectiv V_2=planul xOz. Avem ecuaţiile acestor plane:

$$xOy : z = 0, \quad xOz : y = 0. \tag{2.3}$$

$V_1 \cap V_2$ este dreapta Ox ce este subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^3$. Suma acestor subspaţii este întreg spaţiul: $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ şi ele nu sunt sumabile direct.

Putem verifica faptul că nu sunt sumabile direct şi concret. Fie $\bar{u} = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Avem:

$$\bar{u} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{w}_1 + \bar{w}_2, \bar{v}_1 = (1,1,0) \in V_1, \bar{v}_2 = (0,0,1) \in V_2, \bar{w}_1 = (0,1,0) \in V_1, \bar{w}_2 = (1,0,1) \in V_2.$$

deci scrierea lui $\bar{u} \in V_1 + V_2$ ca sumă nu este unică.
2) Spaţiul vectorial real $M_n(\mathbb{R})$ este o sumă directă de două subspaţii. Reamintim că pentru matricea fixată $A = (a^i_j) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *transpusa* sa este ${}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ dată de ${}^tA = (a^j_i)_{j=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}}$. Fie:

$$Sym(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}); {}^tA = A\}, \quad o(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); {}^tA = -A\}. \tag{2.4}$$

Aceste mulţimi sunt subspaţii vectoriale în $M_n(\mathbb{R})$ şi $A \in Sym(n)$ se numeşte *matrice simetrică* iar $A \in o(n)$ se numeşte *matrice antisimetrică*. Avem descompunerea în sumă directă:

$$M_n(\mathbb{R}) = Sym(n) \oplus o(n), \quad A = A_s + A_o, \quad A_s = \frac{1}{2}(A + {}^tA), \quad A_o = \frac{1}{2}(A - {}^tA). \tag{2.5}$$

□

Fixăm acum un sistem finit de vectori $S = \{v_1, ..., v_n\}$ din spaţiul vectorial real V.

Definiţia 2.6 Un vector $\bar{u} \in V$ de forma:

$$\bar{u} = \lambda^i \bar{v}_i = \lambda^1 \bar{v}_1 + ... + \lambda^n v_n \tag{2.6}$$

se numeşte *combinaţie liniară* de vectorii daţi. Mulţimea combinaţiilor liniare o notăm $span\{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\}$ sau *span* S. Prin convenţie $span\emptyset = \{\bar{0}\}$.

Teorema 2.7 $span\{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\} \subset_{sv} V$.

Definiţia 2.8 $span\{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\}$ se numeşte *subspaţiul generat de* vectorii daţi. Vectorii $\bar{v}_1$, ..., $\bar{v}_n$ se numesc *generatorii* lui *span* S. Spaţiul V se numeşte *finit generat* dacă admite un sistem finit de generatori.

Observaţia 2.9 i) Vectorii v_1, ..., v_n aparţin subspaţiului generat deoarece facem pe rând câte un scalar 1 şi ceilalţi 0:

$$\bar{v}_1 = 1\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + ... + 0\bar{v}_n.$$

În fapt, $span\{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\}$ este *cel mai mic subspaţiu* (în sensul incluziunii de mulţimi) ce conţine toţi vectorii daţi: dacă $U \subset_{sv} V$ conţine pe S atunci $spanS \subset U$.
ii) Dacă $\bar{w}_1$, ..., $\bar{w}_k$ aparţin lui $spanS$ atunci $span\{\bar{w}_1, ..., \bar{w}_k\} \subseteq spanS$.
iii) Fie $\bar{v} \in V$ oarecare. Avem $spanS = spanS \cup \{\bar{v}\}$ dacă şi numai dacă $\bar{v} \in spanS$.
iv) $span\{\bar{v}\} = \mathbb{R}\bar{v} = \{\lambda\bar{v}; \lambda \in \mathbb{R}\}$. Deci:

$$span\{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\} = \mathbb{R}\bar{v}_1 + ... + \mathbb{R}\bar{v}_n. \tag{2.7}$$

□

O altă noţiune deosebit de importantă este:

Definiţia 2.10 Sistemul S se numeşte *liniar independent* dacă pentru orice $j \in \{1, ..., n\}$ avem că $\bar{v}_j$ **nu aparţine** subspaţiului $span(S \setminus \{\bar{v}_j\})$. În caz contrar, S se numeşte *liniar dependent*.

Caracterizarea tehnică a sistemelor liniar independente este dată de:

Teorema 2.11 *Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:
1) *S este liniar independent*;
2) *relaţia $\lambda^i \bar{v}_i = \bar{0}$ implică $\lambda^1 = ... = \lambda^n = 0$*,
3) *relaţia $\lambda^i \bar{v}_i = \widetilde{\lambda}^i \bar{v}_i$ implică $\lambda^i = \widetilde{\lambda}^i$ pentru toţi $i = 1, ..., n$.*
Consecinţă: dacă $\bar{0} \in S$ atunci S este liniar dependent.

Există o legătură profundă între cele două tipuri de sisteme finite introduse anterior adică de generatori şi liniar independente:

Teorema schimbului a lui Steinitz *Fie V un spaţiu vectorial finit generat în care fixăm $S_1 = \{\bar{u}_1, ..., \bar{u}_m\}$ sistem liniar independent şi $S_2 = \{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\}$ sistem de generatori i.e. $V = spanS_2$. Avem:*

$$m \leq n \tag{2.6}$$

şi, după o eventuală renumerotare a indicilor:

$$V = span\{\bar{u}_1, ..., \bar{u}_m, \bar{v}_{m+1}, ..., \bar{v}_n\}. \tag{2.8}$$

Prin urmare, suntem interesaţi de cazul de egalitate $m = n$ ceea ce conduce la următoarea noţiune fundamentală:

Definiţia 2.12 Sistemul finit B din V finit generat îl numim *bază* dacă este simultan sistem de generatori şi liniar independent.

Teorema schimbului furnizează acum rezultatul central al teoriei spaţiilor finit generate:

Teorema fundamentală a teoriei spaţiilor finit generate *Dacă V este finit generat atunci toate bazele sale au acelaşi cardinal n ce reprezintă numărul maxim de vectori liniar independenţi din V şi simultan numărul minim de generatori pentru V.*

Definiţia 2.13 Dacă V este finit generat atunci n se numeşte *dimensiunea lui V* şi deseori vom nota V_n pentru a preciza acest fapt. Mai notăm $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ sau dacă $\mathbb{K}$ este subînţeles $\dim V = n$.

Exemple 2.14 1) $\mathbb{K}^n$ are dimensiunea n deoarece sistemul $B_c = \{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\}$ cu:

$$\bar{e}_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \tag{2.9}$$

unde 1 apare doar pe locul i este o bază în $\mathbb{K}^n$ numită *baza canonică*.
2) $M_{m,n}(\mathbb{K})$ are dimensiunea $m \cdot n$ deoarece avem *baza canonică* $B_c = \{E_1^1, ..., E_n^m\}$ unde matricea E_j^i are elementul 1 la intersecţia liniei i cu coloana j şi în rest 0.
3) $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ are dimensiunea $n+1$ deoarece avem *baza canonică* $B_c = \{1 = X^0, X = X^1, ..., X^n\}$.
4) Fixarea bazei $B = \{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\}$ în $\mathbb{K}$-spaţiul V_n înseamnă splitarea:

$$V_n = \mathbb{K}\bar{v}_1 \oplus ... \oplus \mathbb{K}\bar{v}_n. \tag{2.10}$$

□

Un rezultat fundamental în teoria spaţiilor vectoriale finit-dimensionale este:

Teorema 2.15 *Fie V_1 şi V_2 subspaţii vectoriale în V_n. Atunci*:

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2. \tag{2.11}$$

Exemplul 2.5.1 revisited Avem $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$, $\dim(V_1 + V_2) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ şi $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim Ox = 1$. Egalitatea (2.11) este verificată: $2 + 2 = 3 + 1$. $\square$

Referitor la sistemele finite de vectori avem caracterizarea foarte importantă:

Teorema 2.16 *Numărul vectorilor liniar independenţi din sistemul finit S este exact dimensiunea lui span$S$.*

Să presupunem că avem $S = \{v_1, ..., v_m\}$ în V_n în care avem fixată o bază B. Vom avea că numărul vectorilor liniar independenţi din S este r=rangul matricii asociate sistemului S relativ la baza B. Mai precis, coloanele acestei matrici sunt coloanele coordonatelor vectorilor lui S (vezi Cursul următor) descompuşi în baza B. Ştim că $r \leq \min(m, n)$.

Cursul 3

Calcul vectorial în baze

Fixăm un spaţiul vectorial (real sau complex) V_n şi baza $B = \{\bar{v}_1, ...\bar{v}_n\}$. Fie $\bar{x} \in V_n$ oarecare. Din definiţiile Cursului anterior există şi sunt unice (!) numerele $x^1, ..., x^n \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ a.î.:

$$\bar{x} = x^i \bar{v}_i = x^1 \bar{v}_1 + ... + x^n \bar{v}_n. \tag{3.1}$$

Definiţia 3.1 Numerele $x^1, ..., x^n$ se numesc *coordonatele vectorului $\bar{x}$ în baza B.*

Exemplul 3.2 1) Fie $\bar{x} = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{K}^n$. Coordonatele lui $\bar{x}$ în baza canonică B_c sunt exact componentele sale vectoriale $x^1, ..., x^n$ şi acest fapt motivează denumirea de *canonică.*
2) Componentele vectorului nul $\bar{0} \in V_n$ sunt toate nule în raport cu orice bază a lui V_n. $\square$

Notaţie foarte utilă Deoarece din acest moment vom lucra matriceal este convenabil să rescriem relaţia (3.1) matriceal:

$$\bar{x} = B \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Prin urmare, fixarea bazei B permite identificarea vectorului $\bar{x}$ cu matricea coloană a coeficienţilor:

$$\bar{x} \to \bar{x}_B := \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

adică transferul calculului pe spaţiul $\mathbb{K}^n$ prin identificările:

$$(\bar{x} +_{V_n} \bar{y})_B = \bar{x}_B + \bar{y}_B, \quad (\lambda \cdot_{V_n} \bar{x})_B = \lambda \bar{x}_B. \tag{3.4}$$

$\square$

Apare acum ca naturală problema schimbării coordonatelor unui vector dat la o schimbare de baze $B \to \tilde{B} = \{\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_n\}$. Fie indicele $j \in \{1, ..., n\}$ fixat. Avem că vectorul $\tilde{v}_j \in \tilde{B}$ admite o descompunere unică în raport cu B:

$$\tilde{v}_j = B \cdot \begin{pmatrix} s_j^1 \\ \vdots \\ s_j^n \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

În acest mod se naşte matricea:

$$M_n(\mathbb{K}) \ni S = (s_j^i)_{i,j=\overline{1,n}} \tag{3.6}$$

şi avem formal:

$$\boxed{\tilde{B} = B \cdot S.} \tag{3.7}$$

Definiţia 3.3 S se numeşte *matricea de trecere de la* B *la* $\tilde{B}$ şi de aceea mai poate fi notată $C(B, \tilde{B})$ din englezescul *change=schimbare.*

Proprietatea fundamentală a matricii $S = C(B, \tilde{B})$ este faptul că este inversabilă cu:

$$S^{-1} = C(\tilde{B}, B). \tag{3.8}$$

Revenim la vectorul fixat $\bar{x}$ şi matricile coloană asociate $\bar{x}_B$, $\bar{x}_{\tilde{B}}$. Vrem legătura dintre aceste matrici coloană. Cu scrierea (3.2) avem:

$$\bar{x} = B \cdot \bar{x}_B = \tilde{B} \cdot \bar{x}_{\tilde{B}} = (B \cdot S) \cdot \bar{x}_{\tilde{B}}. \tag{3.9}$$

unde, pentru ultimul egal am utilizat relaţia (3.7). Înmulţirea matricilor este asociativă, deci avem:

$$B \cdot \bar{x}_B = B \cdot (S \cdot \bar{x}_{\tilde{B}}) \tag{3.10}$$

şi cum descompunerea lui $\bar{x}$ în baza B este unică avem:

$$\bar{x}_B = S \cdot \bar{x}_{\tilde{B}} \tag{3.11}$$

ceea ce implică formula de "trecere de la coordonatele vechi x^i la coordonatele noi $\tilde{x}^a$":

$$\boxed{\tilde{x}_{\tilde{B}} = S^{-1} \cdot \bar{x}_B.} \tag{3.12}$$

Dacă vrem scrierea explicită a ecuaţiei (3.12) fie $S^{-1} = (\tilde{s}^a_j)_{a,j=1,n}$. Deci schimbarea coordonatelor la o schimbare de baze este:

$$\tilde{v}_b = s^i_b \bar{v}_i \Rightarrow \tilde{x}^a = \tilde{s}^a_j x^j. \tag{3.13}$$

Pentru uşurarea memorării să notăm şi utilizarea de seturi distincte de indici: $i, j, k, ...$ pentru baza/coordonatele vechi respectiv $a, b, c, ...$ pentru baza/coordonatele noi!

Observaţia 3.4 În anumite teorii fizice moderne apar "obiecte geometrice" T ce se exprimă (mai corect spus "se descompun") în baza B respectiv $\tilde{B}$ prin ansambluri de numere din $\mathbb{K}$:

$$T^{i_1...i_k}_{j_1...j_l}, \quad \tilde{T}^{a_1...a_k}_{b_1...b_l}, \quad i, j, a, b = 1, ..., n$$

Dacă regula de schimbare a acestor componente la schimbarea bazelor este:

$$\tilde{T}^{a_1...a_k}_{b_1...b_l} = \tilde{s}^{a_1}_{i_1} \cdot ... \cdot \tilde{s}^{a_k}_{i_k} \cdot s^{j_1}_{b_1} \cdot ... \cdot s^{j_l}_{b_l} T^{i_1...i_k}_{j_1...j_l} \tag{3.14}$$

atunci spunem că T este *tensor de tip* (k, l) sau încă *tensor de* k *ori contravariant şi de* l *ori covariant.* Prin urmare, indicii de sus sunt de contravarianţă deoarece corespund matricii inverse S^{-1} iar indicii de jos sunt de covarianţă deoarece corespund aceleiaşi matrici S ca şi schimbarea de baze!

Comparând (3.13) şi (3.14) obţinem că vectorii sunt tensori de tip $(1, 0)$ sau încă tensori contravarianţi! □

Observaţia 3.5 Am văzut mai sus că S este o matrice inversabilă. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ mulţimea $GL(n, \mathbb{K})$ a n-matricilor, cu elemente din $\mathbb{K}$, ce sunt inversabile formează un grup relativ la operaţia de înmulţire a matricilor pătratice, numit *n-grupul liniar general peste* $\mathbb{K}$. Avem $GL(1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$ şi acesta este singurul grup liniar general comutativ!

În limbaj algebric avem că $GL(n, \mathbb{K})$ este *grupul unităţilor* în *inelul* $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$, deci este "cel mai mare" grup relativ la înmulţirea matricilor, ce se poate forma cu elemente din $M_n(\mathbb{K})$. Deosebit de importante, atât pentru matematică cât şi pentru fizică, sunt o serie de subgrupuri în $GL(n, \mathbb{K})$:
1) *n-grupul liniar special*: $SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}); \det A = +1\}$,
2) *n-grupul ortogonal*: $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); {}^t A \cdot A = A \cdot {}^t A = I_n\}$,
3) n-grupul ortogonal special: $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n); \det A = +1\}$.
În limbaj geometric, spaţiul liniar $o(n)$ înzestrat cu *croşetul de anti-comutare*:

$$[A, B] := A \cdot B - B \cdot A \tag{3.15}$$

este *algebra Lie* a *grupului Lie* $O(n)$. $\square$

Cursul 4

Transformări liniare

În Cursul precedent am studiat schimbarea coordonatelui unui vector fixat la o schimbare de baze. Vom generaliza această problemă în prezentul Curs. Fixăm două $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale, notate V şi W.

Definiţia 4.1 Aplicaţia $T : V \to W$ o numim *transformare liniară* sau *operator liniar* dacă invariază operaţiile spaţiilor adică satisface cele două condiţii următoare:
TL1) $T(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = T(\bar{v}_1) + T(\bar{v}_2)$,
TL2) $T(\lambda\bar{v}) = \lambda T(\bar{v})$,
pentru orice $\lambda \in \mathbb{K}$ şi orice vectori $\bar{v}, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$. Notăm cu $L(V, W)$ mulţimea lor nevidă.

