Bazele teoriei riscului

Mircea Crâşmăreanu

Contents

MOTTO

Fie acţiunea ”a” având consecinţele c_i cu $i = 1, ..., n$ pentru care considerăm:
1) p_i probabilitatea de producere a lui c_i
2) $Pierd(c_i)$ ”pierderea” cauzată de c_i.

Atunci riscul acţiunii ”a” este:

$$\boxed{R(a) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot Pierd(c_i).}$$

Cursul conţine 30 de desene repartizate astfel:

Curs	Desene
I	0
II	5
III	8
IV	5
V	0
VI	12
VII	0
VIII	0
IX	0
X	0
XI	0
XII	0
Examen	mai multe

Chapter 1

Mulţimi şi funcţii

Noţiunea de *mulţime* este una din noţiunile fundamentale al matematicii. Încercarea de a o defini într-un sens precis este sortită eşecului deoarece încadrarea acestei noţiuni ca un acaz particular al unei alte noţiuni mai generale este imposibilă, noţiunea de mulţime fiind, în fapt, cea mai generală noţiune matematică.

Fondatorul teoriei (moderne a) mulţimilor, matematicianul german Georg Cantor (1845-1918), spunea că prin mulţime se înţelege, la modul intuitiv, totalitatea unor obiecte distincte, bine determinate individual.

Vom utiliza o serie de simboluri grafice pentru uşurinţa exprimării:
-semnul $\forall$ va desemna expresia *pentru orice* sau *oricare ar fi*,
-semnul $\exists$ va desemna cuvântul *există*,
-semnul $\Rightarrow$ va desemna o implicaţie, adică va fi echivalentul cuvintelor *rezultă că* sau *deci* sau *atunci*.

Obiectele ce compun o mulţime le vom numi *elemente* iar acestea, de regulă, le vom nota cu litere mici iar mulţimile cu litere mari. Astfel, $a \in A$ va desemna *apartenenţa* elementului a la mulţimea A; avem negaţia $a \notin A$.

Există două metode de a indica (sau da) o mulţime A:
I) prin înşiruirea completă a elementelor sale, metodă preferabilă atunci când A are un număr finit de elemente; spunem că A este *mulţime finită*. Deci notăm $A = \{a, b, c, ...\}$.
II) prin indicarea unei proprietăţi cracteristice P; scriem $A = \{x; x \quad satisface \quad P\}$.

Mulţimile numerice utilizate în acest Curs sunt cele clasice:
i) mulţimea numerelor *naturale*: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$; avem submulţimea $\mathbb{N}^* = \{1, ..., n, ...\}$.
ii) mulţimea numerelor *întregi*: $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_- \cup \mathbb{N} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$.
iii) mulţimea numerelor *raţionale*: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$.
iv) mulţimea numerelor *iraţionale* este mulţimea $\mathbb{I}$ a numerelor ce nu se pot exprima ca fracţii; spre exemplu $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, π, ...
v) mulţimea numerelor *reale*: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = (-\infty, +\infty)$. Submulţimi remarcabile sunt: $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$=numerele reale nenegative, $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$=numerele reale pozitive, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$=numerele reale nepozitive, $\mathbb{R}_-^* = (-\infty, 0)$=numerele reale negative.

Semnul $\cup$ reprezintă *reuniunea* a două mulţimi; astfel date mulţimile A şi B avem că $A \cup B$ cuprinde toate elementele din A şi B (evident, luate o singură dată):

$$A \cup B = \{x; x \in A \quad \text{sau} \quad x \in B\}. \tag{1.1}$$

Simbolul $\cap$ reprezintă *intersecţia*; astfel $A \cap B$ conţine elementele comune lui A şi B:

$$A \cap B = \{x; x \in A \quad \text{şi} \quad x \in B\}. \tag{1.2}$$

Dacă B este submulţime în A notăm $B \subset A$ şi definim *complementara lui* B în A prin:

$$C_A B = cB = \bar{B} = \{x \in A; x \notin B\}. \tag{1.3}$$

Submulţimii $B \subset A$ îi asociem *funcţia caracteristică* $1_B : A \to \{0, 1\}$:

$$1_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B. \end{cases} \tag{1.4}$$

Reciproc, orice funcţie caracteristică defineşte în mod unic submulţimea B şi deci există o corespondenţă biunivocă între mulţimea $\{\Gamma : A \to \{0, 1\}\}$ şi mulţimea $\mathscr{P}(A)$ a tuturor submulţimilor lui A.

Definiţia 1.1 Fixăm două mulţimi. Numim *relaţie de la* X *la* Y un triplet $r = (X, Y, G)$ cu G submulţime în produsul cartezian $X \times Y$. *Domeniul de definiţie* al lui r este $E_r = \{x \in X; \exists y \in Y(x, y) \in G\}$ iar *mulţimea valorilor* lui r este $F_r = \{y \in Y; \exists x \in X(x, y) \in G\}$. Dacă $(x, y) \in G$ mai notăm xry. Dacă $X = Y$ spunem că avem o relaţie *pe* X.

Definiţia 1.2 O relaţie $f = (X, Y, G)$ se numeşte *funcţie* dacă îndeplineşte următoarele două condiţii:
Fc1) X este domeniul de definiţie al lui f i.e. $X = E_f$;
Fc2) dacă $(x, y_1) \in G$ şi $(x, y_2) \in G$ atunci $y_1 = y_2$.
Notăm $f : X \to Y$.

Definiţia 1.3 Relaţia r pe X se numeşte *de ordine* dacă este:
O1) *reflexivă*: avem xrx pentru orice $x \in X$.
O2) *antisimetrică*: dacă avem xry şi yrx atunci $x = y$.
O3) *tranzitivă*: dacă avem xry şi yrz atunci xrz.
Dacă păstrăm O1 şi O3 şi înlocuim antisimetria cu:
E) *simetrică*: dacă xry atunci yrx
obţinem noţiunea de *relaţie de echivalenţă*. Dacă r este o relaţie de echivalenţă atunci pentru $x \in X$ fixat, mulţimea $[x] = \{y \in X; xry\}$ se numeşte *clasa de echivalenţă* a lui X

Mulţimea tuturor claselor de echivalenţă se numeşte *mulţimea factor* sau *mulţimea cât* a lui X în raport cu r. Deoarece două clase de echiavlenţă sau coincid sau sunt disjuncte, obţinem prin factorizare o *partiţie* a lui X în clase de echivalenţă.

Chapter 2

Probabilităţi: abordare clasică

Fixăm în acest Curs mulţimea nevidă şi finită $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$; deci Ω are *cardinalul* $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$ şi notăm acest fapt prin $card\Omega = n$ sau $|\Omega| = n$.

Definiţia 2.1 i) Ω se numeţe *spaţiul evenimentelor* (*probelor*) iar $\omega_i \in \Omega$ îl numim *eveniment elementar.*
ii) Mulţimea $\mathscr{P}(\Omega)$ o numim *câmpul evenimentelor* iar $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ o numim *eveniment.*

Exemplul 2.2 Aruncăm o monedă: avem două evenimente elementare 0=a căzut stema, 1=a căzut moneda (banul). Deci $n = 2$ şi $\Omega = \{0, 1\}$.