Observaţia 4.2 i) Putem unifica cele două condiţii ale definiţiei într-o singură condiţie, că T duce combinaţii liniare în combinaţii liniare:
TL) $T(\alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2) = \alpha T(\bar{v}_1) + \beta T(\bar{v}_2)$,
valabilă pentru toţi scalarii α, β.
ii) $T(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$.
iii) Mulţimea $L(V, W)$ este tot un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial deoarece pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ şi orice $T_1, T_2 \in L(V, W)$ avem că $\alpha T_1 + \beta T_2 \in L(V, W)$.
iv) Pentru $V = W$ notăm $L(V)$ în loc de $L(V, V)$ şi $T \in L(V)$ îl numim *endomorfism liniar*, uneori pe scurt *endomorphism.* Unii autori folosesc notaţia $End(V)$ pentru $L(V)$. $\square$

Unui operator liniar fixat T îi asociem, de o manieră naturală, câte o submulţime în fiecare spaţiu vectorial dat.

Definiţia 4.3 *Nucleul lui T* este:

$$KerT := \{\bar{v} \in V; T(\bar{v}) = \bar{0}_W\} \subseteq V; \quad \bar{0}_V \in KerT \neq \emptyset. \tag{4.1}$$

Imaginea lui T este:

$$ImT := \{\bar{w} \in W; \exists\bar{v} \in V, \bar{w} = T(\bar{v})\} \subseteq W; \quad \bar{0}_W \in ImT \neq \emptyset. \tag{4.2}$$

Structura algebrică a acestor mulţimi este adaptată cadrului de lucru în sensul următorului rezultat:

Teorema 4.4 *$KerT \subset_{sv} V$ şi $ImT \subset_{sv} W$.*

În continuare presupunem că ambele spaţii vectoriale considerate sunt finit-dimensionale: $V = V_n$ şi $W = W_m$. Atunci $KerT$ respectiv ImT vor fi finit-dimensionale ceea ce conduce la următoarele noţiuni:

Definiţia 4.5 Pentru $T \in L(V_n, W_m)$ definim: i) *defectul lui* T este numărul $defT := dimKerT \leq n$; ii) *rangul lui* T este numărul $rangT := dimImT \leq m$.

Rezultatul central al teoriei operatorilor liniari între spaţii finit-dimensionale este dat de:

Teorema 4.6 (a rangului) *Pentru orice* $T \in L(V_n, W_m)$ *avem*:

$$\boxed{n = defT + rangT}. \tag{4.3}$$

Consecinţă importantă: $rangT \leq m$ *şi* $rangT \leq n$ *implică* $rangT \leq \min\{m, n\}$!

O clasă specială de operatori liniari este dată de:

Definiţia 4.7 T se numeşte *izomorfism* (liniar) dacă este bijecţie. În acest caz, spaţiile V, W se numesc *izomorfe*.

Observaţia 4.8 i) T este surjectivă dacă şi numai dacă $ImT = W$ i.e. $rangT = m = maxim$!
ii) T este injectivă dacă şi numai dacă $KerT = \{\bar{0}_V\}$ i.e. $defT = 0 = minim$!
În adevăr, $T(\bar{v}_1) = T(\bar{v}_2)$ implică $T(\bar{v}_1) - T(\bar{v}_2) = \bar{0}_W$ iar liniaritatea lui T spune că membrul stâng al ultimei relaţii este $T(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)$ şi deci $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 \in KerT$. Cum vrem doar soluţia $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ rezultă $KerT = \{\bar{0}_V\}$.
În concluzie, bijectivitatea unei transformări liniare implică realizarea simultană a unui maxim şi a unui minim! □

Teorema 4.9 i) *Dacă* T *este izomorfism liniar atunci inversa sa* $T^{-1} \in L(W, V)$ *şi* T^{-1} *este izomorfism.*
ii) *Spaţiile finit-dimensionale* V_n, W_m *sunt izomorfe dacă şi numai dacă*:

$$\boxed{n = m}.$$

Demonstraţie i) Fie $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in W$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ arbitrari. Cum T este surjecţie avem $\bar{w}_i = T(\bar{v}_i)$ cu $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$. Avem:

$$T^{-1}(\alpha\bar{w}_1 + \beta\bar{w}_2) = T^{-1}(\alpha T(\bar{v}_1) + \beta T(\bar{v}_2)) = T^{-1}(T(\alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2)) = \alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2 = \alpha T^{-1}(\bar{w}_1) + \beta T(\bar{w}_2).$$

ii) Fie $T \in L(V_n, W_m)$ izomorfism. Deci avem $defT = 0$ şi $rangT = m$. Din teorema rangului $n = m$. Invers, fixăm o bază $B_V = \{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\}$ respectiv $B_W = \{\bar{w}_1, ...\bar{w}_n\}$ în cele două spaţii. Definim:

$$T(\bar{v})_i = \bar{w}_i, 1 \leq i \leq n$$

şi **extindem prin liniaritate**:

$$T(x^i\bar{v})_i = x^i\bar{w}_i$$

ceea ce spune că $T \in L(V_n, W_n)$. Avem imediat că T este izomorfism cu:

$$T^{-1}(x^i\bar{w}_i) = x^i\bar{v}_i.$$

Deci V_n şi W_n sunt izomorfe via T astfel construit. □

Observaţia 4.10 Punctul ii) al teoremei precedente ne spune un fapt fundamental: în teoria spaţiilor vectoriale finit-dimensional există un **singur invariant şi anume dimensiunea**! □

Observaţia 4.11 Mulţimea endomorfismelor lui V ce sunt bijecţii o notăm cu $GL(V)$. $GL(V)$ este grup relativ la compunerea funcţiilor, elementul neutru=aplicaţia identică $1_V : \bar{v} \in V \to \bar{v}$ care este evident transformare liniară. Spre exemplu, $GL(\mathbb{K}^n) = GL(n, \mathbb{K})$. □

Cursul 5

Calcul operatorial în baze

Fixăm operatorul liniar $T \in L(V_n, W_m)$ şi bazele $B_V = \{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\} = \{\bar{v}_j\}_{j=1,n}$ respectiv $B_W = \{\bar{w}_1, ..., \bar{w}_m\} = \{\bar{w}_a\}_{a=1,m}$ în V_n respectiv W_m. Vom proceda ca în Cursul 3; pentru indicele $j \in \{1, ..., n\}$ fixat vectorul $T(\bar{v}_j) \in W_m$ se descompune în mod unic în baza B_W:

$$T(\bar{v}_j) = B_W \cdot \begin{pmatrix} a_j^1 \\ \vdots \\ a_j^m \end{pmatrix} = B_W \cdot A_j, \quad T(\bar{v}_j) = a_j^b \bar{w}_b. \tag{5.1}$$

Fie matricea $A_T(B_V, B_W) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ce are drept coloane matricile coloane $A_j \in M_{m,1}(\mathbb{K})$. Prin urmare, avem globalizarea relaţiei (5.1):

$$T(B_V) = B_W \cdot A_T(B_V, B_W). \tag{5.2}$$

Matricea A_T joacă un rol fundamental în tot ceea ce urmează şi de aceea poartă un nume:

Definiţia 5.1 $A_T(B_V, B_W) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ se numeşte *matricea lui T în raport cu bazele B_V, B_W*.

Fie $\bar{x} \in V_n$ oarecare cu $\bar{x} = B_V \cdot \bar{x}_B$. Aplicăm T acestei relaţii liniare:

$$T(\bar{x}) = T(B_V) \cdot \bar{x}_B = B_W \cdot A_T \cdot \bar{x}_B$$

ceea ce spune că avem, din punct de vedere matriceal:

$$\boxed{[T(\bar{x})]_{B_W} = A_T \cdot \bar{x}_B}. \tag{5.3}$$

Consecinţă remarcabilă $rangT$ este exact rangul matricii A_T şi acest fapt justifică denumirea! Un fapt important ce rezultă de aici e invarianţa rangului unei matrici la schimbări de baze!

Să presupunem acum că schimbăm bazele în ambele spaţii: $B_V \to \widetilde{B_V}$ via $C(B_V, \widetilde{B_V}) \in GL(n, \mathbb{K})$ respectiv $B_W \to \widetilde{B_W}$ via $C(B_W, \widetilde{B_W}) \in GL(m, \mathbb{K})$. Fie A_T respectiv $\widetilde{A_T}$ matricile operatorului T în perechile de baze (B_V, B_W) respectiv $(\widetilde{B_V}, \widetilde{B_W})$. Deci la relaţia (5.2) adaugăm noua relaţie:

$$T(\widetilde{B_V}) = \widetilde{B_W} \cdot \widetilde{A_T}. \tag{5.4}$$

Aplicăm T relaţiei liniare:

$$\widetilde{B_V} = B_V \cdot C(B_V, \widetilde{B_V})$$

şi avem:

$$T(\widetilde{B_V}) = T(B_V) \cdot C(B_V, \widetilde{B_V}) =_{(5.2)} B_W \cdot A_T \cdot C(B_V, \widetilde{B_V}). \tag{5.5}$$

Dar relaţia (5.4) se scrie:

$$T(\widetilde{B_V}) = B_W \cdot C(B_W, \widetilde{B_W}) \cdot \widetilde{A_T}. \tag{5.6}$$

Comparăm relaţiile (5.5) şi (5.6); avem o egalitate vectorială exprimată în baza B_W şi din unicitatea scrierii într-o bază rezultă:

$$A_T \cdot C(B_V, \widetilde{B_V}) = C(B_W, \widetilde{B_W}) \cdot \widetilde{A_T} \tag{5.7}$$

ceea ce dă matricea nouă $\widetilde{A_T}$ în funcţie de cea veche A_T:

$$\boxed{\widetilde{A_T} = [C(B_W, \widetilde{B_W})]^{-1} \cdot A_T \cdot [C(B_V, \widetilde{B_V})]}. \tag{5.8}$$

Să observăm şi egalitatea dimensională asociată:

$$(m, n) = (m, m) \cdot (m, n) \cdot (n, n).$$

În cele ce urmează considerăm cazul endomorfismului $T \in End(V_n)$ şi a perechii de baze $(B_V, \widetilde{B_V})$ pentru care folosim notatţia simplificată $S = C(B_V, \widetilde{B_V})$. Formulele asociate sunt:

$$T(B_V) = B_V \cdot A_T, \quad \widetilde{A_T} = S^{-1} \cdot A_T \cdot S \tag{5.9}$$

ceea ce conduce la următoarea noţiune:

Definiţia 5.2 Matricile $A, \tilde{A} \in M_n(\mathbb{K})$ le numim *asemenea* (sau *similare*) şi notăm $A \sim \tilde{A}$ dacă există $S \in GL(n, \mathbb{K})$ a. î.:

$$\tilde{A} = S^{-1} \cdot A \cdot S. \tag{5.10}$$

Observaţia 5.3 i) Asemănarea este o relaţie de echivalenţă pe $M_n(\mathbb{K})$.
ii) Date matricile asemenea din definiţie avem o interpretare operatorială asociată: sunt matricile unui acelaşi $T \in End(V_n)$ în două baze distincte! $\square$

Problema schimbării matricii unui endomorfism T la o schimbare de baze ridică problema existenţei unei baze "cât mai adaptate" la T i.e. a existenţei unei baze în care matricea lui T este cât mai simplă posibil! Din punct de vedere calculatoriu, cea mai simplă formă a matricilor pătratice (netrivială) este cea **diagonală**:

$$A_T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

ceea ce înseamnă:

$$T(\bar{x}) = diag(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x^1 \\ \vdots \\ \lambda_n x^n \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Suntem astfel conduşi la următoarea noţiune:

Definiţia 5.4 $\lambda \in \mathbb{K}$ se numeşte *valoare proprie a endomorfismului* $T \in End(V_n)$ dacă există măcar un vector nenul $\bar{x}$ a. î. $T(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$. Avem că $\bar{0}$ satisface această relaţie: $T(\bar{0}) = \bar{0} = \lambda \cdot \bar{0}$. În acest caz, $\bar{x}$ se numeşte *vector propriu (nenul) corespunzător lui* λ şi multimea tuturor vectorilor proprii corespunzători (deci şi $\bar{0}$) o notăm V_λ. Dacă mulţimea valorilor proprii este nevidă atunci o notăm $Spec(T)$ şi o numim *spectrul lui* T.

Observaţii 5.5 i) Dacă $\lambda \in Spec(T)$ atunci $V_\lambda \subset_{sv} V_n$.
ii) Dacă $\lambda, \mu \in Spec(T)$ diferă atunci $V_\lambda \cap V_\mu = \{\bar{0}\}$. Mai mult, fie $\lambda_1, ..., \lambda_k \in Spec(T)$ diferite şi $\bar{x}_1 \in V_{\lambda_1}, ..., \bar{x}_k \in V_{\lambda_k}$. Atunci sistemul de vectori $\{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k\}$ este liniar independent. Prin urmare, cardinalul mulţimii $Spec(T)$ este cel mult n!

În particular, dacă $cardSpec(T) = n$ şi avem $\lambda_1 < ... < \lambda_n$ atunci sistemul de vectori $B = \{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\}$ este o bază a lui V_n şi în raport cu B avem exact forma diagonală dorită $A_T = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$! Acest fapt arată şi ne-unicitatea bazei în raport cu care T are formă diagonală! $\square$

Să tratăm matriceal problema existenţei valorilor proprii λ. Cu formula (5.3) avem:

$$A_T \cdot \bar{x}_B = \lambda\bar{x}_B = \lambda(I_n \cdot \bar{x}_B)$$

unde I_n este matricea identică de ordin n. Prin urmare, matricea coloană $\bar{x}_B$ satisface sistemul liniar **omogen**:

$$(A_T - \lambda I_n) \cdot \bar{x}_B = \bar{0}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Dar, un sistem liniar omogen admite soluţii nebanale (ne-nule) dacă şi numai dacă determinantul matricii sistemului este nul! Am ajuns astfel la următoarea noţiune:

Definiţia 5.6 *Polinomul caracteristic al matricii* $A \in M_n(\mathbb{K})$ este $P_A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$:

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n). \tag{5.13}$$

Un rezultat central al teoriei diagonalizării este:

Teorema 5.7 *Polinomul caracteristic, şi deci şi toţi coeficieţii săi, este invariant la acţiunea prin asemănare a grupului* $GL(n, \mathbb{K})$ *pe* $M_n(\mathbb{K})$ *i.e.* $P_{S^{-1}AS} = P_A$ *pentru orice* $S \in GL(n, \mathbb{K})$.

În acest moment putem prezenta *criteriul general de diagonalizare* în care pentru $\lambda \in Spec(T)$ notăm $m(\lambda)$ multiplicitatea lui λ ca rădăcină a polinomului caracteristic P_{A_T}:

Teorema 5.8 (!) *Pentru* $T \in End(V_n)$ *fixat există măcar o bază* B *în raport cu care* $A_T = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ *dacă şi numai dacă au loc următoarele două condiţii*:
D1) P_{A_T} *are toate rădăcinile* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *în corpul de scalari* $\mathbb{K}$,
D2) *pentru orice* λ_i *avem egalitatea dintre multiplicitatea geometrică* $\dim V_{\lambda_i}$ *şi multiplicitatea algebrică* $m(\lambda_i)$.

Putem reformula doar la nivel matriceal:

Criteriul general de diagonalizare Pentru matricea $A \in M_n(\mathbb{K})$ există măcar un $S \in GL(n, \mathbb{K})$ a. î. $S^{-1}AS = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ dacă şi numai dacă se îndeplinesc ambele condiţii următoare:

DM1) polinomul caracteristic P_A are toate rădăcinile $\lambda_1, ..., \lambda_n$ în corpul de scalari $\mathbb{K}$,
DM2) pentru orice λ_i avem: $rang(A - \lambda_i I_n) = n - m(\lambda_i)$!

Observaţia 5.9 Orice polinom cu coeficienţi complecşi are toate rădăcinile complexe; spunem că $\mathbb{C}$ este *corp algebric închis*. Prin urmare, condiţia D1 sau DM1 se pune doar când suntem peste corpul numerelor reale. Mai reamintim că dacă un polinom P cu coeficienţi reali are rădăcina complexă $z = x + iy$ atunci P are ca rădăcină şi *conjugata* $\bar{z} := x - iy$. $\square$

Încheiem cu expresia desfăşurată a polinomului caracteristic:

$$P_A(\lambda) = (-1)^n[\lambda^n - \delta_1\lambda^{n-1} + \delta_2\lambda^{n-2} + ... + (-1)^n\delta_n] \tag{5.14}$$

cu: $\delta_1 = TrA$, $\delta_n = \det A$, $\delta_2 =$suma determinanţilor (minorilor) de ordinul 2 care au diagonala pe diagonala principală a lui A, etc! Prin urmare, din invarianţa din Teorema 5.7 avem:

$$TrA = \lambda_1 + ... + \lambda_n, \quad \det A = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n. \tag{5.15}$$

Cursul 6

Spaţii vectoriale euclidiene

Fixăm spaţiul vectorial real V. Definim un instrument de "măsurăre" a lungimii (i.e. normei) vectorilor din V.

Definiţia 6.1 I) Numim *produs scalar pe V* o *formă biliniară, simetrică şi pozitiv definită* pe V adică o aplicatie $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$ satisfăcând:
PS1) (pozitiva definire) $< \bar{v}, \bar{v} > \geq 0$ pentru orice $\bar{v} \in V$ şi avem egalitate doar pentru vectorul nul $\bar{0}$,
PS2) (simetria) $< \bar{u}, \bar{v} >=< \bar{v}, \bar{u} >$ pentru orice $\bar{u}, \bar{v} \in V$,
PS3) (biliniaritatea) $< \alpha\bar{u} + \beta\bar{v}, \bar{w} >= \alpha < \bar{u}, \bar{w} > +\beta < \bar{v}, \bar{w} >$ pentru orice triplet de vectori din V.
Perechea $(V, < \cdot, \cdot >)$ o numim *spaţiu vectorial euclidian* iar dacă $< \bar{u}, \bar{v} >= 0$ atunci spunem că aceşti vectori sunt *ortogonali* sau *perpendiculari* şi notăm $\bar{u} \perp \bar{v}$!
II) Fixăm spaţiul euclidian $(V, <>)$. Funcţia *normă* este $\| \| : V \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\bar{u} = \sqrt{< \bar{u}, \bar{u} >}$. Dacă $\|\bar{u}\| = 1$ spunem că $\bar{u}$ este *versor*.

Observaţii 6.2 i) În PS3 am scris doar liniaritatea produsului scalar în primul argument deoarece datorită simetriei avem liniaritatea şi în al doilea argument: $< \bar{u}, \alpha\bar{v} + \beta\bar{w} >= \alpha < \bar{u}, \bar{v} > +\beta < \bar{u}, \bar{w} >$.
ii) Din proprietăţile PS obţinem imediat proprietăţile normei:
N1) (pozitiva definire) $\|\bar{u}\| \geq 0$; $\|\bar{u}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$,
N2) (pozitiva omogenitate) $\|\lambda\bar{u}\| = |\lambda|\|\bar{u}\|$ pentru orice scalar real λ,
N3) (inegalitatea triunghiului) $\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$ cu egalitate dacă şi numai dacă $\bar{u}$, $\bar{v}$ sunt *coliniari* şi de acelaşi sens i.e. există scalarul $\lambda > 0$ a. î. $\bar{v} = \lambda\bar{u}$.
În disciplina matemarică numită *Analiza funcţională*, utilă în studierea ecuaţiilor Fizicii matematice, există noţiunea de *spaţiu vectorial (real) normat* ca fiind o pereche $(V, \| \cdot \|)$ unde $\| \cdot \|$ satisface exact axiomele $N1 - N3$! $\square$

Două rezultate fundamentale în geometria spaţiilor spaţiilor euclidiene sunt date de:

Teorema 6.3 (Pitagora) *Fie $\bar{u}, \bar{v} \in V \setminus \{\bar{0}\}$. Avem $\bar{u} \perp \bar{v}$ dacă şi numai dacă $\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$ i.e. pătratul funcţiei normă devine aplicaţie aditivă doar când se aplică pe suma a doi vectori ortogonali*!

Inegalitatea CBS (Cauchy-Buniakowski-Schwarz) Pentry $\bar{u}, \bar{v} \in V$ arbitrari avem $| < \bar{u}, \bar{v} > | \leq \|\bar{u}\|\|\bar{v}\|$ cu egalitate dacă şi numai dacă $\bar{u}$, $\bar{v}$ sunt coloniari!

Această inegalitate ne permite definirea de unghiuri:

Definiţia 6.4 Dacă $\bar{u}, \bar{v}$ sunt ambi vectori nenuli atunci definim *unghiul dintre ei* ca fiind $\varphi \in [0, \pi]$ dat de:

$$\cos\varphi := \frac{< \bar{u}, \bar{v} >}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|} \tag{6.1}$$

ceea ce spune că $\bar{u} \perp \bar{v}$ înseamna $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

În continuare, presupunem că V are dimensiunea finită n şi fixăm baza $B = \{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\}$. Pentru vectorii arbitrari $\bar{x}, \bar{y} \in V_n$ avem asociate via B matricile coloană $\bar{x}_B = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, $\bar{y}_B = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$. Cu regula Einstein reamintim că: $\bar{x} = x^i \bar{v}_i$, $\bar{y} = y^j \bar{v}_j$. Prin urmare, folosind biliniaritatea avem relaţia matriceală:

$$< \bar{x}, \bar{y} > = < x^i \bar{v}_i, y^j \bar{v}_j > = x^i \cdot < \bar{v}_i, \bar{v}_j > \cdot y^j = x^i g_{ij} y^j = {}^t\bar{x}_B \cdot G(B) \cdot \bar{y}_B \tag{6.2}$$

unde am notat matricea $G(B) = (g_{ij} = < \bar{v}_i, \bar{v}_j >) \in M_n(\mathbb{R})$ cu $g_{ij} = < \bar{v}_i, \bar{v}_j >$.

Prin urmare, produsul scalar este atât de complicat pe cât de complicată este matricea $G(B)$ ceea ce ne determină să căutăm expresii mai simple, pe modelul problemei diagonalizării. Cum $\bar{v}_i \neq \bar{0}$ fiind vector într-o bază avem $g_{ii} > 0$ dar g_{ij} cu $i \neq j$ poate fi 0. Prin urmare, cea mai simplă matrice G din punct de vedere multiplicativ satisfăcând aceste condiţii este chiar matricea unitate I_n!

Definiţia 6.5 Baza $B_o = \{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\}$ o numim *ortonormată* (relativ la $< \cdot, \cdot >$!) dacă $G(B_o) = I_n$ i.e. $\bar{e}_i$ sunt toţi versori, ortogonali doi câte doi.

Prin urmare, într-o bază ortonormată avem:

$$< \bar{x}, \bar{y} > = {}^t\bar{x}_{B_o} \cdot \bar{y}_{B_o} = x^1 y^1 + ... + x^n y^n, \quad \|\bar{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + ... + (x^n)^2} \tag{6.3}$$

care sunt exact expresia produsului scalar euclidian $< \cdot, \cdot >_e$ şi a normei euclidiene $\|\cdot\|_e$ pe $\mathbb{R}^n$. Deci, dacă o baza oarecare B identifică V_n şi $\mathbb{R}^n$ doar la nivel algebric, o baza ortonormată B_o identifică cele două spaţii $(V_n, < \cdot, \cdot >)$, $(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >_e)$ şi la nivelul geometric adică al produsului scalar şi normei!

Prin urmare suntem interesaţi de obţinerea de baze ortonormate. Există un procedeu pentru această problemă:

Ortonormarea Gram-Schmidt

În spaţiul euclidian $(V_n, < \cdot, \cdot >)$ se dau $2 \leq m \leq n$ vectori $B = \{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_m\}$ având $dimspanB = m = rangB$, deci vectorii din B sunt liniar independenţi, şi se cere o bază ortonormată B_0 în $spanB$.

Pasul 1: Se calculează $\bar{u}_1 = \bar{v}_1$ şi norma $\|u_1\|$.

Pasul $j = 2, ..., m$: Pentru $i = \overline{1, j-1}$ calculăm mai întâi scalarii $\alpha^i_j = \frac{< \bar{v}_j, \bar{u}_i >}{\|\bar{u}_i\|^2}$ apoi vectorul şi scalarul:

$$\bar{u}_j = \bar{v}_j - \alpha^i_j \bar{u}_i, \quad \|\bar{u}_j\|.$$

Liniara independenţă a sistemului B ne asigură faptul că vectorii $\bar{u}_j$ sunt nenuli!

Răspunsul problemei: $B_0 = \{\bar{e}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|}, ..., \bar{e}_m = \frac{\bar{u}_m}{\|\bar{u}_m\|}\}$. Să observăm că baza $B' = \{\bar{e}'_1 = \bar{u}_1, ..., \bar{e}'_m = \bar{u}_m\}$ este doar *ortogonală* dar nu ortonormată!

Cursul 7

Spaţiul vectorilor liberi

Fie E_3 spaţiul euclidian 3-dimensional, construit (spre exemplu) cu axiomatica Hilbert, şi fie punctele $A, B \in E_3$. Celor interesaţi de axiomatica Hilbert le recomandăm pagina personală: https://www.math.uaic.ro/∼mcrasm/depozit/axiom.pdf.

Definiţia 7.1 Perechea ordonată (A, B) o numim *segment orientat* şi o notăm $\overline{AB}$. Dacă $A \neq B$ atunci $\overline{AB}$ îl numim *segment orientat nenul* iar dacă $A = B$ spunem că avem *segmentul orientat nul* $\overline{AA}$. Punctul A îl numim *originea* iar B îl numim *extremitatea* lui $\overline{AB}$. Dacă $A \neq B$ dreapta AB o numim *dreapta suport* a lui $\overline{AB}$; dacă $A = B$ dreapta suport este nedeterminată. Segmentele orientate nenule $\overline{AB}, \overline{CD}$ *au aceeaşi direcţie* dacă dreptele lor suport coincid sau sunt paralele. Deci putem defini *direcţia* segmentului orientat nenul $\overline{AB}$ ca fiind mulţimea tuturor dreptelor paralele cu AB la care adăugăm dreapta AB. Prin convenţie, un segment orientat nul are aceeaşi direcţie cu orice alt segment orientat (nul sau nenul). Segmentele orientate cu aceeaşi dreaptă suport le numim *coliniare* iar cele cu drepte suport paralele le numim *necoliniare*.

Cum relaţia de paralelism a dreptelor este simetrică şi tranzitivă, coincidenţa dreptelor suport implică reflexivitatea relaţiei "a avea aceeaşi direcţie" şi deci avem:

Propoziţia 7.2 *Relaţia "a avea aceeaşi direcţie" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate.*

Definiţia 7.3 Segmentele orientate nenule $\overline{AB}, \overline{CD}$ având aceeaşi direcţie, *au acelaşi sens* dacă:
(i) sunt coliniare şi semidreptele $(AB, (CD$ se intersectează după o semidreaptă,
(ii) sunt necoliniare şi extremităţile B, D sunt în acelaşi semiplan determinat de dreapta AC.
Prin convenţie, un segment orientat nul are acelaşi sens cu orice alt segment orientat (nul sau nenul).

O analiză detaliată a configuraţiilor geometrice implicate conduce la:

Propoziţia 7.4 *Relaţia "a avea acelaşi sens" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate având aceeaşi direcţie.*

Fiind interesaţi în calculul distanţelor introducem:

Definiţia 7.5 Numim *mărimea* (sau *lungimea* sau *modulul*) segmentului orientat $\overline{AB}$ numărul real pozitiv $\|\overline{AB}\| = d_e(A, B)$ unde d_e este distanţa euclidiană pe dreapta AB

(pentru cazul $A \neq B$) măsurată cu o unitate de măsură fixată, respectiv $\|\overline{AA}\| = 0$. Spunem că segmentele orientate $\overline{AB}, \overline{CD}$ *au aceeaşi mărime* dacă $\|\overline{AB}\| = \|\overline{CD}\|$.

Cum relaţia de egalitate a numerelor reale este o relaţie de echivalenţă rezultă că avem:

Propozitia 7.6 *Relaţia "a avea aceeaşi mărime" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate.*

Definiţia 7.7 Segmentele orientate $\overline{AB}, \overline{CD}$ se numesc *echipolente* segmente echipolente şi notăm $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ dacă:
(i) au aceeaşi direcţie,
(ii) au acelaşi sens,
(iii) au aceeaşi mărime.

Corolarul 7.8 *Relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate.*

Definiţia 7.9 O clasă de echivalenţă în raport cu relaţia de echipolenţă o numim *vector liber*. Notăm cu V_3 mulţimea vectorilor liberi.

Deci segmentul orientat $\overline{AB}$ este reprezentant al vectorului liber $\{\overline{CD}; \overline{AB} \sim \overline{CD}\}$ notat $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} \sim \overline{CD}$. Cum un segment orientat nul nu poate fi echipolent, datorită mărimii nule, decât tot cu un segment orientat nul, avem *vectorul nul* $\overline{0} = \{\overline{AA}; A \in E_3\} = \overrightarrow{AA}$. Când nu dorim specificarea unui segment orientat anume (adică a unui reprezentant) pentru un vector liber dat, acesta îl vom nota $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots, \overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$. Alte notaţii:
-dat planul π notăm $V_2(\pi) = V_2 = \{\overrightarrow{AB}; A, B \in \pi\}$. Spunem că $V_2(\pi)$ este *planul vectorial director* al lui π.
-dată dreapta d notăm $V_1(d) = V_1 = \{\overrightarrow{AB}; A, B \in d\}$. Spunem că $V_1(d)$ este *direcţia* lui d iar un element $\overline{u} \in V_1(d) \setminus \{\overline{0}\}$ îl numim *vector director* al lui d.

Dată importanţa relaţiei de echipolenţă în definirea vectorilor liberi, dăm o caracterizarea a acestei relaţii:

Propoziţia 7.10 *Fie $\overline{AB}, \overline{CD}$ nenule.*
(i) *Dacă $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ sunt coliniare atunci $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow$ segmentele $(AD), (CB)$ au acelaşi mijloc.*
(ii) *Dacă $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ sunt necoliniare atunci $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow ABDC$ este paralelogram.*
În consecinţă $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Rightarrow \overline{AC} \sim \overline{BD}$.

Un rezultat foarte important pentru cele ce urmează este:

Propoziţia 7.11 *Fie $\overline{u} \in V_3$ oarecare şi $O \in E_3$ un punct fixat. Atunci există şi este unic $X \in E_3$ a.î. $\overrightarrow{OX} = \overline{u}$.* Spunem că *am aplicat vectorul $\overline{u}$ în punctul O*!

Prin urmare, există o bijecţie $\varphi_O : V_3 \to E_3$, $\overline{u} \to X$. Astfel, putem spune că V_3 şi E_3 sunt în bijecţie, dar această bijecţie este necanonică deoarece depinde de punctul O ales!

Definiţia 7.12 Dat $\overline{u} \in V_3$ numim *direcţia, sensul şi mărimea* lui $\overline{u}$ direcţia, sensul şi mărimea unui reprezentant oarecare al său. Doi vectori cu aceeaşi direcţie îi numim *coliniari*. Mărimea $\|\overline{u}\|$ o mai numim *norma* lui $\overline{u}$. Un vector de normă 1 îl numim *vector unitar* sau *versor*.

Lema 7.13 *Dacă $\overline{AB} \sim \overline{A'B'}$ şi $\overline{BC} \sim \overline{B'C'}$ atunci $\overline{AC} \sim \overline{A'C'}$.*

Demonstraţie Folosind consecinţa din propoziţia 7.10 avem $\overline{AA'} \sim \overline{BB'}$ şi $\overline{BB'} \sim \overline{CC'}$. Din tranzitivitatea relaţiei de echipolenţă avem $\overline{AA'} \sim \overline{CC'}$ adică $\overline{AC} \sim \overline{A'C'}$. □

Fie $\overline{u}, \overline{v} \in V_3$ şi $A \in E_3$ oarecare dar fixat. Aplicând $\overline{u}$ în A obţinem punctul B şi aplicând vectorul $\overline{v}$ în B obţinem punctul C. Din lema precedentă vectorul $\overrightarrow{AC}$ nu depinde de punctul iniţial A. Notăm acest vector cu $\overline{u} + \overline{v}$.

Definiţia 7.14 *Adunarea vectorilor* este aplicaţia $+ : V_3 \times V_3 \to V_3$, $(\overline{u}, \overline{v}) \to \overline{u} + \overline{v}$. Regula descrisă anterior de obţinere a sumei vectorilor o numim *regula triunghiului.*

Teorema 7.15 *Perechea* $(V_3, +)$ *este grup abelian.*

Demonstraţie *Asociativitatea* Fie $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V_3$ şi $A \in E_3$. Fie punctele B, C, D a.î. $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overline{v} = \overrightarrow{BC}$, $\overline{w} = \overrightarrow{CD}$. Avem:

$$\begin{cases} (\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \\ \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}. \end{cases}$$

Comutativitatea Fie $\overline{u}, \overline{v}, A, B, C$ ca mai sus şi punctul D a.î. $\overline{v} = \overrightarrow{AD}$. Din $\overline{AD} \sim \overline{BC}$ avem $\overline{AB} \sim \overline{DC}$ i.e. $\overline{u} = \overrightarrow{DC}$. Rezultă:

$$\begin{cases} \overline{u} + \overline{v} = \overrightarrow{AC} \\ \overline{v} + \overline{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}. \end{cases}$$

Element neutru este vectorul nul iar *inversul* lui $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$ este $-\overline{u} = \overrightarrow{BA}$. □

Observaţii 7.16 a) Din comutativitatea adunării obţinem o a doua regulă de însumare a vectorilor şi anume *regula paralelogramului*: dacă $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$ şi $\overline{v} = \overrightarrow{BC}$ atunci $\overline{u} + \overline{v}$ are ca reprezentant diagonala $\overline{AC}$ a paralelogramului $ABCD$.
b) Suma $\overline{u} + (-\overline{v})$ o notăm $\overline{u} - \overline{v}$ şi se numeşte *diferenţa* vectorilor $\overline{u}$, $\overline{v}$. Dacă $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overline{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ atunci $\overline{u} - \overline{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$ i.e. $\overline{u} - \overline{v}$ are ca reprezentant segmentul orientat ce uneşte extremitatea lui $\overline{v}$ cu extremitatea lui $\overline{u}$ când $\overline{u}$, $\overline{v}$ sunt aplicaţi în acelaşi punct!