Exemplul 2.3 Aruncăm un zar. Avem şase evenimente elementare i=a căzut faţa i, $i = 1, ..., 6$. Deci $\Omega = \{1, ..., 6\}$ şi un eveniment compus este, spre exemplu, "a căzut o faţă pară/impară", eveniment modelat de $A = \{2, 4, 6\}$ respectiv $B = \{1, 3, 5\}$.

Definiţia 2.4 i) $\Omega \in \mathscr{P}(\Omega)$ îl numim *evenimentul sigur* iar *mulţimea vidă* $\emptyset \in \mathscr{P}(\Omega)$ se numeşte *evenimentul imposibil.*
ii) Fie A şi B din $\mathscr{P}(\Omega)$. Dacă $A \cap B = \emptyset$ atunci spunem că evenimentele A şi B sunt *incompatibile* iar dacă $B \subset A$ atunci spunem că evenimentul B *implică* evenimentul A.

Exemplul 2.5 La aruncarea zarului evenimentul B=a căzut faţa 4 implică evenimentul A=a căzut o faţă pară, care este independent de evenimentul C=a căzut o faţă impară.

Noţiunea principală a acestui Curs este dată de:

Definiţia 2.6 Se numeşte *probabilitate* pe Ω o funcţie $p : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfăcând axiomele:
p1) $p(A) \geq 0$ pentru orice $A \in \mathscr{P}(\Omega)$
p2) $p(\Omega) = 1$
p3) dacă A şi B sunt evenimente incompatibile atunci:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B). \tag{2.1}$$

Perechea (Ω, p) o numim *câmp de probabilitate.*

Propoziţia 2.7 (Regula de adunare a probabilităţilor) *Fie $A_1, \ldots, A_r$ evenimente incompatibile două câte două i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$ în mulţimea $\{1, ..., r\}$. Atunci:*

$$p(A_1 \cup ... \cup A_r) = p(A_1) + ... + p(A_r)(= \sum_{i=1}^{r} p(A_i)). \tag{2.2}$$

Demonstraţie Vom arăta prin inducţie după $r \geq 2$. Pentru $r = 2$ avem formula (1.5). Presupunem adevărată relaţia (1.6) pentru $(r-1)$ şi s-o demonstrăm pentru r. Evenimentele $A = A_1 \cup ... \cup A_{r-1}$ şi $B = A_r$ sunt evident incompatibile şi aplicăm (1.5):

$$p((A_1 \cup ... \cup A_{r-1}) \cup A_r) = p(A_1 \cup ... \cup A_{r-1}) + p(A_r)$$

ceea ce dă concluzia în baza ipotezei inductive. $\square$

Fie $A = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_r}\}$ oarecare din $\mathscr{P}(\Omega)$. Evident evenimentele elementare ω_{i_j}, $j = 1, ..., r$ sunt incompatibile şi deci $p(A) = \sum_{j=1}^{r} p(\{\omega_{i_j}\})$. În concluzie a da/şti probabilitatea p pe $\mathscr{P}(\Omega)$ este echivalent cu a da/şti $p = (p_i)$ cu $i \in \{1, ..., n\}$. Rezultă că funcţia p apare ca un vector n-dimensional $\bar{p} = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ iar proprietăţile din Definiţia 1.6 se traduc în: p1) $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+$ i.e. $p_i \geq 0$ pentru $1 \leq i \leq n$
p2) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
Rezultă că $p_i \in [0, 1]$ pentru toţi $i \in \{1, ..., n\}$.

Exemplul 2.8 i) Evenimentele *echiprobabile* sunt caracterizate de vectorul $\bar{p}_n = (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$ ceea ce corespunde la funcţia probabilitate clasică:

$$p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} \tag{2.3}$$

care dă definiţia clasică (sau tradiţională) a probabilităţii unui eveniment E:

$$p(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile producerii lui} E}{\text{numărul total de cazuri posibile}}. \tag{2.4}$$

ii) În particular, moneda este dată de $\bar{p}_2$ iar zarul de $\bar{p}_6$.

Propoziţia 2.9 *Date evenimentele* $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *avem:*

$$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B). \tag{2.5}$$

Demonstraţie Evenimentele $X = B \cap \bar{A}$ şi $Y = B \cap A$ sunt evident incompatibile datorită prezenţei lui A şi $\bar{A}$. Aplicăm (1.5) pentru X şi Y şi folosim faptul că:

$$(B \cap A) \cup (B \cap A) = B \tag{2.6}$$

care se dovedeşte imediat. $\square$

Corolarul 2.10 *Pentru orice* $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *avem:*

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) \tag{2.7}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \tag{2.8}$$

$$A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B). \tag{2.9}$$

Din (1.10) *avem în particular că* $p(\emptyset) = 0$.

Demonstraţie Pentru (2.7) punem $B = \Omega$ în (2.5). Pentru (2.8) să observăm că: - evenimentele A şi $B \cap \bar{A}$ sunt incompatibile,
-avem $A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B$,

şi utilizăm (2.6) Pentru ultima relaţie, din $A \subset B$ avem $A \cap B = A$ şi din (2.5) rezultă $0 \leq p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A)$ ceea ce dă concluzia. □

Seminar 2

Cardinalul lui $\mathscr{P}(\Omega)$ este 2^n. Acest cardinal creşte foarte repede odată cu n mai precis *exponenţial.*

S2.1 Să se calculeze cu MATLAB puterea 2^n pentru $n = 0, ..., 10$.

Soluţie

```
>> for n=1:10; x(n)=2^n; end;
>> x (+ Enter)
Ans:
        x=2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024
```

Observaţie: MATLAB nu ştie de convenţia $x^0 = 1$ într-un şir. □

O altă funcţie ce creşte foarte rapid este *factorialul*: $n! = 1 \cdot ... \cdot n$ cu convenţia $0! = 1$.

S2.2 Se cere $n!$ pentru $n \in \{1, ..., 8\}$.

Soluţie $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $8! =???$.

În MATLAB folosim următoarele simboluri pentru operaţii numerice:
1) $+$ pentru adunare; $-$ pentru scădere
2) $*$ pentru înmulţire
3) / pentru împărţire
4) ˆ pentru ridicarea la putere.

Deci pentru 8! tastăm:

```
>> 2*3*4*5*6*7*8 (+Enter)
Ans:
     40320
```

Avem în Matlab funcţia *factorial* cu sintaxa:

```
>> factorial(n)
```

pentru $n \leq 21$! O altă variantă este $prod(1 : n)$.

Pe Wikipedia (engleză) avem un tabel foarte amplu:
http://en.wikipedia.org/wiki/Factorial

Atenţie: în MATLAB avem funcţia *factor* care factorizează un număr natural în produs de numere prime. Exemplu:

```
>> factor(2009)
```

are ca rezultat 7 7 41 deoarece $2009 = 7^2 \cdot 41$. Analog:

```
>> factor(2010)
```

dă rezultatul 2 3 5 67. Cele două funcţii nu trebuie confundate! □

O funcţie importantă în calculul unor scheme probabilistice este *combinări de n obiecte luate câte k*, $0 \leq k \leq n$:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2.10}$$

De altfel, numărul submulţimilor cu k elemente ale lui Ω este C_n^k şi deci:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n. \tag{2.11}$$

O altă proprietate importantă combinărilor este *complementaritatea*:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{2.12}$$

A se vedea http://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient.

În Matlab avem comanda: $C = nchoosek(n, k)$ eficientă pentru $n \leq 15$.