Fig. 1 Diferenţa vectorilor

c) Folosind asociativitatea adunării putem defini suma a $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$, vectori $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n$. Fie $A \in E_3$ fixat şi punctele $A_1, \ldots, A_n$ a.î. $\overline{u}_1 = \overrightarrow{AA_1}, \ldots, \overline{u}_n = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$. Atunci $\overline{u}_1 + \ldots + \overline{u}_n = \overrightarrow{AA_n}$. □

Definiţia 7.17 *Înmulţirea cu scalari a vectorilor* este aplicaţia $\cdot_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times V_3 \to V_3$, $(\lambda, \overline{u}) \to \lambda\overline{u}$ unde:
(i) $\lambda\overline{u} = \overline{0}$ dacă $\lambda = 0$ sau $\overline{u} = \overline{0}$,
(ii) $\lambda\overline{u}$ are direcţia lui $\overline{u}$, sensul acelaşi cu $\overline{u}$ dacă $\lambda > 0$ respectiv contrar lui $\overline{u}$ dacă $\lambda < 0$ şi $\|\lambda\overline{u}\| = |\lambda|\|\overline{u}\|$, în celelalte cazuri relativ la λ şi $\overline{u}$.

Se arată imediat următoarele proprietăţi ale înmulţirii cu scalari:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\,\overline{u} = \lambda\overline{u} + \mu\overline{u} \\ \lambda\,(\overline{u} + \overline{v}) = \lambda\overline{u} + \lambda\overline{v} \\ \lambda\,(\mu\overline{u}) = (\lambda\mu)\,\overline{u} \\ 1 \cdot \overline{u} = \overline{u} \end{cases}$$

care se pot considera drept distributivităţi generalizate. Din aceste 4 proprietăţi şi teorema 7.15 rezultă că:

Teorema 7.18 *Tripletul* $(V_3, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ *este un spaţiu vectorial real.*

Din acest motiv numim V_3 *spaţiul vectorilor liberi*. Un calcul imediat arată că $V_1(d), V_2(\pi)$ sunt subspaţii vectoriale în V_3 iar dacă $d \subset \pi$ atunci $V_1(d)$ este subspaţiu vectorial în $V_2(\pi)$. Mai mult, dimensiunea acestor spaţii vectoriale este exact cea dată de indicele inferior: $\dim V_3 = 3$, $\dim V_2(\pi) = 2$ şi $\dim V_1(d) = 1$!

Cursul 8

Spaţiul vectorilor liberi: structura euclidiană

Fie $\overline{u}, \overline{v} \in V_3 \backslash \{\overline{0}\}$ şi punctul $A \in E_3$ fixat. Aplicând $\overline{u}, \overline{v}$ în A obţinem punctele B, C a.î $\overline{u} = \overrightarrow{AB}, \overline{v} = \overrightarrow{AC}$. Fie A' alt punct şi B', C' punctele obţinute în maniera precedentă. Avem că $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$ ca fiind unghiuri cu laturile respectiv paralele. Acest fapt ne permite să introducem:

Definiţia 8.1 i) Numim $\measuredangle BAC$ *unghiul orientat* dintre $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ şi-l notăm $\varphi = \measuredangle(\overline{u}, \overline{v})$. Datorită orientării considerăm $\varphi \in [-\pi, \pi]$.
ii) Vectorii $\overline{u}, \overline{v}$ îi numim *ortogonali* sau *perpendiculari* dacă $\varphi = \pm 1dr = \pm\frac{\pi}{2}$ şi notăm $\overline{u} \perp \overline{v}$. Prin definiţie, vectorul nul este ortogonal pe orice alt vector.

Ortogonalitatea este o relaţie:
(i) *simetrică*: $\overline{u} \perp \overline{v} \Rightarrow \overline{v} \perp \overline{u}$ deoarece $\measuredangle(\overline{v}, \overline{u}) = -\measuredangle(\overline{u}, \overline{v})$ acesta fiind motivul alegerii $\varphi \in [-\pi, \pi]$,
(ii) *biliniară*: $\overline{u} \perp \overline{v}, \overline{u} \perp \overline{w} \Rightarrow \overline{u} \perp (\lambda \overline{v} + \mu \overline{w})$.
Din aceste proprietăţi rezultă imediat:

Propoziţia 8.2 (i) *Dacă $\overline{u} \perp S$= sistem oarecare de vectori, în sensul că $\overline{u}$ este ortogonal pe orice vector din S, atunci $\overline{u} \perp Span(S)$.*
(ii) *Dat $\overline{u} \in V_3$ mulţimea $\overline{u}^{\perp} = \{\overline{v} \in V_3; \overline{v} \perp \overline{u}\}$ este subspaţiu vectorial în V_3.*

Presupunând $S = \{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\}$ şi definind $S^{\perp} = \{\overline{v} \in V_3; \overline{v} \perp \overline{v}_i, 1 \leq i \leq n\}$ avem că $S^{\perp} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{v}_i^{\perp}$ şi cum intersecţia de subspaţii vectoriale este subspaţiu vectorial avem:

Propoziţia 8.3 *$S^{\perp}$ este subspaţiu vectorial în V_3.*

În cele ce urmează, pentru unificarea expunerii, notăm generic V_n unul din spaţiile vectoriale $V_3, V_2(\pi), V_1(d)$. Deci $n \in \{1, 2, 3\}$ deşi, ceea ce urmează în acest Curs se generalizează mot-à-mot la un V_n general i.e. cu $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare. Operaţia fundamentala a calculului analitic n-dimensional, cea care permite măsurarea distanţelor şi a unghiurilor, este:

Definiţia 8.4 Numim *produs scalar* pe V_n aplicaţia $<,>: V_n \times V_n \to \mathbb{R}$:

$$< \overline{u}, \overline{v} >= \|\overline{u}\| \|\overline{v}\| \cos \measuredangle(\overline{u}, \overline{v}). \tag{8.1}$$

Proprietăţi imediate ale produsului scalar:
PS1) *pozitiva definire*: $<\overline{u},\overline{u}>\geq 0, \forall \overline{u}\in V_n; <\overline{u},\overline{u}>=0 \Leftrightarrow \overline{u}=\overline{0}$,
PS2) *simetria*: $<\overline{u},\overline{v}>=<\overline{v},\overline{u}>$, PS3) *biliniaritatea*: $<\lambda\overline{u}+\mu\overline{v},\overline{w}>=\lambda<\overline{u},\overline{w}>+\mu<\overline{v},\overline{w}>$, datorită simetriei avem liniaritatea şi în primul membru,
PS4) *caracterizarea ortogonalităţii*: $\overline{u}\perp\overline{v}\Leftrightarrow<\overline{u},\overline{v}>=0$.

Deci produsul scalar astfel definit este un exemplu al noţiunii generale din Cursul 6 şi deci $(V_n,<\cdot,\cdot>)$ este un spaţiu vectorial euclidian!

Prin urmare, putem utiliza toate formulele introduse anterior:

$$\begin{cases} \|\overline{u}\|=\sqrt{<\overline{u},\overline{u}>} \\ \overline{u},\overline{v}\in V_n\backslash\{\overline{0}\}\Rightarrow \cos\measuredangle(\overline{u},\overline{v})=\frac{<\overline{u},\overline{v}>}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|}. \end{cases} \tag{8.2}$$

Semnificaţia acestor relaţii e aceea că produsul scalar este, în fapt, obiectul primar al geometriei euclidiene, generând următorul "turn" de structuri:

$$\begin{cases} \text{produs scalar (pe } V_n) \overset{(8.2_2)}{\rightarrow} \text{unghiul dintre vectori (pe } V_n) \\ \searrow (8.2_1) \\ \text{norma (pe } V_n) \\ \downarrow \\ \text{distanta euclidiană (pe } E_n). \end{cases} \tag{8.3}$$

Să detaliem ultima săgeată a schemei precedente.

Definiţia 8.5 (i) Numim *reper* pe dreapta d un ansamblu $\mathcal{R}=\{O;\overline{e}_1\}$ cu $O\in d$ şi $B=\{\overline{e}_1\}$ bază în $V_1(d)$ adică $\overline{e}_1\neq\overline{0}$.

Fig. 2 Reper pe dreapta d

(ii) Numim *reper* în planul π un ansamblu $\mathcal{R}=\{O;\overline{e}_1,\overline{e}_2\}$ cu $O\in\pi$ şi $B=\{\overline{e}_1,\overline{e}_2\}$ bază în $V_2(\pi)$ adică $\overline{e}_1,\overline{e}_2$ sunt vectori necoliniari (deci şi nenuli!).

Fig. 3 Reper în planul π

(iii) Numim *reper* în spaţiu un ansamblu $\mathcal{R}=\{O;\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$ cu $O\in E_3$ şi $B=\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$ bază în V_3 adică $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$ sunt necoplanari (deci şi necoliniari, în particulari nenuli!).

Fig. 4 Reper în spaţiu

În toate cazurile O îl numim *originea* reperului iar B *baza* reperului. Fie punctul $M\in E_3$ oarecare dar fixat. Vectorul $\overline{r}_M=\overrightarrow{OM}$ îl numim *vectorul de poziţie al lui* M *în raport cu* $\mathcal{R}$. Descompunând acest vector în baza B avem $\overline{r}_M=x^1\overline{e}_1+x^2\overline{e}_2+x^3\overline{e}_3=x^i\overline{e}_i$; scalarii (x^1,x^2,x^3) unic determinaţi de $\overline{r}_M$ deci de M, se numesc *coordonatele lui* M *în raport cu* $\mathcal{R}$. Prin urmare, reperul $\mathcal{R}$ induce o bijecţie:

$$\mathcal{R}:E_3\rightarrow\mathbb{R}^3, M\rightarrow X_M=X=\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

În planul π avem bijecţia:

$$\mathcal{R}:\pi\rightarrow\mathbb{R}^2, M\rightarrow X_M=X=\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

dacă $M \in \pi$ are vectorul de poziţie $\overline{r}_M = \overrightarrow{OM} = x^1\overline{e}_1 + x^2\overline{e}_2 = x^i\overline{e}_i$ în raport cu reperul $\mathcal{R}$. Analog, pe dreapta d avem bijecţia: $\mathcal{R} : d \to \mathbb{R}, M \to X_M = X = \left(x^1\right)$ dacă M are vectorul de poziţie $\overline{r}_M = \overrightarrow{OM} = x^1\overline{e}_1$ în raport cu reperul $\mathcal{R}$. Pentru simplificarea scrierii vom utiliza notaţiile:
· $M\left(x^1, x^2, x^3\right)$ sau $M\left(x^i\right)$,
· $M\left(x^1, x^2\right)$ sau $M\left(x^i\right)$,
· $M\left(x^1\right)$ sau $M\left(x\right)$.

Fie acum $M, N \in E_3$ (în particular, $M, N \in \pi$ respectiv $M, N \in d$) având vectorul de poziţie $\overline{r}_M, \overline{r}_N$ în raport cu un reper fixat în spaţiu (în particular în π respectiv pe d). Avem:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overline{r}_N - \overline{r}_M \tag{8.4}$$

ceea ce implică:

$$d_e\left(M, N\right) = \|\overrightarrow{MN}\| = \|\overline{r}_M - \overline{r}_N\|. \tag{8.5}$$

Definiţia 8.8 Un reper $\mathcal{R}$ îl numim *ortonormat* dacă baza sa B este ortonormată.

Pentru a deosebi acest caz special de baze de celelalte se foloseste şi o notaţie specială:
· în V_3, $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$,
· în $V_2\left(\pi\right)$, $B = \{\overline{i}, \overline{j}\}$,
· în $V_1(d)$, $B = \{\overline{i}\}$.
Bineînţeles, pentru utilizarea în continuare a convenţiei lui Einstein, vom folosi şi vechea notaţie, ţinând cont ca, după efectuarea calculelor avute în vedere, să rescriem rezultatul final şi în noua notaţie. Formulele fundamentale devin într-un reper ortonormat:

$$\begin{cases} <\overline{u}, \overline{v}>= \delta_{ij}u^iv^j = \sum\limits_{i=1}^{n} u^iv^i = u^1v^1 + \ldots + u^nv^n \\ \|\overline{u}\| = \sqrt{<\overline{u}, \overline{u}>} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(u^i\right)^2} = \sqrt{\left(u^1\right)^2 + \ldots + \left(u^n\right)^2} \\ \overline{u}, \overline{v} \neq \overline{0} \Rightarrow \cos\measuredangle\left(\overline{u}, \overline{v}\right) = \frac{u^1v^1 + \ldots + u^nv^n}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(u^i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(v^i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \overline{u} \perp \overline{v} \Leftrightarrow u^1v^1 + \ldots + u^nv^n = 0 \\ d_e\left(A, B\right) = \sqrt{\left(x_B^1 - x_A^1\right)^2 + \ldots + \left(x_B^n - x_A^n\right)^2} \end{cases} \tag{8.6}$$

dacă avem punctele $A\left(x_A^1, \ldots, x_A^n\right)$, $B\left(x_B^1, \ldots, x_B^n\right)$.

Forma algebrică a inegalităţii CBS este:

$$|\sum_{i=1}^{n} u^iv^i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{2}\left(u^i\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(v^i\right)^2\right). \tag{8.7}$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $|\cos\measuredangle\left(\overline{u}, \overline{v}\right)| = 1$, echivalent vectorii $\overline{u}, \overline{v}$ sunt coliniari, echivalent există λ a.î. $\overline{v} = \lambda\overline{u}$, echivalent avem proporţionalitatea $\frac{v^1}{u^1} = \ldots = \frac{v^n}{u^n}\left(= \lambda\right)$.

Identitatea paralelogramului este specifică normelor euclidiene, adică celor generate de un produs scalar:

Propozitia 8.9 $\forall\overline{u}, \overline{v} \in V_n$ *avem*:

$$\|\overline{u} + \overline{v}\|^2 + \|\overline{u} - \overline{v}\|^2 = 2\left(\|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2\right). \tag{8.8}$$

Demonstraţie Se adună relaţiile:

$$\begin{cases} \|\overline{u}+\overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 + 2 < \overline{u}, \overline{v} > \\ \|\overline{u}-\overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 - 2 < \overline{u}, \overline{v} > . \end{cases}$$

$\square$

Să mai observăm că prima din relaţiile precedente este exact *teorema Pitagora generalizată* sau *teorema cosinusului*:

$$\|\overline{u}+\overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 + 2\|\overline{u}\|\|\overline{v}\| \cos \measuredangle (\overline{u}, \overline{v}) \tag{8.9}$$

sau încă, alegând $\overline{u} = \overrightarrow{BA}$, $\overline{v} = \overrightarrow{AC}$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos\left(\pi - \widehat{A}\right)$$

deoarece $\measuredangle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = \pi - \widehat{A}$. Literal, avem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}. \tag{8.10}$$

Evident, pentru triunghiul dreptunghic în A, i.e. $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$, avem teorema Pitagora ce spune că pătratul ipotenuzei (latura ce se opune unghiului drept $\widehat{A}$) este egală cu suma pătratelor catetelor.

Încheiem acest curs cu:

Aplicaţii economice ale produselor scalare

Să considerăm următorul exemplu. O fabrică de tricotaje produce într-o lună:
$\cdot x^1$ tricouri mărimea S (short),
$\cdot x^2$ tricouri mărimea M (medium),
$\cdot x^3$ tricouri mărimea L (large),
$\cdot x^4$ tricouri mărimea XL (extra-large).

Costul de realizare, în unită ţi monetare (u.m.), pe unitatea de produs este:
$\cdot y^1$ u.m. pentru S,
$\cdot y^2$ u.m. pentru M,
$\cdot y^3$ u.m. pentru L,
$\cdot y^3$ u.m. pentru XL.

Prin urmare, cheltuielile de producţie pe acea lună sunt date de expresia $x^1y^1 + \ldots + x^4y^4$ care este exact produsul scalar din $\mathbb{R}^4$ al vectorilor produse=$(x^1, \ldots, x^4)$ şi costuri=$(y^1, \ldots, y^4)$. Evident că după acest model se pot imagini multe alte exemple de natură economică ce pun în evidenţă noţiunea de produs scalar.

Cursul 9

Produsul vectorial. Produse de câte 3 vectori

Expunerea din Cursul precedent ridică (măcar) două întrebări naturale:
1) Am afirmat că produsul scalar este definit pe orice V_n. Există oare o operaţie specifică dimensiunii 3? Dar 2 respectiv 1?
2) Produsul scalar este o formă biliniară pe V_n i.e. are valori în corpul de scalari; pentru teoria formelor k-liniare pe un spaţiu vectorial trimitem la orice curs (mai general) de Algebră Liniară. Există oare vreo lege de compoziţie internă pe V_n?

Pentru ambele întrebări, operaţia numită "produs vectorial" oferă răspunsuri. Înainte de a defini această aplicaţie mai introducem o proprietate a spaţiului fizic, aflată în legătură cu noţiunea de orientare şi unghi orientat.

Definiţia 9.1 Sistemul S de 3 vectori îl numim *pozitiv orientat* dacă satisface regula burghiului drept: rotind $\overline{v}_1$ spre $\overline{v}_2$ pe drumul cel mai scurt, avem aceeaşi mişcare ca a unui burghiu ce se deplasează în sensul lui $\overline{v}_3$. În caz contrar S este *negativ orientat*.

Putem da şi altă interpretare a pozitivei orientari: dacă $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ sunt aplicaţi în acelaşi punct atunci un observator situat în extremitatea lui $\overline{v}_3$ vede unghiul $\measuredangle(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$ ca fiind orientat trigonometric i.e. antiorar. Deci pentru acel observator $\measuredangle(\overline{v}_1, \overline{v}_2) \in [0, \pi]$.

Definiţia 9.2 Numim *produs vectorial* aplicaţia $\times : V_3 \times V_3 \rightarrow V_3$, $(\overline{u}, \overline{v}) \rightarrow \overline{u} \times \overline{v}$ determinată de:
i) $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{0}$ dacă $\overline{u}, \overline{v}$ sunt coliniari,
ii) în caz contrar vectorul nenul $\overline{u} \times \overline{v}$ are:
PV1) direcţia perpendiculară pe planul vectorial $Span(\overline{u}, \overline{v})$ determinat de $\overline{u}$ şi $\overline{v}$,
PV2) sensul a.î. sistemul $S = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{u} \times \overline{v}\}$ este bază în V_3 orientată pozitiv,
PV3) $\|\overline{u} \times \overline{v}\|$ este aria paralelogramului generat de $\overline{u}$ şi $\overline{v}$.

Proprietăţi imediate ale produsului vectorial:
PV4) *ortogonalitate pe factori*: $< \overline{u} \times \overline{v}, \overline{u} >=< \overline{u} \times \overline{v}, \overline{v} >= 0$, din PV1,
PV5) *antisimetrie*: $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$, din PV2,
PV6) *biliniaritate*: $\overline{u} \times (\lambda \overline{v} + \mu \overline{w}) = \lambda \overline{u} \times \overline{v} + \mu \overline{u} \times \overline{w}$, din PV5 rezultă şi liniaritatea în primul factor.

Produsul vectorial răspunde întrebărilor de la începutul Cursului:
1) o operaţie cu proprietăţile PV4-PV6 este specifică lui $\mathbb{R}^3$ şi $\mathbb{R}^7$!

2) produsul vectorial este lege internă pe V_3 iar biliniaritatea spune că $(V_3, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \times)$ este o algebră reală (antisimetrică) 3-dimensională.

Relativ la norma produsului vectorial reamintim că aria paralelogramului $ABCD$ este $AB \cdot AD \cdot \sin \measuredangle \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ ceea ce conduce la:
PV7) $\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\| \|\overline{v}\| | \sin \measuredangle (\overline{u}, \overline{v}) |$.

Drept consecinţă a lui PV7 şi a identităţii trigonometrice fundamentale $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ avem:
PV8) *Identitatea Lagrange*: $< \overline{u}, \overline{v} >^2 + \|\overline{u} \times \overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2$.

Să remarcăm că dacă $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ sunt versori ortogonali atunci $\|\overline{u} \times \overline{v}\| = 1$ şi din PV4 rezultă că $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{u} \times \overline{v}\}$ este o bază ortonormată! Acest fapt ne determină să fixăm baza ortonormată $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ pe care o considerăm şi pozitiv orientată. Analizând direcţia, sensul şi norma lui $\overline{i} \times \overline{j}$ prin comparaţie cu proprietăţile corespondente ale lui $\overline{k}$ avem că $\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$. Permutarea circulară a vectorilor lui B induce şi egalităţile: $\overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}$ şi $\overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}$ i.e. avem tabelul:

$\times$	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	$\overline{0}$	$\overline{k}$	$-\overline{j}$
$\overline{j}$	$-\overline{k}$	$\overline{0}$	$\overline{i}$
$\overline{k}$	$\overline{j}$	$-\overline{i}$	$\overline{0}$

Fie $\overline{u}$ şi $\overline{v} \in V_3$ oarecare cu $\overline{u} = u^1\overline{i} + u^2\overline{j} + u^3\overline{k} = \left(u^1, u^2, u^3\right)$, $\overline{v} = v^1\overline{i} + v^2\overline{j} + v^3\overline{k} = \left(v^1, v^2, v^3\right)$. Avem atunci, folosind tabelul:

$$\overline{u} \times \overline{v} = \left(u^1\overline{i} + u^2\overline{j} + u^3\overline{k}\right) \times \left(v^1\overline{i} + v^2\overline{j} + v^3\overline{k}\right) =$$

$$= \left(u^2v^3 - u^3v^2\right)\overline{i} + \left(u^3v^1 - u^1v^3\right)\overline{j} + \left(u^1v^2 - u^2v^1\right)\overline{k}$$

adică valoarea determinantului următor, obţinută prin dezvoltare formală după prima linie:

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}. \tag{9.1}$$

Rezultă că: $\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \sqrt{\left(u^2v^3 - v^3u^2\right)^2 + \left(u^3v^1 - u^1v^3\right)^2 + \left(u^1v^2 - u^2v^1\right)^2}$.

În continuare introducem două produse a trei vectori:

Definiţia 9.3 Numim *produs mixt* in V_3 aplicaţia $(\cdot, \cdot, \cdot) : V_3 \times V_3 \times V_3 = (V_3)^3 \to \mathbb{R}$ dată de:

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) =< \overline{u}, \overline{v} \times \overline{w} > . \tag{9.2}$$

Datorită antisimetriei produsului vectorial ordinea în produsul mixt este esenţială!

Din PV1 rezultă imediat:

Propoziţia 9.4 i) $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = 0 \Leftrightarrow$ *vectorii* $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ *sunt coplanari.*
ii) *În consecinţă, sistemul de vectori* $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ *constituie o bază în* V_3 *dacă şi numai dacă* $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \neq 0$.

Semnificaţia geometrică a produsului mixt este următoarea: valoarea sa reprezintă volumul (orientat) paralelipipedului generat de cei 3 vectori aplicaţi în acelaşi punct, având semnul

$+$ respectiv $-$ după cum sistemul $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ este pozitiv sau negativ orientat! O consecinţă importantă a acestui fapt este aceea că, deoarece volumul unui paralelipiped nu depinde de ordinea muchiilor, produsul mixt este invariant la permutări circulare:

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = (\overline{v}, \overline{w}, \overline{u}) = (\overline{w}, \overline{u}, \overline{v}) \tag{9.3}$$

în timp ce permutarea a doar doi dintre vectori schimbă semnul:

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = -(\overline{u}, \overline{w}, \overline{v}). \tag{9.4}$$

Pentru expresia analitică a produsului mixt fie $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ bază ortonormată, pozitiv orientată şi vectorii $\overline{u}, \overline{v}$ ca mai sus, repectiv $\overline{w} = w^1\overline{i} + w^2\overline{j} + w^3\overline{k} = (w^1, w^2, w^3)$. Rezultă:

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = u^1 \left(v^2w^3 - v^3w^2\right) + u^2 \left(v^3w^1 - v^1w^3\right) + u^3 \left(v^1w^2 - v^2w^1\right) \tag{9.5}$$

adică exact valoarea determinantului următor, dezvoltat după prima linie:

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}. \tag{9.6}$$

Acest fapt împreună cu (9.3) şi (9.4) conduce la proprietatea de 3-liniaritate a produsului mixt adică liniaritatea în fiecare din cei 3 factori! Formula (9.6) şi propoziţia 9.4 conduc la:

Propoziţia 9.5 *Sistemul de vectori* $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ *constituie o bază în* V_3 *dacă şi numai dacă*:

$$\begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Observaţia 9.6 Deşi am precizat că într-un V_n oarecare nu mai avem noţiunea de produs vectorial a 2 vectori, există cea de produs vectorial a $(n-1)$ vectori şi în consecinţă, prin extinderea relaţiei (9.2), avem noţiunea de produs mixt a n vectori pentru care se obţine o formulă analoagă lui (9.6). Prin urmare, se extinde şi caracterizarea ultimei propoziţii la $n \geq 3$: $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ este bază în V_n dacă şi numai dacă:

$$\begin{vmatrix} v_1^1 & \ldots & v_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^n & \ldots & v_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

unde liniile sunt date de componentele vectorilor într-o bază iniţial precizată!

Am introdus produsul vectorial ca lege de compoziţie pe V_3 şi apare ca natural studiul perechii $(V_3, \times)$ ca structură algebrică. Datorită lui PV4 această operaţie de produs vectorial nu are element neutru şi atunci mai rămâne de studiat asociativitatea sa ceea ce ne conduce la introducerea următorului produs:

Definiţia 9.7 Numim *dublul produs vectorial* al vectorilor $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$, vectorul $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w})$. Din nou ordinea este esenţială!

Teorema 9.8 *Avem*:

$$\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = <\overline{u}, \overline{w}> \overline{v} - <\overline{u}, \overline{v}> \overline{w}. \tag{9.7}$$

Demonstraţie Din:

$$\begin{cases} \overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) \perp \overline{v} \times \overline{w} \\ Span\,(\overline{v}, \overline{w}) \perp \overline{v} \times \overline{w} \end{cases}$$

rezultă că $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) \in Span\,(\overline{v}, \overline{w})$ i.e. $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = \lambda \overline{v} + \mu \overline{w}$.

Dacă $\overline{v}$ şi $\overline{w}$ sunt coliniari i.e. $\overline{w} = \varepsilon \overline{v}$ atunci ambii membrii ai relaţiei (9.7) sunt zero deci egali. Prin urmare, considerăm $\overline{v}$, $\overline{w}$ necoliniari. Rescalările $\overline{v} \to \alpha \overline{v}, \overline{w} \to \beta \overline{w}$ invariază relaţia (9.7) deci putem considera $\overline{v}$, $\overline{w}$ ca fiind versori. Dacă $\measuredangle\,(\overline{v}, w) = \frac{\pi}{2}$ putem alege $\overline{v} = \overline{j}, \overline{w} = \overline{k}$ şi atunci avem:

$$\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = \overline{u} \times \overline{i} = u^3 \overline{j} - u^2 \overline{k} = u^3 \overline{v} - u^2 \overline{w} = < \overline{u}, \overline{w} > \overline{v} - < \overline{u}, \overline{v} > \overline{w}$$

ceea ce voiam. Pentru cazul general $\measuredangle\,(\overline{v}, \overline{w}) \in (0, \pi] \backslash \{\frac{\pi}{2}\}$ un calcul algebric repetat stabileşte concluzia. $\square$

Avem astfel răspunsul la întrebarea ridicată anterior: produsul vectorial nu este asociativ dar satisface o slăbire a asociativităţii dată de:

Corolarul 9.9 *Are loc identitatea Jacobi*:

$$\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) + \overline{v} \times (\overline{w} \times \overline{u}) + \overline{w} \times (\overline{u} \times \overline{v}) = \overline{0}. \tag{9.8}$$

Demonstraţie Se însumează (9.7) şi permutările sale circulare. $\square$

O algebră reală $(A, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \cdot)$ pentru care înmulţirea satisface:
L1) antisimetria: $x \cdot y = -y \cdot x$,
L2) identitatea Jacobi: $x\,(yz) + y\,(zx) + z\,(xy) = 0$
se numeşte *algebră Lie*. Deci $(V_3, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \times)$ este o algebră Lie 3-dimensională.

Cursul 10

Aplicaţii geometrice şi fizice ale calculului vectorial

A) *Aplicaţii fizice ale calculului vectorial*

Există aplicaţii directe ale calculului vetorial în fizică. Vom enumera în continuare doar câteva cu menţiunea că în fizică vectorii se notează cu o săgetă deasupra şi nu cu o linie cum o facem în matematică.

I) Aplicaţie a produsului scalar

Fie $\overrightarrow{F}$ câmpul vectorial al forţelor ce acţionează asupra unui sistem fizic provocându-i o deplasare descrisă de vectorul $\overrightarrow{s}$. Atunci *lucrul mecanic* (*work*, în engleză) asociat perechii $(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{s})$ este: $W = <\overrightarrow{F}, \overrightarrow{s}>$. Rezultă că există situaţia (netrivială) când lucrul mecanic este nul şi anume $\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{s}$. Este exact cazul mişcării circulare când $\overrightarrow{F}$ este forţa centripetă iar $\overrightarrow{s}$ este tangenta la cercul traiectorie. De asemeni, există cazuri de lucru mecanic negativ când $\measuredangle(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{s}) \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

II) Aplicaţii ale produsului vectorial

1) (în mecanică) Fie forţa $\overrightarrow{F}$ ce produce o mişcare de rotaţie având axa de rotaţie d; spre exemplu rotim cu mâna o roata de bicicletă la care d este axul roţii. Dacă $\overrightarrow{r}$ este vectorul de la punctul de aplicaţie la axa d atunci *momentul* forţei este: $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$.

2) (în electromagnetism) Considerăm o particulă de sarcină q ce se deplasează cu viteza $\overrightarrow{v}$ în câmpul magnetic de inducţie $\overrightarrow{B}$. Atunci forţa ce acţionează asupra particulei se numeşte *forţa Lorentz* după numele lui H. A. Lorentz (1853-1928) şi are expresia: $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$.

B) *Distanţe, arii, volume*

Fie $A, B, C, D \in E_3$ având în raport cu un reper $\mathcal{R}$ ortonormat şi pozitiv orientat, coordonatele $(x_A, y_A, z_A), ..., (x_D, y_D, z_D)$.

I) Distanţa euclidiană dintre A şi B este:

$$d_e(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \tag{10.1}$$

În particular, dacă $A, \in d = Ox$ şi avem $A(x_A, 0, 0)$, $B(x_B, 0, 0)$ atunci:

$$d_e(A, B) = \frac{1}{1!}|x_B - x_A|. \tag{10.2}$$

II) Fie $S(ABC)$ aria Δ-ului ABC şi $ABCD$ paralelogramul cu A' simetricul lui A faţă de mijlocul lui BC (BC este diagonala). Cum $S(ABC) = \frac{1}{2}S(ABA'C)$ avem: $S(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$ i.e.:

$$S(ABC) = \frac{1}{2}\|(\overline{r}_B - \overline{r}_A) \times (\overline{r}_C - \overline{r}_A)\|. \tag{10.3}$$

În particular, dacă $A, B \in \pi = xOy$ şi avem $A(x_A, y_A, 0)$, $B(x_B, y_B, 0)$ atunci:

$$(\overline{r}_B - \overline{r}_A) \times (\overline{r}_C - \overline{r}_A) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}\overline{k}$$

ceea ce dă:

$$S(ABC) = \frac{1}{2!}\left|\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}\right|. \tag{10.4}$$

III) Fie $V(ABCD)$ volumul tetraedrului $ABCD$ şi paralelipipedul $ABA'CC'DB'A''$ obţinut prin dedublarea bazei ABC la paralelogramul $ABA'C$ ca la punctul anterior; deci $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BB'} \parallel \overrightarrow{A'A''} \parallel \overrightarrow{CC'}$. Cum $V(ABCD) = \frac{1}{3}S(ABC) \cdot h_D$ cu h_D înălţimea din D pe baza ABC avem că:
$V(ABCD) = \frac{1}{6}V(ABA'CC'DB'A'') = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$ i.e. $V(ABCD) = \frac{1}{6}|(\overline{r}_B - \overline{r}_A, \overline{r}_C - \overline{r}_A, \overline{r}_D - \overline{r}_A)|$ sau, în final:

$$V(ABCD) = \frac{1}{3!}\left|\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{vmatrix}\right|. \tag{10.5}$$

Putem unifica formulele (10.2), (10.4) şi (10.5):

$$M_n(A_1, ...A_{n+1}) = \frac{1}{n!}\left|\begin{vmatrix} x_1^1 & ... & x_1^n & 1 \\ . & ... & . & . \\ x_{n+1}^1 & ... & x_{n+1}^n & 1 \end{vmatrix}\right| \tag{10.6}$$

cu M_n=măsura n-dimensională a n-simplexului generat de punctele $A_1, ...A_{n+1}$.

Relativ la semnificaţia geometrică a celor trei produse putem concluziona cu tabelul următor:

operaţia	semnificaţia geometrică	măsura
produs scalar	ortogonalitate	lungime=măsură 1D
produs vectorial	coliniaritate	arie=măsură 2D
produs mixt	coplanaritate	volum=măsură 3D

.