S2.3 Să se figureze în MATLAB vectorii de probabilitate doi dimensionali.
Cu programul:

```
>> x=linspace(0, 1, 1000);
>> plot(x, 1-x) (+Enter)
```

avem graficul următor:

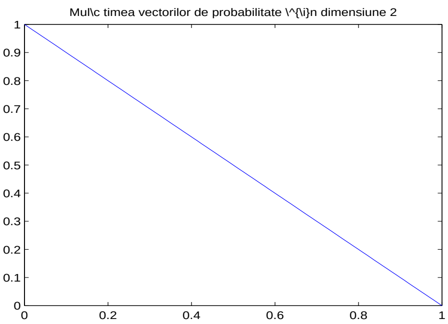

Figura 2.1: Distribuţia în plan a vectorilor de probabilitate

Cu programul:

```
>> x=linspace(0, 1, 1000);
>> plot(x, 1-x, 1/2, 1/2, 'o') (+Enter)
```

avem graficul următor ce poziţionează vectorul $\bar{p}_2$ al monedei:

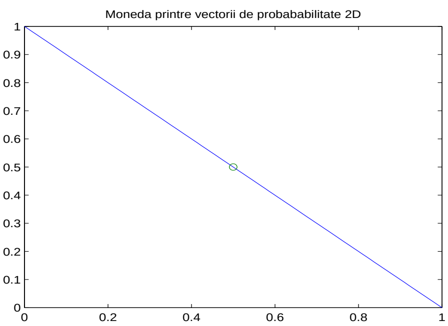

Figura 2.2: Distribuţia monedei printre vectorii de probabilitate 2D

Cu programul:

```
>> x=linspace(0, 1, 1000);
>> plot(x, 1-x); grid on (+Enter)
```

avem graficul următor:

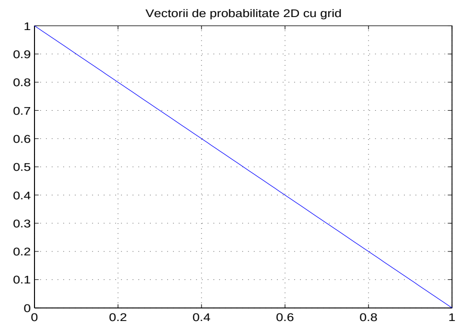

Figura 2.3: Distribuţia în plan a vectorilor de probabilitate cu grid

Cu:

```
>> x=linspace(0, 1, 1000);
>> plot(x, 1-x); axis equal (+Enter)
```

obţinem:

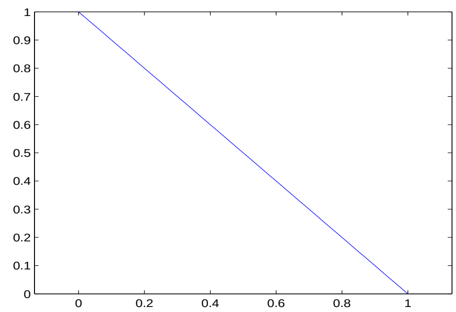

Figura 2.4: Distribuţia în plan a vectorilor de probabilitate cu "axis equal"

S2.4 Să se figureze în MATLAB vectorii de probabilitate trei dimensionali.

Următorul program a fost sugerat de colegul Marian Ioan Munteanu şi îi mulţumim pe această cale:

```
>>u=0:pi/25:pi/2;
>>v=0:pi/25:pi/2;
>>for i=1:length(u); for j=1:length(v); x(i, j)=(cos(u(i)))^2*(cos(v(j)))^2;
 y(i, j)=(cos(u(i)))^2*(sin(v(j)))^2; z(i, j)=(sin(u(i)))^2; end; end; %un singur rand !
>>mesh(x, y, z)
```

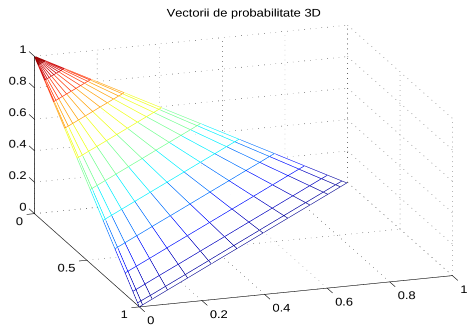

Figura 2.5: Distribuţia în spaţiu a vectorilor de probabilitate

Această parametrizare a fost aleasă pentru $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cu:

$$\begin{cases} x \in [0,1], y \in [0,1], z \in [0,1] \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Chapter 3

Probabilităţi: abordare modernă

În cursul precedent am introdus probabilitatea pe o mulţime finită Ω. Evident, există situaţii, foarte importante pentru practică, când suntem nevoiţi să lucrăm cu o mulţime infinită. Din acest motiv introducem în acest Curs o altă abordare a noţiunii de probabilitate.

Fixăm o mulţime nevidă Ω de cardinal finit sau infinit; dacă Ω este în bijecţie cu $\mathbb{N}$ atunci spunem că este *(infinit) numărabilă*. Un element $\omega \in \Omega$ va fi numit, ca şi anterior, *eveniment elementar*. Nu toate evenimentele din Ω, considerate ca submulţimi, sunt interesante pentru experimentul avut în vedere şi de aceea vom selecta o clasă specială de astfel de evenimente:

Definiţia 3.1 Familia $\mathscr{F}$ de elemente din $\mathscr{P}(\Omega)$ o numim *σ-algebră* dacă:
a1) $\emptyset \in \mathscr{F}$
a2) dacă $A \in \mathscr{F}$ atunci şi $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$
a3) dacă $A_i \in \mathscr{F}$ cu $i \in \mathbb{N}$ atunci $\cup_{i \in \mathbb{N}} \in \mathscr{F}$.
Perechea $(\Omega, \mathscr{F})$ o numim *spaţiu măsurabil* iar $A \in \mathscr{F}$ o numim *$\mathscr{F}$-măsurabilă* sau pe scurt *măsurabilă* atunci când $\mathscr{F}$ este specificată.

Observaţii 3.2 i) Dacă $\mathscr{C}$ este o familie oarecare de submulţimi în Ω atunci există o cea mai mică (în sensul incluziunii) σ-algebră ce conţine pe $\mathscr{C}$. Aceasta se notează $\sigma(\mathscr{C})$ şi se numeşte *σ-algebra generată de $\mathscr{C}$*.
ii) Din a1) şi a2) rezultă că $\Omega \in \mathscr{F}$ pentru orice σ-algebră $\mathscr{F}$.

Definiţia 3.3 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi spaţiul $\mathbb{R}^n$ al vectorilor n-dimensionali notaţi $\bar{x} = (x^1, ..., x^n)$. Pe acest spaţiu introducem:
PS) *produsul scalar Euclidian* $<,>$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dat de:

$$< \bar{x}, \bar{y} >= x^1 y^1 + ... + x^n y^n = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i. \tag{3.1}$$

N) *norma Euclidiană* $\|, \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ dată de:

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{< \bar{x}, \bar{x} >}. \tag{3.2}$$

D) *distanţa Euclidiană* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|. \tag{3.3}$$

Perechea $(\mathbb{R}^n, <,>)$ o numim *spaţiul Euclidian n-dimensional.*

Definiţia 3.4 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Spunem că A este *deschisă* dacă pentru orice $\bar{x} \in A$ există $r > 0$ aşa încât orice $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ cu $d(\bar{x}, \bar{y}) < r$ este element din A. Deoarece mulţimea $B(\bar{x}, r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n; d(\bar{x}, \bar{y}) < r\}$ se numeşte *bila deschisă de centru* $\bar{x}$ *şi rază* r avem că A este deschisă dacă orice punct din A este centrul unei bile deschise conţinute în A.

Definiţia 3.5 Fie $\mathscr{D}(n)$ familia mulţimilor deschise din $\mathbb{R}^n$. Atunci σ-algebra generată de $\mathscr{D}(n)$ se notează $\mathscr{B}(n)$ iar un element din această σ-algebră se numeşte *mulţime boreliană*.

Definiţia 3.6 Se numeşte *măsură probabilistică* sau *măsură de probabilitate* pe spaţiul măsurabil $(\Omega, \mathscr{F})$ o funcţie $Pr : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ satisfăcând axiomele:
P1) $Pr(A) \geq 0$ pentru orice $A \in \mathscr{F}$
P2) $Pr(\Omega) = 1$
P3) dacă $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathscr{F}$ este un şir *disjunct* i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$ atunci:

$$Pr(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} Pr(A_i). \tag{3.4}$$

Tripletul $(\Omega, \mathscr{F}, Pr)$ se numeşte *spaţiu de probabilitate*.

Exemplul 3.7 Avem că $\mathscr{P}(\Omega)$ este o σ-algebră pe Ω; chiar cea mai mare în sensul incluziunii. Astfel, definiţia 2.6 din Cursul 2 este un caz particular al precedentei definiţii şi deci pentru Ω finită avem un exemplu de măsură de probabilitate dat de relaţia (2.3).

Definiţia 3.8 Fixăm din nou spaţiul măsurabil $(\Omega, \mathscr{F})$. Aplicaţia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se numeşte *variabilă aleatoare* dacă pentru orice $r \in \mathbb{R}$ avem:

$$\{X < r\} := \{\omega \in \Omega; X(\omega) < x\} \in \mathscr{F}. \tag{3.5}$$

Dacă mulţimea valorilor lui X este finită sau numărabilă spunem că X este o *variabilă aleatoare discretă* iar în caz contrar o numim *variabilă aleatoare continuă*; în particular dacă X ia un număr finit de valori spunem că este o *variabilă aleatoare simplă*.

Observaţia 3.9 Se poate arăta că următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru $X : (\Omega, \mathscr{F}) \to \mathbb{R}$:
1) $\{X < r\} \in \mathscr{F}$ pentru orice $r \in \mathbb{R}$
2) $\{a \leq X \leq b\} \in \mathscr{F}$ pentru orice a şi b din $\mathbb{R}$.
În particular, luând $a = b = x \in \mathbb{R}$ avem că pentru o variabilă aleatoare $\{X = x\} \in \mathscr{F}$ ceea ce permite introducerea următoarei noţiuni:

Definiţia 3.10 Fie X o variabilă aleatoare discretă pe spaţiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, Pr)$. Se numeşte *distribuţia* lui X tabloul:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

unde x_i sunt valorile lui X iar $p_i = Pr(\{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_i\})$.

În particular, distribuţia unei variabile aleatoare simple este:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

unde n este numărul valorilor lui X.

Exemplul 3.11 (Urna cu bile de două culori) O urnă conţine a bile albe şi b bile negre. Fie A evenimentul extragerii unei bile albe şi B evenimentul extragerii unei bile negre. Fie probabilităţile asociate:

$$p := p(A) = \frac{a}{a+b} \quad q = p(B) = \frac{b}{a+b}. \tag{3.8}$$

Avem deci $\Omega = \{1, ..., a+b\}$ şi fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ce ia valoarea 1 când apare o bilă albă şi 0 pentru o bilă neagră. Avem că X este o variabilă aleatoare în raport cu σ-algebra generată de $\mathscr{C} = \{A, B\}$. Distribuţia lui X este:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

O astfel de variabilă aleatoare se cheamă *de tip Bernoulli.*

Seminar 3

S3.1 Să se studieze urna cu număr egal de bile.

Soluţie Avem aceeaşi variabilă aleatoare ca în cazul monedei:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Putem desena în Matlab această distribuţie:

```
>> x=[0 1];
>> y=[0.5 0.5];
>> plot (x, y, 'ok', 'markerfacecolor', 'k', 'markersize', 10) (+Enter)
```

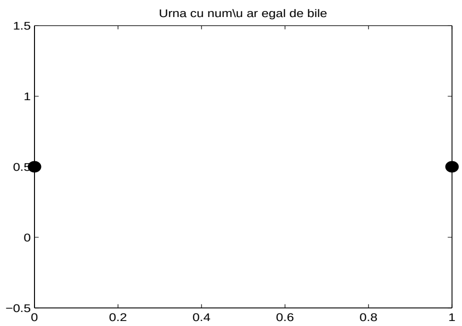

Figura 3.1: Schema bilei întoarse

Dacă realocăm valorile variabilei aleatoare aşa încât să înceapă de la 1 şi nu de la zero:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

putem reprezenta in Matlab astfel:

```
>> y=[0.5 0.5];
>> plot(y, 'ok', 'markerfacecolor', 'k') (+Enter)
```

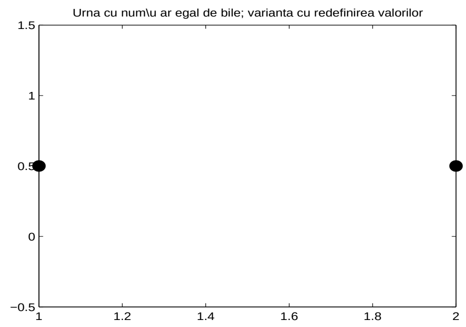

Figura 3.2: Varianta distribuţiei Bernoulli

S3.2 Să se reprezinte în MATLAB zarul.

Soluţie Avem:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

şi programul MATLAB:

```
>> x=[1 2 3 4 5 6]; sau x=[1:6];
>> y=[1/6 1/6 1/6 1/6 1/6 1/6];
>> plot(x, y, 'o') (+Enter)
```

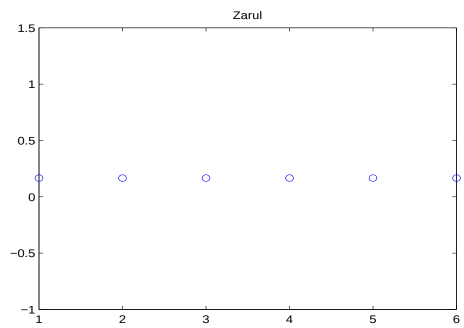

Figura 3.3: Zarul

Am utilizat comanda $plot(x, y, string)$ unde $string$ poate combina cel mult trei elemente: culoare, marker pentru punctul y şi stilul liniei.