C) *Programe C/C++ pentru calculul vectorial*

I) Programul C/C++ pentru produsul scalar a doi vectori n-dimensionali. Pentru doi vectori neortogonali se cere unghiul dintre vectori.

```
//produsul scalar a doi vectori n-dimensionali
#include<iostream.h>
#include<math.h>
```

```
void main ()
{
  long x[50], y[50];
  int i=1, n;
  float PS=0, N1=0, N2=0;
  cout<< ”Daţi dimensiunea vectorilor n:=”;
  cin>>n;
  while (i<=n)
    {
    cout<< ”Daţi componenta a ”<<i<<”-a a primului vector: ”;
    cout<<”x[”<<i<<”]:= ”<<endl;
    cin>>x[i];
    i+=1;
    }
  i=1;
  while (i<=n)
    {
    cout<< ”Daţi componenta a ”<<i<<”-a a celui de al doilea vector: ”;
    cout<<”y[”<<i<<”]:= ”<<endl;
    cin>>y[i];
    i+=1;
    }
  for (i=1;i<=n;i++)
    {
    PS+=x[i]*y[i];
    N1+=x[i]*x[i];
    N2+=y[i]*y[i];
    }
  cout<< ”Produsul scalar este PS:= ” <<PS<<endl;
  if ((PS==0)&&((sqrt)(N1)==1)&&((sqrt)(N2)==1))
    cout<< ”Vectorii daţi sunt ortonormaţi. ” <<endl;
  else
    cout<< ”Vectorii daţi nu sunt ortonormaţi. ” <<endl;
    cout<< ”Norma primului vector este:= ” <<(sqrt)(N1)<<endl;
    cout<< ”Norma celui de al doilea vector este:= ” <<(sqrt)(N2)<<endl;
    cout<< ”Cosinusul unghiului dintre vectori este:= ”
<<(PS)/((sqrt(N1))*(sqrt)(N2))<<endl;
}
```

Exemplu:

Daţi dimensiunea vectorilor n:= 2 <Enter>
Daţi componenta a 1-a a primului vector: x[1]:= 1 <Enter>
Daţi componenta a 2-a a primului vector: x[2]:= 0 <Enter>
Daţi componenta a 1-a a celui de al doilea vector: y[1]:= 0 <Enter>
Daţi componenta a 2-a a celui de al doilea vector: y[2]:= 1 <Enter>
Produsul scalar PS:= 0
Vectorii daţi sunt ortonormaţi

Norma primului vector este:= 1
Norma celui de al doilea vector este:= 1
Cosinusul unghiului dintre vectori este:= 0

II) Programul C/C++ pentru produsul vectorial a doi vectori şi produsul mixt a trei vectori.

```
//produsul vectorial a doi vectori (aria paralelogram, coliniaritate)
//produsul mixt a trei vectori (volumul paralelipiped, orientare bază, coplanaritate)
#include<iostream.h>
#include<math.h>
void main ()
{
  float a[3], b[3], c[3], PV[3], A, PM;
  int i;
  cout<< "Daţi componentele primului vector: " <<endl;
  for (i=1;i<=3;i++)
    {
    cout<< "a["<<i<<"]:= ";
    cin>>a[i];
    }
  cout<< "Daţi componentele celui de-al doilea vector: " <<endl;
  for (i=1;i<=3;i++)
    {
    cout<< "b["<<i<<"]:= ";
    cin>>b[i];
    }
  PV[1]=a[2]*b[3]-a[3]*b[2];
  PV[2]=a[3]*b[1]-a[1]*b[3];
  PV[3]=a[1]*b[2]-a[2]*b[1];
  A=(sqrt)(PV[1]*PV[1]+PV[2]*PV[2]+PV[3]*PV[3]);
  if(A==0)
    cout<< "Vectorii sunt coliniari. "<<endl;
  else
    {
    cout<< "Produsul vectorial are componentele: "
<<PV[1]<<" "<<PV[2]<<" "<<PV[3]<<endl;
    cout<< "Paralelogramul generat de cei doi vectori are aria:= "
<<A<<endl;
    }
  cout<< "Daţi componentele celui de al treilea vector: "<<endl;
  for (i=1;i<=3;i++)
    {
    cout<<"c["<<i<<"]:= ";
    cin>>c[i];
    }
  PM=c[1]*PV[1]+c[2]*PV[2]+c[3]*PV[3];
  if(PM==0)
```

```
        cout<<”Vectorii sunt coplanari. ”<<endl;
    else
        {
        cout<< ”Produsul mixt este:= ”<<PM<<” şi volumul paralelipipedului generat de cei 3 vectori este:= ”<<(abs)(PM)<<endl;
        if (PM>0)
            cout<<”Cei 3 vectori constituie o bază în spaţiu, orientată pozitiv. ”<<endl;
        else
            cout<<”Cei 3 vectori constituie o bază în spaţiu, orientată negativ. ”<<endl;
        }
}
```

Exemplu:

Daţi componentele primului vector:
a[1]:= 1 <Enter>
a[2]:= 0 <Enter>
a[3]:=0 <Enter>
Daţi componentele celui de al doilea vector:
b[1]:= 0 <Enter>
b[2]:= 1 <Enter>
b[3]:= 0 <Enter>
Produsul vectorial are componentele: 0 0 1
Paralelogramul generat de cei doi vectori are aria:= 1
Daţi componentele celui de al treilea vector:
c[1]:= 1 <Enter>
c[2]:= 1 <Enter>
c[3]:= 1 <Enter>
Produsul mixt este:= 1 şi volumul paralelipipedului generat este:= 1
Cei 3 vectori constituie o bază în spaţiu, orientată pozitiv.

D) *Funcţii MATLAB pentru calculul vectorial*

Un vector linie $\overline{u} = (x, y, z)$ se introduce folosind comanda:

$$<< u = [x\ y\ z];$$

Dacă nu punem ”;” atunci după apăsarea tastei *Enter* va apare:

$$u =$$
$$x \quad y \quad z$$

adică avem output-urile ”$u =$” şi ”$x\ y\ z$” pe linii diferite, separate de o linie albă (blank line).

Vectorul coloana $\overline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ se introduce astfel:

$$<< v = [a; b; c]$$

cu rezultatul:

$$v =$$
$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

Prin urmare, o matrice se introduce separând liniile cu ";". Spre exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -7 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

se scrie:

$$<< A = [-3\ 0\ \ -1;\ 2\ 5\ \ -7;\ -1\ 4\ 8]$$

cu rezultatul:

$$A =$$
$$\begin{matrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -7 \\ -1 & 4 & 8 \end{matrix}$$

Produsul scalar se calculează cu funcţia "$dot\,(u, v)$" iar cel vectorial cu funcţia "$cross\,(u, v)$" scriind ambii vectori daţi sau în linie sau coloană:

$<< u = [-1\ 0\ 1]; v = [3\ 4\ 5]$

$<< dot(u, v)$

$ans =$

2

$<< cross(u, v)$

$ans =$

$-4\ 8\ -4$

MATLAB a creat automat o variabilă cu numele "ans" (de la answer=răspuns). Dacă dorim stocarea valorilor obţinute putem aloca variabila "ps" pentru produs scalar respectiv "pv" pentru produs vectorial.

Norma se calculează cu funcţia "$norm(x)$":

$<< u = [3\ 0\ \ -4]$

$<< norm(u)$

$ans =$

5

Pentru produsul mixt, cum acesta este un determinant se foloseşte funcţia "$det(A)$". Spre exemplu, după introducerea matricii A de mai sus se obţine rezultatul:

$ans =$

-217

Cursul 11

Planul. Moduri de determinare şi ecuaţii

Un plan π este determinat de:
I) un punct M_0 al său şi doi vectori necoliniari $\overline{u}$, $\overline{v} \in V_2(\pi)$. În acest caz, planul dat îl mai notăm $\pi(M_0, Span\{\overline{u}, \overline{v}\})$,
II) un punct M_0 al său şi normala $\overline{N} \in V_2(\pi)^{\perp}$. Notăm un astfel de plan $\pi(M_0, \overline{N})$.

Fixăm în spaţiu un reper ortonormat şi pozitiv orientat în raport cu care considerăm vectorii de poziţie ai punctelor ce vor interveni. Fie deci $M_0(\overline{r}_0)$ şi $M(\overline{r}) \in \pi$ oarecare.

I) Vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ are expresia $\overline{r} - \overline{r}_0$ şi aparţine lui $V_2(\pi)$. Cum vectorii $\overline{u}, \overline{v}$ sunt necoliniari, ei constituie o bază în $V_2(\pi)$ în raport cu care vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ se descompune (în mod unic!). Deci există scalarii $\lambda\mu$ unic determinaţi de punctul M a.î. $\overline{r} - \overline{r}_0 = \lambda\overline{u} + \mu\overline{v}$ de unde rezultă *ecuaţia vectorial-parametrică* a planului:

$$\pi(M_0 Span\{\overline{u}, \overline{v}\}) : \quad \overline{r} = \overline{r}_0 + \lambda\overline{u} + \mu\overline{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{11.1}$$

Dacă avem $M_0(x_{0,0}, z_0), M(x, y, z)$ respectiv $\overline{u} = (u_x, u_y, u_z), \overline{v} = (v_x, v_y, v_z)$ obţinem *ecuaţiile parametrice ale planului*:

$$\pi(M_0, Span\{\overline{u}, \overline{v}\}) : \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = y_0 + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = z_0 + \lambda u_z + \mu v_z \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{11.2}$$

Uneori avem nevoie de o ecuaţie a planului care să nu facă apel la un element extrinsec cum ar fi parametrii λ, μ. Pentru a obţine o astfel de ecuaţie să reamintim caracterizarea coliniritãţii a trei vectori prin anularea produsului mixt. Avem astfel: $\left(\overrightarrow{M_0M}, \overline{u}, \overline{v}\right) = 0$ care generează *ecuaţia vectorial-canonică* a planului:

$$\pi(M_0, Span\{\overline{u}, \overline{v}\}) : (\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{u}, \overline{v}) = 0 \tag{11.3}$$

sau încă *ecuaţia cartezian-canonică* a planului:

$$\pi(M_0, Span\{\overline{u}, \overline{v}\}) : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0. \tag{11.4}$$

Exemple:

I.1) **Planul prin trei puncte necoliniare**

Fie π determinat de punctele necoliniare $A(\overline{r}_A), B(\overline{r}_B), C(\overline{r}_C)$. Alegem $M_0 = A$ şi $\overline{u} = \overrightarrow{AB} = \overline{r}_B - \overline{r}_A, \overline{v} = \overrightarrow{AC} = \overline{r}_C - \overline{r}_A$ de unde rezultă:

$$\pi(ABC): \quad \overline{r} = \overline{r}_A + \lambda(\overline{r}_B - \overline{r}_A) + \mu(\overline{r}_C - \overline{r}_A), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{11.5}$$

$$\pi(ABC): \begin{cases} x = x_A + \lambda(x_B - x_A) + \mu(x_C - x_A) \\ y = y_A + \lambda(y_B - y_A) + \mu(y_C - y_A) \\ z = z_A + \lambda(z_B - z_A) + \mu(z_C - z_A) \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{11.6}$$

$$\pi(ABC): (\overline{r} - \overline{r}_A, \overline{r}_B - \overline{r}_A, \overline{r}_C - \overline{r}_A) = 0 \tag{11.7}$$

$$\pi(ABC): \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0. \tag{11.8}$$

Ultima relaţie se poate scrie şi:

$$\pi(ABC): \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{11.9}$$

În particular, pentru $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$ obţinem, prin dezvoltarea determinantului corespunzător, *ecuaţia planului prin tăieturi*:

$$\pi(ABC): \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0. \tag{11.10}$$

I.2) **Planul determinat de o dreapta şi un punct neincident acesteia**

Fie dreapta d ce trece prin punctul $A(\overline{r}_A)$ şi are vectorul director $\overline{u} \in V_1(d) \setminus \{\overline{0}\}$. Fie şi punctul $B(\overline{r}_B) \notin d$. Atunci perechea (d, B) determină un plan $\pi = \pi(d, B)$. Deoarece $B \notin d$ avem că vectorul $\overrightarrow{AB}(= \overline{r}_B - \overline{r}_A)$ este necoliniar cu $\overline{u}$ deci poate fi considerat drept $\overline{v}$. Avem deci:

$$\pi(d, B): \quad \overline{r} = \overline{r}_A + \lambda \overline{u} + \mu(\overline{r}_B - \overline{r}_A), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{11.11}$$

$$\pi(d, B): \begin{cases} x = x_A + \lambda u_x + \mu(x_B - x_A) \\ y = y_A + \lambda u_y + \mu(y_B - y_A) \\ z = z_A + \lambda u_z + \mu(z_B - z_A) \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{11.12}$$

$$\pi(d, B): \quad (\overline{r} - \overline{r}_A, \overline{u}, \overline{r}_B - \overline{r}_A) = 0 \tag{11.13}$$

$$\pi(d, B): \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_x & u_y & u_z \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \end{vmatrix} = 0. \tag{11.14}$$

II) Vectorul $\overline{N}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{M_0 M} = \overline{r} - \overline{r}_0$ şi deci avem ecuaţia:

$$\pi(M_0, \overline{N}): \quad < \overline{r} - \overline{r}_0, \overline{N} >= 0, \tag{11.15}$$

sau încă, notând $D = - < \overline{r}_0, \overline{N} >$:

$$\pi(M_0, \overline{N}): \quad < \overline{r}, \overline{N} > + D = 0. \tag{11.16}$$

Presupunem că $\overline{N} = (A, B, C)$ şi ultima relaţie conduce la *ecuaţia generală* a planului:

$$\pi(M_0, \overline{N}): \quad Ax + By + Cz + D = 0. \tag{11.17}$$

Fie funcţia $F_\pi : E_3(= \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, $F_\pi(M) = F_\pi(\overline{r}) := Ax + By + Cz + D$; deci π este *suprafaţa de nivel* $F^{-1}(0)$. Avem semispaţiile determinate de π:

$$\begin{cases} S_\pi^+ = \{M \in E_3 : F_\pi(M) > 0\} \\ S_\pi^- = \{M \in E_3 : F_\pi(M) < 0\} \end{cases}.$$

Exemple:

II.1) Planele de coordonate

$$\begin{cases} (xOy): \quad z = 0 \\ (yOz): \quad x = 0 \\ (zOx): \quad y = 0 \end{cases}. \tag{11.18}$$

II.2) Plane paralele cu planele de coordonate

$$\begin{cases} \pi \parallel (xOy): \quad z = c \\ \pi \parallel (yOz): \quad x = a \qquad a, b, c \in \mathbb{R}. \\ \pi \parallel (zOx): \quad y = b \end{cases} \tag{11.19}$$

II.3) Plane perpendiculare pe planele de coordonate

$$\begin{cases} \pi \perp (xOy): Ax + By + D = 0 \\ \pi \perp (yOz): By + Cz + D = 0 \\ \pi \perp (zOx): Ax + Cz + D = 0 \end{cases}. \tag{11.20}$$

II.4) Plane ce conţin axele de coordonate

$$\begin{cases} \pi \ni Oz: Ax + By = 0 \\ \pi \ni Ox: By + Cz = 0 \\ \pi \ni Oy: Ax + Cz = 0 \end{cases}. \tag{11.21}$$

II.5) Planul oarecare prin origine

$$\pi \ni O: \quad Ax + By + Cz = 0. \tag{11.22}$$

II.6) Planul printr-un punct dat şi perpendicular pe o dreaptă dată

Fie $M_0(\overline{r}_0)$ şi dreapta d cu vectorul director $\overline{u} \in V_1(d) \setminus \{\overline{0}\}$. Atunci există un unic plan $\pi = \pi(M_0, \perp d)$ incident lui M_0 şi perpendicular pe d şi avem:

$$\pi(M_0, \perp d) : < \overline{r} - \overline{r}_0, \overline{u} > = 0.$$

***

Trecerea de la modul **I** la modul **II** se face imediat considerând: $\overline{N} = \overline{u} \times \overline{v}$ ceea ce revine la dezvoltarea după prima linie a determinantului (11.4). În aplicaţii se preferă (deseori) ecuaţia generală a planului!

***

III) **Poziţiile relative a două plane**

Fie planele $\pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, 1 \leq i \leq 2$. Atunci:

III1) planele coincid dacă şi numai dacă $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}$. În adevăr, coincidenţa normalelor este echivalentă cu primele două egalităţi şi punctul M_0 comun implică ultima egalitate.

III2) planele sunt paralele şi distincte dacă şi numai dacă $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1}$. Argumentul este cel precedent fără ultima parte.

III3) planele se intersectează (fă ră a coincide) dacă şi numai dacă rangul matricii $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ este 2.