Culorile sunt:

r	Red
g	Green
b	Blue
c	Cyan
m	Magenta
y	Yellow
k	Black
w	White

Markerele în MATLAB

o	Circle
*	Asterisk
.	Point
+	Plus
x	Cross
s	Square
d	Diamond
ˆ	Upward triangle
v	Downward triangle
$>$	Right triangle
$<$	Left triangle
p	Five-point star
h	Six-point star

Am ales 'o' pentru că altfel punctele de pe linia orizontală nu s-ar fi distins. Astfel, programul simplu:

```
>>x=[1:6];
>>y=[1/6 1/6 1/6 1/6 1/6 1/6];
plot(x, y) (+Enter)
```

dă figura următoare:

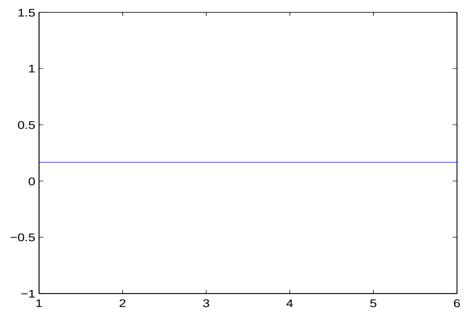

Figura 3.4: Zarul cu plot(x, y)

Stiluri de linie MATLAB

-	Solid line (default)
–	Dashed line
:	Dotted line
-.	Dash-dot line

Exemple:

1) $plot(x, y,' r * --')$ pune un asterix roşu în punctul $M(x, y)$ şi uneşte punctele cu o "red dashed line".

Figura 3.5

2) $plot(x, y,' y+')$ pune o cruciuliţă galbenă în puncte şi nu le uneşte.

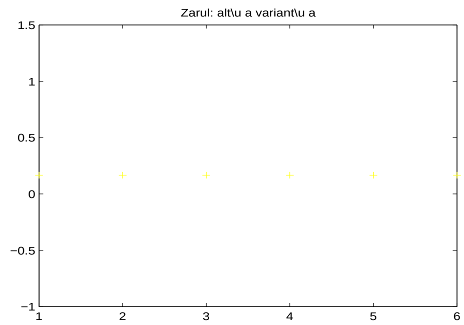

Figura 3.6

3) $plot(x, y,' kd :')$ uneşte cu o linie punctată punctele marcate cu diamante.

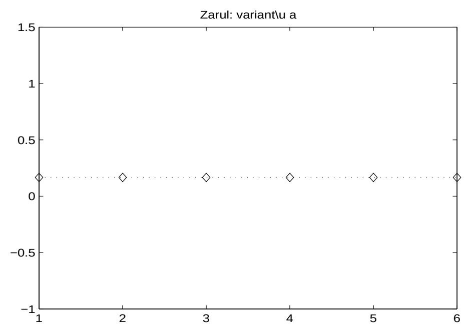

Figura 3.7

Cele trei elemente din 'string' pot apare în orice ordine; astfel: $plot(x, y,' ms - -')$ şi $plot(x, y,' s - -m')$ sunt echivalente.

S3.3 Să se reprezinte în MATLAB variabila aleatoare:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Soluţie Programul:

```
>>x=[1:4];
>>y=[1/8 1/4 1/8 1/2];
>>plot(x, y) (+Enter)
```

dă:

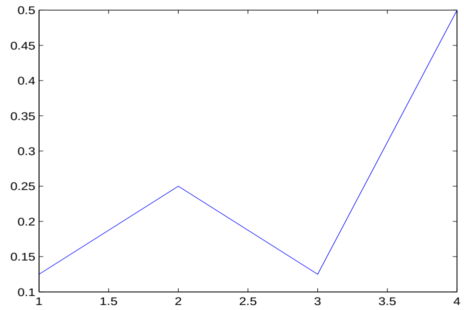

Figura 3.8

3.4 Să se calculeze cu MATLAB produsul scalar dintre vectorii $\bar{x} = (1, 3, 5, 7)$ şi $\bar{y} = (2, 4, 6, 8)$ şi normele lor.

Soluţie Avem:

$$< \bar{x}, \bar{y} >= \bar{x} \cdot \bar{y}^t = (x^1, ..., x^n) \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

unde indicele superior t semnifică transpusa matricii respective.

În MATLAB transpusa se notează cu $'$ iar produsul matricilor cu $*$. Pentru normă avem comanda $norm(x)$.

Deci programul cerut este:

```
>>x=[1 3 5 7];
>>y=[2 4 6 8];
>>x*y' (+Enter)
>>norm(x) (+Enter)
>>norm(y) (+Enter)
```

Avem $< \bar{x}, \bar{y} >= 2 + 12 + 30 + 56 = 100$, $\|\bar{x}\| = \sqrt{1 + 9 + 25 + 49} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ şi $\|\bar{y}\| = \sqrt{4 + 16 + 36 + 64} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$. Cu programul anterior obţinem:

```
>>ans =
        100
>>ans =
         9.1652
>>ans =
         10.9545
```

Definiţia 3.11 Vectorii $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ se numesc *ortogonali* sau *perpendiculari* dacă $< \bar{x}, \bar{y} >= 0$.

Mai general avem noţiunea de unghi:

Definiţia 3.12 Daţi vectorii nenuli $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ *unghiul* dintre ei este dat de:

$$\cos \phi = \frac{< \bar{x}, \bar{y} >}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|}. \tag{3.14}$$

Deci unghiul dintre vectorii ortogonali este $\phi = \frac{\pi}{2}$.

S3.5 Să se verifice că următorii vectori sunt ortogonali: $\bar{x} = (1, 2, -3)$, $\bar{y} = (4, 4, 4)$.

Definiţia 3.13 Un set de n vectori ortogonali doi câte doi şi de normă 1 spunem că formează o *bază ortonormată* în $\mathbb{R}^n$. Un vector de normă 1 se numeşte *versor* sau *vector unitar.*

S3.6 Să se verifice că următorul set de vectori este o bază ortonormată în spaţiu:

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0) \\ e_3 = (0, 0, 1). \end{cases} \tag{3.15}$$

Această bază se numeşte *baza canonică* din $\mathbb{R}^3$ şi se extinde natural la orice $\mathbb{R}^n$.

S3.7 Să se arate că următorii vectori constituie o bază ortonormată în spaţiu:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(-1, 2, 2) \\ y = \frac{1}{3}(2, -1, 2) \\ z = \frac{1}{3}(2, 2, -1). \end{cases}$$

Soluţie O metodă de arăta că n vectori constituie o bază ortonormată este următoarea: formăm o matrice pătratică de ordin n cu aceşti vectori scrişi pe coloană. Atunci avem concluzia dorită doar dacă:

$$A \cdot A^t = I_n \tag{2.15}$$

unde I_n este *matricea unitate de ordin* n:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

adică matricea ce are 1 pe diagonala pricipală şi în rest 0. O matrice ce satisface (2.15) se numeşte *matrice ortogonală* de ordin n.

Observaţia 3.8 Produsul a două matrici pătratice se efectuează cu $.*$ nu cu $*$ simplu ! Liniile unei matrici se separă cu ;.

Exemplu: Matricea corespunzătoare exerciţiului dat este:

```
>>A=[-1/3 2/3 2/3; 2/3 -1/3 2/3; 2/3 2/3 -1/3]
```

Chapter 4

Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare

Fie $(\Omega, \mathscr{F}, Pr)$ un spaţiu de probabilitate şi $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare pe spaţiul suport Ω.

Definiţia 4.1 Funcţia $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$:

$$F(x) = Pr(\{X < x\}) \tag{4.1}$$

se numeşte *funcţia de repartiţie a lui* X.

Avem o exprimare concretă a acestei funcţii pentru cazul discret prin:

Propoziţia 4.2 *Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare discrete este un funcţie în scară.*

Demonstraţie Presupunem:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Atunci:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, x_1] \\ \sum_{i=1}^{n} p_i, & x \in (x_n, x_{n+1}), n \geq 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

ceea ce dă concluzia. □

Proprietăţile de bază ale funcţiei de repartiţie sunt date de:

Propoziţia 4.3 *Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare oarecare satisface următoarele proprietăţi*:
FR1) *este monoton crescătoare.*
FR2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
FR3) F *este continuă la stânga în orice punct* $x \in \mathbb{R}$.
Reciproc, o funcţie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ce satisface aceste trei proprietăţi este funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare*

Avem de asemenea o utilizare a funcţiei de repartiţie în determinarea de probabilităţi (în continuare, pentru simplificarea scrierii vom nota P în loc de Pr):

Propoziţia 4.4 *Funcţia de repartiţie are următoarele proprietăţi:*
FR4) $F(x+0) = F(x) + P(X = x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$; *deci* F *este continuă în punctul* x *dacă şi numai dacă* $P(X = x) = 0$.
FR5) *pentru intervale mărginite arbitrare avem:*

$$\begin{cases} P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) \\ P(a < X < b) = F(b) - F(a+0) \\ P(a \leq X \leq b) = F(b+0) - F(a) \\ P(a < X \leq b) = F(b+0) - F(a+0). \end{cases} \tag{4.3}$$

O altă noţiune foarte importantă în teoria variabilelor aleatoare este:

Definiţia 4.5 Fie X o variabilă aleatoare (continuă) şi F funcţia sa de repartiţie. Dacă există o funcţie $\rho : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ aşa încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)dt \tag{4.4}$$

atunci ρ se numeşte *densitatea de repartiţie* sau *densitatea de probabilitate* a lui X.
Proprietăţile acestei noi funcţii sunt date de:

Propoziţia 4.6 *Fie* X *o variabilă aleatoare ce admite densitatea* ρ. *Atunci:*
D1) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \rho(x)dx$.
D2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) = +1$.
D3) F *este derivabilă în orice punct* $x \in \mathbb{R}$ *în care* ρ *este continuă şi atunci:*

$$F'(x) = \rho(x). \tag{4.5}$$

Exemple de variabile aleatoare remarcabile

I) Discrete

1) *variabilă aleatoare binomială*

$$X : \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

cu $k \in \{0, 1, ..., n\}$ iar $p, q \in [0, 1]$ satisfac $p + q = 1$. Se mai numeşte şi *schema bilei revenite* deoarece modelează următorul experiment: avem o urnă cu a bile albe şi b bile negre şi efectuăm n extrageri, de fiecare dată punând bila extrasă înapoi în urnă. Vrem probabilitatea ca să apară de k ori o bilă albă.

Acelaşi experiment se poate modela şi altfel: avem n urne cu un conţinut identic de bile, ca mai sus. Din fiecare urnă extragem o singură bilă. Denumirea de binomială se datorează faptului că probabilităţile respective sunt exact coeficienţii din dezvoltarea *binomului lui Newton*:

$$(q + p)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{4.7}$$

Există şi o generalizare numită *variabilă aleatoare multinomială* pentru care trimitem la pagina 32 din:
I. Gh. Şabac şi alţii, *Matematici speciale*, vol. II, EDP, Bucureşti, 1983.

2) Variabila aleatoare X este *de tip Poisson* cu parametrul $\lambda \in (0, +\infty)$ dacă are o distribuţie de forma:

$$X : \begin{pmatrix} k \in \mathbb{N} \\ \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

O lege de tip Poisson se mai numeşte *lege a evenimentelor rare* şi se poate obţine ca un caz limită al legii binomiale pentru p foarte mic şi n foarte mare dar astfel încât produsul $np = \lambda$ este constant.

II) Continue

3) Fie numerele reale μ, σ cu $\sigma > 0$. Variabila aleatoare X se numeşte *de tip Gauss* sau spunem că X *satisface legea normală* $N(\mu, \sigma)$ dacă X admite o densitate de repartiţie:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]. \tag{4.9}$$

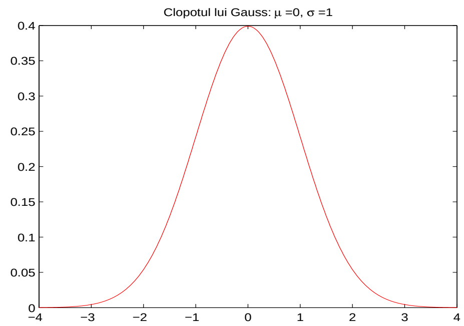

Figura 4.1: Curba clopot

4) Variabila aleatoare X are *repartiţie uniformă* pe $[a, b] \subset \mathbb{R}$ cu a, b finite dacă admite:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]. \end{cases} \tag{4.10}$$

Seminar 4

S4.1 Să se studieze variabila aleatoare:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Soluţie X determină pe mulţimea Ω a evenimentelor elementare partiţia $\{A_1, A_2, A_3\}$ cu $Pr(A_1) = \frac{1}{2}$, $Pr(A_2) = \frac{1}{3}$, $Pr(A_3) = \frac{1}{6}$ şi avem:

$$\{X < x\} = \begin{cases} \emptyset, & x \in (-\infty, -1] \\ A_1, & x \in (-1, 0] \\ A_1 \cap A_2, & x \in (0, 1] \\ \Omega, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Funcţia de repartiţie a lui X este:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{2}, & x \in (-1, 0] \\ \frac{5}{6}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Putem desena în Matlab această distribuţie:

```
>>x=[-1 0 1];
>>y=[1/2 1/3 1/6];
>>plot (x, y) (+Enter)
```

sau:

```
>>plot (x, y, 'ok', 'markerfacecolor', 'k', 'markersize', 10) (+Enter)
```

De asemeni, putem reprezenta grafic funcţia de repartiţie obţnută:

```
>>x1=-3:.01:-1; y1=0;
>>x2=-0.99:.01:0; y2=1/2;
>>x3=0.01:.01:1; y3=5/6;
>>x4=1.01:.01:3; y4=1;
>>plot(x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4); axis equal
```

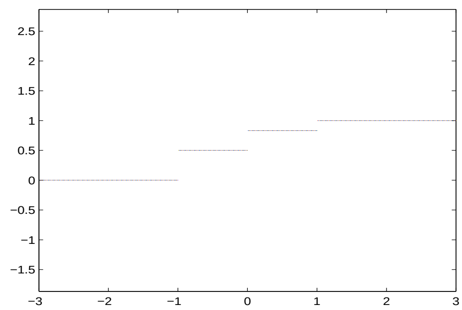

Figura 4.2

De asemeni, pentru o mai bună vizualizare putem folosi culori; ultima linie:

```
>>plot(x1, y1, 'r', x2, y2, 'g', x3, y3, 'b', x4, y4, 'm'); axis equal
```

dă:

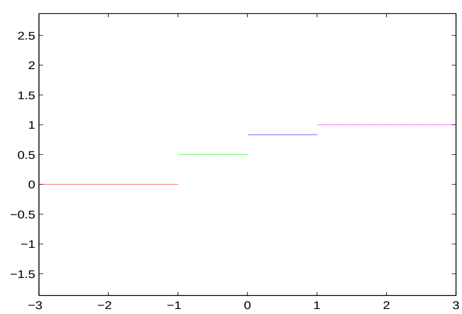

Figura 4.3

S4.2 Se cer repartiţiile variabilelor aleatoare: X_i=numărul de apariţii ale banului la i aruncări ale monezii pentru $i = 1, 2$.