Unghiul $\varphi = \varphi(\pi_1, \pi_2)$ dintre cele două plane este unghiul dintre normalele lor. Deci:

$$\cos\varphi(\pi_1, \pi_2) = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\left(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2\right)^{1/2}\left(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2\right)^{1/2}}.$$

În particular, planele sunt perpendiculare dacă şi numai dacă: $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

Cursul 12

Dreapta. Moduri de determinare şi ecuaţii

A) Dreapta în spaţiu

Fixăm dreapta d în spaţiul E_3 şi reperul ortonormat şi pozitiv orientat în raport cu care vom precixa coordonatele punctelor utilizate. Există două moduri de determinare a lui d:
I) ca intersecţie a două plane π_1 şi π_2, în acest caz notând $d\,(\pi_1, \pi_2)$,
II) ca dreapta ce trece prin punctul $M_0(\overline{r}_0) \in E_3$ şi are vectorul director (direcţia) $\overline{u} \in V_1(d)\backslash\{\overline{0}\}$ dat, în acest caz notând $d\,(M_0, \overline{u})$.

I) Fie planele $\pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, 1 \leq i \leq 2$ cu rang $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$ ceea ce înseamnă geometric necoliniaritatea normalelor $\overline{N}_i = (A_i, B_i, C_i)$ la planele π_i şi care se verifică computaţional prin $\overline{N}_1 \times \overline{N}_2 \neq \overline{0}$. Atunci planele date se intersectează după o dreaptă d de ecuaţie:

$$d\,(\pi_1, \pi_2) : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} . \tag{12.1}$$

Ecuaţiile (12.1) se numesc *ecuaţiile generale* ale dreptei.

Exemple:

I.1) Dreapta ce trece printr-un punct şi este perpendiculară pe un plan dat (cazul 1)

Presupunem că $M_0(\overline{r}_0) \in d$ şi $d \perp \pi$ cu π determinat de un punct dat şi vectorii necoliniari $\overline{N}_1, \overline{N}_2$. Fie π_i planul ce conţine M_0 şi are normala $\overline{N}_i$; deci $d \in \pi_i$. În concluzie $d = \pi_1 \bigcap \pi_2$ şi deci:

$$d : \begin{cases} < \overline{r} - \overline{r}_0, \overline{N}_1 >= 0 \\ < \overline{r} - \overline{r}_0, \overline{N}_2 >= 0 \end{cases} . \tag{12.2}$$

I.2) Axele de coordonate

$$Ox : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} , \qquad Oy : \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases} , \qquad Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} . \tag{12.3}$$

II) Fie $M(\overline{r}) \in d$ oarecare. Vectorii $\overrightarrow{M_0 M} = \overline{r} - \overline{r}_0$ şi $\overline{u}$ sunt coliniari fiind ambii vectori directori pentru d şi dimensiunea lui $V_1\,(d)$ fiind 1. Rezultă că există scalarul λ, unic determinat de M, a.î. $\overline{r}-\overline{r}_0=\lambda\overline{u}$ ceea ce dă *ecuaţia vectorială* a dreptei:

$$d\left(M_0,\overline{u}\right):\overline{r}=\overline{r}\left(\lambda\right):=\overline{r}_0+\lambda\overline{u},\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Putem oferi o imagine cinematică pentru această ecuaţie: avem un punct material ce pleacă din punctul M_0 şi descrie o traiectorie rectilinie cu vectorul viteză $\overline{u}$. Cum, de regulă, parametrul unei mişcări este timpul vom renota în cele ce urmeză cu t parametrul ce descrie dreapta adică avem ecuaţia vectorială:

$$d\left(M_0,\overline{u}\right):\overline{r}=\overline{r}\left(t\right):=\overline{r}_0+t\overline{u},\quad t\in\mathbb{R}. \tag{12.4}$$

Dacă avem $\overline{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\overline{r}=(x,y,z)$, $\overline{u}=(l,m,n)$ atunci obţinem *ecuaţiile parametrice* ale dreptei:

$$d\left(M_0,\overline{u}\right):\begin{cases} x=x\left(t\right)=x_0+tl\\ y=y\left(t\right)=y_0+tm\\ z=z\left(t\right)=z_0+tn\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}. \tag{12.5}$$

Prin eliminarea parametrului t obţinem *ecuaţiile canonice* ale dreptei:

$$d\left(M_0,\overline{u}\right):\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\left(=t\right). \tag{12.6}$$

Peste tot în ceea ce urmează folosim convenţia standard că anularea numitorului atrage anularea numărătorului!

Exemple:

II.1) Dreapta prin două puncte distincte

Fie punctele distincte (!) $A\left(\overline{r}_A\right),B\left(\overline{r}_B\right)$ şi dreapta $d=d(AB)$ unic determinată de aceste puncte. Avem direcţia $\overline{u}=\overrightarrow{AB}=\overline{r}_B-\overline{r}_a$ şi deoarece punctele sunt distincte acest vector este nenul. Avem deci:

$$d\left(AB\right):\overline{r}=\overline{r}\left(t\right)=\overline{r}_A+t\left(\overline{r}_B-\overline{r}_A\right),\quad t\in\mathbb{R} \tag{12.7}$$

$$d\left(AB\right):\begin{cases} x=x\left(t\right)=x_A+t\left(x_B-x_A\right)\\ y=y\left(t\right)=y_A+t\left(y_B-y_A\right)\\ z=z\left(t\right)=z_A+t\left(z_B-z_A\right)\end{cases},\quad t\in\mathbb{R} \tag{12.8}$$

$$d\left(AB\right):\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}. \tag{12.9}$$

II.2) Dreapta ce trece printr-un punct şi este perpendiculară pe un plan dat (cazul 2)

Presupunem planul π determinat de normala $\overline{N}$ şi fie dreapta $d=d\left(M_0,\perp\pi\right)$ ce trece prin M_0 şi este perpendiculară pe π. Prin urmare d are vectorul director $\overline{N}$. Rezultă că avem:

$$d\left(M_0,\perp\pi\right):\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}. \tag{12.10}$$

Trecerea I)→II)

Cum $d=\pi_1\cap\pi_2$ rezultă că $\overline{N}_i\perp d$ ceea ce înseamnă că $\overline{u}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2$ ceea ce dă:

$$\overline{u}=\left(B_1C_2-B_2C_1,C_1A_2-C_2A_1,A_1B_2-A_2B_1\right). \tag{12.11}$$

Pentru a găsi un punct al lui π cum avem două ecuaţii şi trei necunoscute (x,y,z) conform teoriei de la clasa a XI-a avem o necunoscută secundară $(3-2=1)$. Prin urmare fixăm una din necunoscute, e.g. $z_0 = 0$ (sau x_0 respectiv y_0; mai precis variabila corespunzătoare unui minor nenul de ordinul doi din matricea $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ care are rangul 2 conform ipotezelor de lucru in cazul **I**) şi rezolvând sistemul (12.1) avem punctul $M_0\,(x_0, y_0, z_0) \in d$. Obţinem în concluzie:

$$d = \pi_1 \cap \pi_2 : \frac{x - x_0}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y - y_0}{C_1A_2 - C_2A_1} = \frac{z - z_0}{A_1B_2 - A_2B_1}. \tag{12.12}$$

Exemplu: Axele de coordonate

$$Ox : \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}, \quad Oy : \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}, \quad Oz : \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$$

Trecerea II)→I)

Din ecuaţiile canonice (12.6) rezultă:

$$d : \begin{cases} m(x - x_0) - l\,(y - y_0) = 0 \\ n(x - x_0) - l\,(z - z_0) = 0 \end{cases}. \tag{12.13}$$

III) Poziţiile relative a două drepte din spaţiu

Fie dreptele $d_i : \frac{x-x_i}{l_i} = \frac{y-y_i}{m_i} = \frac{z-z_i}{n_i}, 1 \leq i \leq 2$. Avem deci punctele $M_i\,(\overline{r_i} = (x_i, y_i, z_i)) \in d_i$ şi dreapta d_i are vectorul director (nenul) $\overline{u}_i = (l_i, m_i, n_i)$. Dreptele date sunt coplanare dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{M_1M_2} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$, $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ sunt coplanari ceea ce înseamnă anularea produsului mixt $(\overline{r}_2 - \overline{r}_1, \overline{u}_1, \overline{u}_2)$. Avem deci:

III.1) dreptele sunt necoplanare (spunem că sunt *în poziţie generală*) dacă şi numai dacă $(\overline{r}_2 - \overline{r}_1, \overline{u}_1, \overline{u}_2) \neq 0$ i.e.:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{12.14}$$

III.2) dreptele sunt coplanare dacă determinantul precedent este nul. Avem subcazurile:

III.2a) dacă $\overline{u}_1 \times \overline{u}_2 \neq \overline{0}$ i.e. vectorii directori sunt necoliniari atunci dreptele sunt concurente iar planul care le conţine este planul determinat de punctul $M_1\,(\overline{r}_1)$ şi vectorii necoliniari $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$:

$$\pi(\ni d_1, d_2) :< \overline{r} - \overline{r}_1, \overline{u}_1 \times \overline{u}_2 >= 0. \tag{12.15}$$

III.2b) dacă $\overline{u}_1 \times \overline{u}_2 = \overline{0}$ atunci aceşti vectori sunt coliniari. Avem:

III.2b') dacă $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overline{u}_1 (= (\overline{r}_2 - \overline{r}_1) \times \overline{u}_1) = \overline{0}$ atunci avem şi $\overrightarrow{M_1M_2}$ coliniar cu $\overline{u}_1$ şi $\overline{u}_2$ ceea ce implică faptul că dreptele coincid: $d_1 = d_2$.

III.2b") dacă $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overline{u}_1 \neq \overline{0}$ atunci avem drepte paralele distincte: $d_1 \parallel d_2$.

Unghiul $\varphi = \varphi\,(d_1, d_2)$ dintre două drepte este unghiul dintre vectorii directori şi deci:

$$\cos\varphi\,(d_1, d_2) = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\left(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2\right)^{1/2}\left(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2\right)^{1/2}}. \tag{12.16}$$

În particular, două drepte sunt perpendiculare ($d_1 \perp d_2$) dacă: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

B) Dreapta in plan

Drept caz particular al modului de determinare **II**) de la dreapta în spaţiu, considerăm în planul fixat π o dreaptă dată printr-un punct al său $M_0(\overline{r}_0)$ şi având vectorul director $\overline{u} \in V_1(d) \setminus \{\overline{0}\}$ unde vectorii de poziţie ai punctelor implicate sunt date în raport cu un reper ortonormat fixat al planului π. Obţinem *ecuaţia vectorială* a dreptei în plan:

$$d(M_0, \overline{u}) : \overline{r} = \overline{r}(t) = \overline{r}_0 + t\overline{u}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12.17}$$

Dacă $\overline{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\overline{r} = (x, y)$ şi $\overline{u} = (l, m)$ atunci avem *ecuaţiile parametrice* ale dreptei în plan:

$$d(M_0, \overline{u}) : \begin{cases} x = x(t) = x_0 + tl \\ y = y(t) = y_0 + tm \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12.18}$$

Prin eliminarea parametrului t obţinem *ecuaţia canonică* a dreptei în plan:

$$d(M_0, \overline{u}) : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} (= t). \tag{12.19}$$

Observaţie Dacă $l = 0$ atunci obţinem ecuaţia dreptelor paralele cu Oy:

$$d \parallel Oy : x = x_0. \tag{12.20}$$

Dacă $l \neq 0$ atunci renotând cu m fracţia $\frac{m}{l}$ avem din (12.19):

$$d : y = m(x - x_0) + y_0$$

sau încă, notând $n = -mx_0 + y_0$:

$$d : y = mx + n. \tag{12.21}$$

Pentru a găsi o interpretare geometrică a acestei ecuaţii fie θ unghiul orientat dintre versorul $\overline{i}$ şi vectorul director $\overline{u}$. Avem $\cos\theta = \frac{<\overline{i}, \overline{u}>}{\|\overline{u}\|} = \frac{l}{\|\overline{u}\|}$ şi $\sin\theta = \frac{\|\overline{i} \times \overline{u}\|}{\|\overline{u}\|} = \frac{1}{\|\overline{u}\|} \left\| \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ l & m & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{\|(0,0,m)\|}{\|\overline{u}\|} = \frac{m}{\|\overline{u}\|}$. Rezultă că $tg\theta = \frac{m}{l}$ este exact coeficientul m din ecuaţia (12.21). Celălalt coeficent din această ecuaţie este ordonata punctului de intersecţie al lui d cu axa Oy.

Putem da şi o altă continuare ecuaţiei (12.19): notăm $a = m, b = -l, c = -mx_0 + ly_0$ şi atunci avem:

$$d(M_0, \overline{u}) : ax + by + c = 0. \tag{12.22}$$

Pe această ecuaţie coeficienţii lui x, y sunt exact componentele *normalei la* d, $\overline{u}^{\perp} = (a, b) = (m, -l)$.

Cursul 13

Configuraţii remarcabile de puncte, drepte şi plane

I) Proiecţii şi simetrii. Distanţe

I.1) Proiecţia şi simetricul unui punct faţă de un plan

Fie punctul $M(\overline{r}_M)$ şi planul $\pi = \pi\left(M_0, \overline{N}\right)$ de ecuaţie:

$$\pi : F_\pi(\overline{r}) =< \overline{r} - \overline{r}_0, \overline{N} >= 0. \tag{13.1}$$

Considerăm dreapta $d = d(M, \perp\pi)$ ce trece prin M şi este perpendiculară pe π. Atunci d intersectează π şi punctul unic de intersecţie $M'(\overline{r}_{M'})$ al lui d cu π se numeşte *proiecţia lui* M *pe planul* π. Punctul $M''(\overline{r}_{M''})$ pentru care M' este mijlocul segmentului $[MM'']$ se numeşte *simetricul lui* M *faţă de planul* π. Ne propunem să determinăm $\overline{r}_{M'}$ şi $\overline{r}_{M''}$ în funcţie de datele problemei: $\overline{r}_M$ şi F_π!

Ecuaţia parametrică a lui d este:

$$d(M, \perp\pi) : \overline{r} = \overline{r}_M + t\overline{N} \tag{13.2}$$

şi deci avem intersecţia $(13.1) \cap (13.2)$

$$M' = d \cap \pi :< \overline{r}_M + t\overline{N} - \overline{r}_0, \overline{N} >= 0$$

de unde obţinem parametrul $t = t_{M'}$ corespunzator lui M' pe dreapta d:

$$t_{M'} = -\frac{< \overline{r}_M - \overline{r}_0, \overline{N} >}{\|\overline{N}\|^2} = -\frac{F_\pi(\overline{r}_M)}{\|\overline{N}\|^2}$$

care înlocuit în (13.2) dă primul răspuns al problemei puse:

$$M' : \overline{r}_{M'} = \overline{r}_M - \frac{F_\pi(\overline{r}_M)}{\|\overline{N}\|^2}\overline{N}. \tag{13.3}$$

Condiţia ca M' să fie mijlocul lui $[MM'']$ se scrie vectorial $\overline{r}_M + \overline{r}_{M''} = 2\overline{r}_{M'}$ de unde rezultă $\overline{r}_{M''} = 2\overline{r}_{M'} - \overline{r}_M$ şi avem al doilea răspuns al problemei puse:

$$M'' : \overline{r}_{M''} = \overline{r}_M - \frac{2F_\pi(\overline{r}_M)}{\|\overline{N}\|^2}\overline{N}. \tag{13.4}$$

Din ultimele două formule reobţinem rezultatul evident că dacă $M \in \pi$ i.e. $F_\pi(\overline{r}_M) = 0$ atunci $\overline{r}_M = \overline{r}_{M'} = \overline{r}_{M''}$ i.e. $M = M' = M''$.

Exemplu: Proiecţia şi simetricul unui punct faţă de planele de coordonate

Presupunem $\overline{r}_M = (x_M, y_M, z_M)$. Atunci:

$$xOy : \begin{cases} M'(x_M, y_M, 0) \\ M''(x_M, y_M, -z_M) \end{cases} \tag{13.5$_1$}$$

$$yOz : \begin{cases} M'(0, y_M, z_M) \\ M''(-x_M, y_M, z_M) \end{cases} \tag{13.5$_2$}$$

$$zOx : \begin{cases} M'(x_M, 0, z_M) \\ M''(x_M, -y_M, z_M) \end{cases} . \tag{13.5$_3$}$$

Aplicaţia 1: Distanţa de la un punct la un plan

Numărul real $d(M, \pi) := \inf\{d_e\left(M, \widetilde{M}\right); \widetilde{M} \in \pi\} \geq 0$ se numeşte *distanţa de la M la planul* π. Deoarece într-un triunghi dreptunghic orice catetă este strict mai mică decât ipotenuza avem că $d(M, \pi) = d_e(M, M')$ şi folosind (13.3) rezultă:

$$d(M, \pi) = \|\overrightarrow{MM'}\| = \|\overline{r}_{M'} - \overline{r}_M\| = \| - \frac{F_\pi(\overline{r}_M)}{\|\overline{N}\|^2}\overline{N}\| = \frac{|F_\pi(\overline{r}_M)|}{\|\overline{N}\|^2}\|\overline{N}\|$$

ceea ce dă:

$$d(M, \pi) = \frac{|F_\pi(\overline{r}_M)|}{\|\overline{N}\|}. \tag{13.6}$$

Astfel, dacă avem:

$$\pi : F_\pi(\overline{r}) = F_\pi(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0 \tag{13.7}$$

atunci:

$$d(M, \pi) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{13.8}$$

Evident, dacă $M \in \pi$ i.e. $F_\pi(\overline{r}_M) = 0$, atunci $d(M, \pi) = 0$ rezultat ce se obţine şi direct din definiţia lui $d(M, \pi)$ luând $\widetilde{M} = M$.