Soluţie Avem:

$$X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

respectiv:

$$X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Reprezentarea cu bare a acestor variabile aleatoare este dată de:

```
>>x=[0 1];
>>y=[1/2 1/2];
>>bar(x, y); axis equal (+Enter)
```

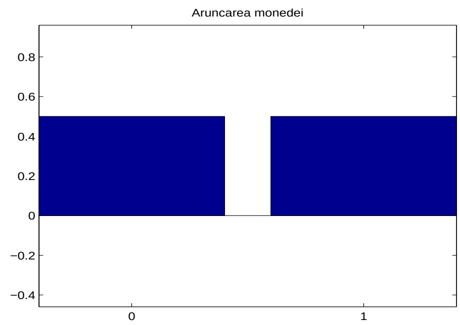

Figura 4.4

respectiv:

```
>>x=[0 1 2];
>>y=[1/4 1/2 1/4];
>>bar(x, y); axis equal (+Enter)
```

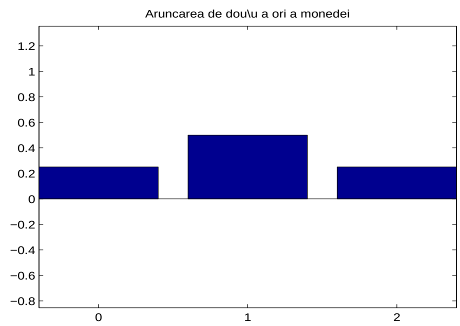

Figura 4.5

S4.3 Se dă variabila aleatoare:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p^2 & \frac{7p}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Se cere probabilitatea ca X să ia o valoare cel mult egală cu 2.

Soluţie Mai întâi aflăm valoarea lui p punând condiţia ca suma elementelor inferioare să fie 1. Avem:

$$p^2 + \frac{7}{4}p - \frac{1}{2} = 0$$

Discriminantul acestei ecuaţii de gradul doi este:

$$\Delta = \frac{49}{16} + \frac{4}{2} = \frac{49}{16} + \frac{32}{16} = \frac{81}{16} = (\frac{9}{4})^2.$$

Avem atunci soluţiile:

$$p_1 = \frac{-\frac{7}{4} - \frac{9}{4}}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

o soluţie imposibilă deoarece termenii inferiori trebuie să fie pozitivi respectiv soluţia:

$$p_2 = \frac{-\frac{7}{4} + \frac{9}{4}}{2} = \frac{1}{4}.$$

Deci X are distribuţia:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Evenimentul $X \leq 2$ se poate scrie:

$$\{X \leq 2\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\}$$

şi deci:

$$P(\{X \leq 2\}) = P(\{X = 0\}) + P(\{X = 1\}) + P(\{X = 2\}) = \frac{1}{16} + \frac{7}{16} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Evident, pentru problema pusă puteam raţiona şi astfel:

$$\{X \leq 2\} = C\{X = 3\}$$

ceea ce dă:

$$P(\{X \leq 2\}) = 1 - P(\{X = 3\}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

În termeni de funcţia de repartiţie avem că probabilitatea cerută este exact $F(2) + P(\{X = 2\})$. Rezultă că:

$$F(2) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Chapter 5

Valori medii. Momente, dispersie, corelaţie

Definiţia 5.1 Fie X o variabilă aleatoare.
i) Dacă X este discretă cu expresia:

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I \subset \mathbb{N}}$$

atunci numărul real:

$$\bar{x} = M(X) := \sum_{i \in I} p_i x_i \tag{5.1}$$

se numeşte *media* lui X.
ii) Dacă X este continuă şi admite densitatea de repartiţie ρ atunci definim *media* lui X prin:

$$\bar{x} = M(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x) dx. \tag{5.2}$$

iii) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Valoarea medie a variabilei aleatoare X^n:

$$M_n(X) := M(X^n) \tag{5.3}$$

se numeşte *momentul de ordin* n al lui X.

Exemplul 5.2 Dacă X este discretă atunci:

$$M_n(X) = \sum_{i \in I} p_i x_i^n \tag{5.4}$$

iar dacă X este continuă şi admite densitatea de repartiţie ρ atunci:

$$M_n(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \rho(x) dx. \tag{5.5}$$

Propoziţia 5.3 *Fie variabilele aleatoare X, Y şi numărul real a. Avem:*
M1) $M(a + X) = a + M(X)$
M2) $M(aX) = aM(X)$.

M3) $\inf X \leq M(X) \leq \sup X$.
M4) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

Demonstraţie Vom face demonstraţia pentru v. a. simple.
M1) Avem:

$$a + X : \begin{pmatrix} a+x_0 & a+x_1 & ... & a+x_n \\ p_0 & p_1 & ... & p_n \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

şi:

$$aX : \begin{pmatrix} ax_0 & ax_1 & ... & ax_n \\ p_0 & p_1 & ... & p_n \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Rezultă:

$$M(a+X) = \sum p_i(a+x_i) = a\sum p_i + M(X) = a + M(X)$$

M2)

$$M(aX) = \sum p_i(ax_i) = a\sum p_i x_i.$$

M3) Înmulţim cu p_i relaţia:

$$\inf X \leq x_i \leq \sup X$$

şi însumăm după i.
M3) $X+Y$ are distribuţia:

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ r_{ij} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

cu $r_{ij} = Pr(A_i \cap B_j)$; a se vedea şi Exemplul 5.7 de mai jos. Avem imediat:

$$\begin{cases} \sum_{j\in J} r_{ij} = p_i \\ \sum_{i\in I} r_{ij} = q_j \end{cases} \tag{5.9}$$

Prin urmare:

$$M(X+Y) = \sum_{i\in I}(\sum_{j\in J} r_{ij})x_i + \sum_{j\in J}(\sum_{i\in I} r_{ij})y_j = \sum_{i\in I} p_i x_i + \sum_{j\in J} q_j y_j$$

ceea ce dă concluzia. □

Definiţia 5.4 Momentul *centrat* de ordinul doi:

$$D(X) = M_2(X - \bar{x}) \tag{5.10}$$

se numeşte *dispersia* sau *varianţa* lui X.

Observaţia 5.5 Dispersia, aşa cum îi arată numele, este un indicator al împrăştierii valorilor lui X faţă de valoarea sa medie $\bar{x}$ şi o formulă utilă de calcul este:

$$D(X) = M_2(X) - \bar{x}^2. \tag{5.11}$$

Motivaţia pentru introducere acestui indicator de împrăştiere este aceea că valoarea medie este, în general, insufucientă pentru determinarea unei variabile aleatoare. Astfel, două v. a. simple pot lua acelaşi număr de valori şi pot avea aceeaşi medie, dar, în timp ce una ia valori apropiate mediei, cealaltă ia valori foarte îndepărtate. Avem exemplul următor:

$$X_1 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X_2 : \begin{pmatrix} -1000 & 1000 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ambele cu media nulă.
Demonstraţia formulei (4.9) este imediată:

$$D(X) = M((X-\bar{x})^2) = M(X^2 - 2\bar{x}X + \bar{x}^2) = M(X^2) - 2\bar{x}M(X) + \bar{x}^2 = M(X^2) - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

ceea ce dă concluzia.