Exemple:

I.1.1) Distanţa de la un punct la planele de coordonate

$$d(M, xOy) = |z_M|, \quad d(M, yOz) = |x_M|, \quad d(M, zOx) = |y_M|. \tag{13.9}$$

I.1.2) Distanţa dintre două plane

Fie planele π, π'. Numărul real $d(\pi, \pi') := \inf\{d_e(M, M'); M \in \pi, M' \in \pi'\} \geq 0$ se numeşte *distanţa dintre planele date*. Dacă planele au o dreaptă d comună atunci alegem $M = M' \in d$ şi deci $d(\pi, \pi') = 0$. Dacă sunt paralele:

$$\begin{cases} \pi : Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' : Ax + By + Cz + D' = 0 \end{cases}$$

atunci alegem $M \in \pi$ oarecare şi avem $d(\pi, \pi') = d(M, \pi')$ ceea ce dă:

$$d(\pi, \pi') = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D'|}{(A^2 + B^2 + C^2)^{1/2}}$$

dar cum $Ax_M + By_M + Cz_M = -D$ rezultă:

$$d(\pi, \pi') = \frac{|D' - D|}{(A^2 + B^2 + C^2)^{1/2}}. \tag{13.10}$$

Ultima formulă implică simetria $d(\pi, \pi') = d(\pi', \pi)$.

I.1.3) Distanţa dintre un plan şi o dreaptă

Fie dreapta d oarecare. Numărul real $d(d, \pi) := \inf\{d_e(M, M'); M \in d, M' \in \pi\} \geq 0$ se numeşte *distanţa de la* d *la* π. Dacă d intersectează π în punctul M luăm $M' = M$ şi deci $d(d, \pi) = 0$. Dacă $d \| \pi$ atunci alegem $M \in \pi$ oarecare şi atunci $d(d, \pi) = d(M, \pi)$. Astfel, dacă:

$$d : \frac{x - x_M}{l} = \frac{y - y_M}{m} = \frac{z - z_M}{n} \tag{13.11}$$

cu $Al + Bm + Cn = 0$ atunci $d(d, \pi)$ este dată de formula (13.8).

Aplicaţia 2: Simetrica unei drepte faţă de un plan

Fie dreapta $d = d(M, \overline{u})$. Dacă $d \| \pi$ atunci simetrica d''_π lui d faţă de π este dreapta $d''_\pi = d(M'', \overline{u})$. Dacă $d \cap \pi = \{\widetilde{M}\}$ atunci simetrica d''_π este dreapta $d''_\pi = d\left(M''\widetilde{M}\right)$.

Exemplu: Simetrica unei drepte faţă de planele de coordonate

Presupunem că dreapta d de ecuaţie (13.11) intersectează planul xOy în punctul $\widetilde{M}\left(\overline{r}_{\widetilde{M}}\right)$. Un calcul imediat conduce la $\overline{r}_{\widetilde{M}} = \left(x_M - \frac{l}{n} z_M, y_M - \frac{m}{n} z_M, 0\right)$ şi folosind prima relaţie (13.6) avem:

$$d''_{xOy} : \frac{x - x_M}{-\frac{l}{n} z_M} = \frac{y - y_M}{-\frac{m}{n} z_M} = \frac{z + z_M}{z_M}$$

ceea ce implică:

$$d''_{xOy} : \frac{x - x_M}{l} = \frac{y - y_M}{m} = \frac{z + z_M}{-n}. \tag{13.12}$$

Prin permutări circulare avem şi:

$$\begin{array}{l} d''_{yOz} : \frac{x+x_M}{-l} = \frac{y-y_M}{m} = \frac{z-z_M}{n} \\ d''_{zOx} : \frac{x-x_M}{l} = \frac{y+y_M}{-m} = \frac{z-z_M}{n} \end{array}. \tag{13.13}$$

I.2) Proiecţia şi simetricul unui punct faţă de o dreaptă

Fie punctul $M(\overline{r}_M)$ şi dreapta $d = d(M_0, \overline{u})$:

$$d : \overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{u}. \tag{13.14}$$

Considerăm planul $\pi = \pi(M, \overline{u})$ ce trece prin M şi este perpendicular pe d. Atunci π intersectează d şi punctul unic de intersecţie $M'(\overline{r}_{M'})$ se numeşte *proiecţia lui* M *pe dreapta* d. Punctul $M''(\overline{r}_{M''})$ pentru care M' este mijlocul segmentului $[MM'']$ se numeşte *simetricul lui* M *faţă de dreapta* d. Ne propunem să determinăm $\overline{r}_{M'}$ şi $\overline{r}_{M''}$ în funcţie de datele problemei: $\overline{r}_M$ şi ecuaţia lui d!

Cum ecuaţia lui π este:

$$\pi(M, \overline{u}) : F_\pi = <\overline{r} - \overline{r}_M, \overline{u}> = 0 \tag{13.15}$$

avem intersecţia $(13.14) \cap (13.15)$:

$$M' = d \cap \pi : <\overline{r}_0 + t\overline{u} - \overline{r}_M, \overline{u}> = 0$$

de unde rezultă parametrul $t = t_{M'}$ corespunzator lui M' pe dreapta d:

$$t_{M'} = -\frac{< \overline{r}_0 - \overline{r}_M, \overline{u} >}{\|\overline{u}\|^2} = -\frac{F_\pi\left(\overline{r}_0\right)}{\|\overline{u}\|^2}$$

care, înlocuit în (13.14) dă primul răspuns al problemei puse:

$$M' : \overline{r}_{M'} = \overline{r}_0 - \frac{< \overline{r}_0 - \overline{r}_M, \overline{u} >}{\|\overline{u}\|^2}\overline{u} = \overline{r}_0 - \frac{F_\pi\left(\overline{r}_0\right)}{\|\overline{u}\|^2}\overline{u}. \tag{13.16}$$

Din aceeaşi relaţie $\overline{r}_{M''} = 2\overline{r}_{M'} - \overline{r}_M$ avem şi al doilea răspuns al problemei:

$$M'' : \overline{r}_{M''} = 2\overline{r}_0 - \frac{2F_\pi\left(\overline{r}_0\right)}{\|\overline{u}\|^2}\overline{u} - \overline{r}_M. \tag{13.17}$$

Dacă $M \in d$ i.e. $\overline{r}_M = \overline{r}_0 + \lambda\overline{u}$ atunci înlocuind în ultimele două relaţii avem:

$$\begin{cases} \overline{r}_{M'} = \overline{r}_0 - \frac{-\lambda\|\overline{u}\|^2}{\|\overline{u}\|^2}\overline{u} = \overline{r}_M \\ \overline{r}_{M''} = 2\overline{r}_M - \overline{r}_M = \overline{r}_M \end{cases}$$

ceea ce exprimă rezultatul evident al acestei situaţii: $M \in d \Longrightarrow M = M' = M''$.

Dacă d are ecuaţia:

$$d : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

cum planul π este:

$$\pi : F_\pi\left(x, y, z\right) = l\left(x - x_M\right) + m\left(y - y_M\right) + n\left(z - z_M\right) = 0$$

prin înlocuirea în formulele (13.16) şi (13.17) obţinem:

$$\begin{cases} \overline{r}_{M'} = \left(x_0, y_0, z_0\right) - \frac{l(x_0 - x_M) + m(y_0 - y_M) + n(z_0 - z_M)}{l^2 + m^2 + n^2} \\ \overline{r}_{M''} = \left(2x_0 - x_M, 2y_0 - y_M, 2z_0 - z_M\right) - 2\frac{l(x_0 - x_M) + m(y_0 - y_M) + n(z_0 - z_M)}{l^2 + m^2 + n^2} \end{cases}. \tag{13.18}$$

Aplicaţie: Distanţa de la un punct la o dreaptă

Numărul real $d\left(M, d\right) := \inf\{d_e\left(M, \widetilde{M}\right); \widetilde{M} \in d\} \geq 0$ se numeşte *distanţa de la M la d*. Cu acelaşi argument cu cel de la aplicaţia 1 de la I.1 avem $d\left(M, d\right) = d_e\left(M, M'\right)$ şi folosind (13.16) avem:

$$d\left(M, d\right) = \|\overrightarrow{MM'}\| = \|\overline{r}_{M'} - \overline{r}_M\| = \|\overline{r}_0 - \frac{F_\pi\left(\overline{r}_0\right)}{\|\overline{u}\|^2}\overline{u} - \overline{r}_M\|.$$

Putem simplifica această ultimă relaţie speculând faptul că $\overline{u} \perp \overrightarrow{MM'}$. Mai precis, din $\measuredangle\left(\overline{u}, \overrightarrow{MM'}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ rezultă $|\sin\measuredangle\left(\overline{u}, \overrightarrow{MM'}\right)| = 1$ şi cum $|\sin\measuredangle\left(\overline{u}, \overline{v}\right)|$ apare în propretatea PV7) a produsului vectorial avem că: $\|\overrightarrow{MM'} \times \overline{u}\| = \|\overrightarrow{MM'}\|\|\overline{u}\|$ ceea ce conduce la:

$$d\left(M, d\right) = \frac{\|\overrightarrow{MM'} \times \overline{u}\|}{\|\overline{u}\|}. \tag{13.19}$$

Un calcul imediat dă $\overrightarrow{MM'} \times \overline{u} = \left(\overline{r}_0 - \frac{F_\pi(\overline{r}_0)}{\|\overline{u}\|^2}\overline{u} - \overline{r}_M\right) \times \overline{u} = (\overline{r}_0 - \overline{r}_M) \times \overline{u}$ şi deci:

$$d\,(M,d) = \frac{\|(\overline{r}_0 - \overline{r}_M) \times \overline{u}\|}{\|\overline{u}\|}. \tag{13.20}$$

sau în coordonate:

$$d\,(M,d) = \frac{\|\,(x_0 - x_M, y_0 - y_M, z_0 - z_M) \times (l,m,n)\,\|}{(l^2 + m^2 + n^2)^{1/2}}.$$

În final:

$$d\,(M,d) = \frac{\Delta}{(l^2 + m^2 + n^2)^{1/2}}$$

unde:

$$\Delta^2 = [n\,(y_0 - y_M) - m\,(z_0 - z_M)]^2 +$$
$$+\,[l\,(z_0 - z_M) - n\,(x_0 - x_M)]^2 + [m\,(x_0 - x_M) - l\,(y_0 - y_M)]^2\,.$$

Cursul 14

Conice

Fixăm planul π odată pentru totdeauna şi în acest plan fixăm o mulţime Γ. Am văzut că dreptele din π au o ecuaţie liniară în coordonatele (x, y), de tipul $ax + by + c = 0$ şi atunci e natural să ne punem problema gradului superior adică 2. Obiectul de studiu al acestui Curs este dat de:

Definiţia 14 Γ se numeşte *conică* dacă există în π un reper ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ a. î. coordonatele (x, y) ale oricărui punct $M \in \Gamma$ în raport cu $\mathcal{R}$ satisfac o aceeaşi ecuaţie pătratică:

$$f_\Gamma(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \tag{14.1}$$

Vom nota simplu:

$$\Gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \tag{14.2}$$

Studiul conicelor face apel la matricile asociate. Mai precis, fie:

$$A_{\Gamma,\mathcal{R}} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in Sym(2), \quad A^e_{\Gamma,\mathcal{R}} = A^e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{pmatrix} \in Sym(3),$$

$$B_{\Gamma,\mathcal{R}} = B = (a_{10}, a_{20}) \in M_{1,2}(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{14.3}$$

unde e înseamnă *extinsă*. Avem varianta matriceală a ecuaţiei (14.2):

$$\Gamma :^t X \cdot A \cdot X + 2B \cdot X + a_{00} = 0. \tag{14.4}$$

O problemă naturală ce apare în raport cu definiţia 14.1 este dacă noţiunea de conică depinde acel reper ortonormat din definiţie. Vom arăta că nu, deci că structura de conică nu depinde de reperul ortonormat în care se lucrează! Fie deci $\tilde{\mathcal{R}} = \{\tilde{O}; \tilde{i}, \tilde{j}\}$ un alt reper ortonormat şi $(\tilde{x}, \tilde{y})$ coordonatele aceluiaşi punct fixat $M \in \Gamma$ relativ la $\tilde{\mathcal{R}}$. Legea de schimbare a coordonatelor la schimbarea reperelor ortonormate este:

$$X = S \cdot \tilde{X} + S_0, \quad S \in O(2), \quad S_0 = \begin{pmatrix} x_{\tilde{O}} \\ y_{\tilde{O}} \end{pmatrix}$$

cu S matricea ortogonală a schimbării de baze ortonormate! Înlocuind în (14.1) obţinem o nouă funcţie pătratică:

$$\tilde{f}_\Gamma =^t \tilde{X} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{X} + 2\tilde{B} \cdot X + \tilde{a}_{00}, \quad \tilde{a}_{00} = f(\tilde{O}), \quad \tilde{A} =^t S \cdot A \cdot S, \quad \tilde{B} =^t S_0 \cdot A \cdot S + B \cdot S. \quad (14.5)$$

$$\tilde{B} =^t S_0 \cdot A \cdot S + B \cdot S. \quad (14.5)$$

În concluzie, avem independenţa de reper a proprietăţii de a fi conică pentru mulţimea dată Γ!

Prin urmare, ne punem problema unei posibile existenţe a unui reper ortonormat *optim*, adică în raport cu care ecuaţia (14.2) să aibă cea mai simplă expresie posibilă, gândindu-ne şi la expresia conicelor din clasa a XI-a:
1) *elipsa* $E(a, b) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ cu a, b numere reale pozitive satisfăcând $a > b$,
2) *hiperbola* $H(a, b) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ cu a, b numere reale pozitive oarecare dar nenule,
3) *parabola* $P(p) : y^2 - 2px = 0$ cu p număr real oarecare dar nenul.
Problema pusă are soluţie unică şi găsirea reperul ortonormat optim se numeşte *aducerea la forma canonică*. Metoda aducerii pe care o prezentăm utilizează *invarianţii conicei* Γ şi respectiv structura simetrică a matricii A. Invarianţii sunt:

$$I := a_{11} + a_{22} = TrA, \quad \delta := \det A, \quad \Delta := \det A^e, \quad D := \delta + a_{11}a_{00} - a_{10}^2 + a_{22}a_{00} - a_{20}^2. \quad (14.6)$$

Clasificarea generală este următoarea:
I) $\delta > 0$ înseamnă *genul eliptic* cu subcazurile:
I1) $I \cdot \Delta < 0$; Γ este o elipsă $E(a, b)$,
I2) $I \cdot \Delta > 0$; Γ este o elipsă imaginară, cu forma canonică $x^2 + y^2 + 1 = 0$,
I3) $\Delta = 0$; Γ e dată de (două drepte imaginare concurente) un punct dublu, cu forma canonică $x^2 + y^2 = 0$.
II) $\delta < 0$ înseamnă *genul hiperbolic* cu subcazurile:
II1) $\Delta \neq 0 + I \neq 0$; Γ este o hiperbolă $H(a, b)$,
II2) $\Delta \neq 0 + I = 0$; Γ este o hiperbolă echilateră $x^2 - y^2 - 1 = 0$ sau $xy = c$=constant,
II3) $\Delta = 0$; Γ e dată de două drepte reale concurente.
III) $\delta = 0$ înseamnă *genul parabolic* cu subcazurile:
III.1) $\Delta \neq 0$; Γ este o parabolă $P(p)$,
III.2) $\Delta = 0$ şi (să presupunem) $a_{11} \neq 0$ avem 3 sub-subcazuri:
III.2a) $a_{11}a_{00} - a_{10}^2 < 0$; Γ este dată de două drepte reale paralele,
III.2b) $a_{11}a_{00} - a_{10}^2 <>$; Γ este dată de două drepte imaginare paralele,
III.2c) $a_{11}a_{00} - a_{10}^2 = 0$; Γ este dată de o dreaptă reală dublă.

Matricea A fiind simetrică admite o formă diagonală $diag(\lambda_1, \lambda_2)$. Prin urmare, aplicăm algoritmul de diagonalizare şi găsim o bază ortonormată $B' = \bar{i}', \bar{j}'$ iar în reperul $\mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\}$ vom avea noua ecuaţie a conicei:

$$\Gamma : \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0. \quad (14.7)$$

În acest moment vom face o translaţie ce transformă ecuaţia (14.7) în ecuaţia canonică dată de clasificare!