Definiţia 5.6 Fie X şi Y două variabile aleatoare. Definim *produsul* lor prin $XY : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$:

$$(XY)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega) \tag{5.12}$$

unde, în membrul drept considerăm produsul numerelor reale $X(\omega)$ şi $Y(\omega)$.

Exemplul 5.7 Presupunem că X şi Y sunt discrete cu:

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I \subset \mathbb{N}}, \quad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j \in J \subset \mathbb{N}}.$$

Deci $p_i = Pr(A_i)$ cu $A_i = \{X = x_i\}$ şi $q_j = Pr(B_j)$ cu $B_j = \{Y = y_j\}$. Atunci:

$$XY : \begin{pmatrix} x_i y_j \\ r_{ij} \end{pmatrix}_{(i \in I, j \in J)} \tag{5.13}$$

cu $r_{ij} = Pr(A_i \cap B_j)$.

Definiţia 5.8 i) Variabilele aleatoare X, Y se numesc *independente* dacă pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem:

$$P(\{X < x\} \cap \{Y < y\}) = P(\{X < x\}) \cdot P(\{Y < y\}). \tag{5.14}$$

ii) Date variabilele aleatoare X, Y numerele reale:

$$C_{XY} = M(XY) - M(X)M(Y) \tag{5.15}$$

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sqrt{D(X)D(Y)}} \tag{5.16}$$

se numesc *covarianţa* (sau *corelaţia*) respectiv *coeficientul de corelaţie* al lor. Dacă $C_{XY} = 0$ spunem că X şi Y sunt *necorelate* iar dacă $C_{XY} \neq 0$ atunci spunem că X şi Y sunt *corelate*.

Propoziţia 5.9 *Dacă X şi Y sunt v. a. independente atunci*:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y). \tag{5.17}$$

Seminarul 5

S5.1 Se cere media şi dispersia variabilei aleatoare binomiale.

Soluţie Să derivăm în raport cu x formula binomului lui Newton:

$$(q + px)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k. \tag{5.18}$$

Obţinem:

$$np(q+px)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k k x^{k-1}. \tag{5.19}$$

Facem $x = 1$ în ultima relaţie şi obţinem:

$$np = \sum_{k=0} k \cdot C_n^k q^{n-k} p^k \tag{5.20}$$

care este exact media variabilei aleatoare binomiale. Deci:

$$M(X) = np. \tag{5.21}$$

Înmulţim (5.19) cu x:

$$np(q+px)^{n-1}x = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} k x^k \tag{5.22}$$

şi derivăm ultima relaţie:

$$n(n-1)p^2(q+px)^{n-2}x + np(q+px)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} k^2 p^k x^{k-1}. \tag{5.23}$$

Înlocuim din nou $x = 1$ şi avem:

$$n(n-1)p^2 + np = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot C_n^k q^{n-k} p^k \tag{5.24}$$

care este exact $M_2(X)$.
Pentru dispersie folosim formula (5.10):

$$D(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np = np(1-p) = npq. \tag{5.25}$$

S5.2 Se aruncă 4 zaruri şi se cere valoarea medie a numărului de puncte obţinute.

Soluţie Deoarece:

$$M(zar) = \frac{1}{6}(1+2+...+6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2} \tag{5.26}$$

rezultă că pentru n zaruri avem:

$$M(n \quad zaruri) = \frac{7n}{2}. \tag{5.27}$$

În cazul $n = 4$ obţinem: $M = 14$. □

S5.3 Se aruncă 4 zaruri şi se cere valoarea medie a produsului numărului de puncte ce apar.

Soluţie Fie X_i numărul de puncte de la zarul $i \in \{1,2,3,4\}$. Aceste v. a. sunt independente şi deci:

$$M(X_1X_2X_3X_4) = M(X_1)M(X_2)M(X_3)M(X_4) = \left(\frac{7}{2}\right)^4 = \frac{2401}{16}.$$

S5.4 Se cere media şi dispersia variabilei aleatoare de tip Poisson cu parametrul $\lambda \in (0, +\infty)$.

Soluţie Avem:

$$M(X) = \sum_{k \geq 0} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda. \tag{5.28}$$

$$M_2(X) = \sum_{k \geq 0} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k \geq 1} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{p \geq 0} (p+1) \frac{\lambda^p}{p!}.$$

Deci:

$$M_2(X) = \lambda e^{-\lambda} (\sum_{p \geq 1} \frac{\lambda^p}{(p-1)!} + \sum_{p \geq 0} \frac{\lambda^p}{p!}) = \lambda e^{-\lambda} \cdot (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda(\lambda + 1). \tag{5.29}$$

Rezultă:

$$D(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \tag{5.30}$$

S5.5 Se cere media şi dispersia variabilei aleatoare de tip normal $N(\mu, \sigma)$.

Soluţie Valoare medie este:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m) \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]dx + \frac{m}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]dx.$$

În prima integrală facem schimbarea de variabilă $x - m = t$ şi obţinem:

$$I_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp[-\frac{t^2}{2\sigma^2}]dt = 0$$

deoarece funcţia de sub integrală este impară: $F(-t) = -F(t)$. Pentru a doua integrală facem schimbarea de variabilă: $x - m = \sigma\sqrt{2\pi} \cdot t$ şi avem:

$$I_2 = \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma\sqrt{2} e^{-t^2} dt = \mu$$

deoarece:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \tag{5.31}$$

În concluzie:

$$M(X) = \mu. \tag{5.32}$$

Să observăm că:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\sigma\sqrt{2\pi}} = 1 \tag{5.32}$$

ceea ce confirmă buna definire a variabilei aleatoare normale.

Pentru calculul dispersiei:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \rho(x) dx$$

vom integra prin părţi:

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}[-\sigma^2(x-\mu)\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})|_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})dx].$$

Primul termen este nul din nou din motive de (im)paritate iar integrala a fost calculată deja. În concluzie:

$$D(X) = \sigma^2. \tag{5.32}$$

Vedem astfel motivaţia pentru notaţia $N(\mu, \sigma)$. □

Dacă X şi Y sunt independente atunci ele sunt necorelate. Reciproca nu este adevărată după cum o arată exerciţiul următor:

S5.6 Se cere covarianţa următoarelor v. a.:

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad Y : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Soluţie Avem $M(X) = M(Y) = 0$. Produsul XY ia valorile $z_{ij} = x_1 y_j$ cu:

$$\begin{cases} z_{11} = 2, z_{21} = 1, z_{31} = -1, z_{41} = -2 \\ z_{12} = -2, z_{22} = -1, z_{32} = 1, z_{42} = 2. \end{cases}$$

Avem probabilităţile:

$$\begin{cases} r_{11} = 0, r_{21} = \frac{1}{4}, r_{31} = \frac{1}{4}, r_{41} = 0 \\ r_{12} = \frac{1}{4}, r_{22} = 0, r_{32} = 0, r_{42} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Deci:

$$XY : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că $M(XY) = 0 = M(X)M(Y)$ şi deci $C_{XY} = 0$. Avem şi $p_i q_j = \frac{1}{8} \neq r_{ij}$ pentru unele valori ale indicilor i, j. Deci cele două variabile aleatoare sunt necorelate dar nu sunt independente. □

Chapter 6

Teoria deciziilor

Fixăm A o mulţime nevidă ale cărei elemente "a" le numim *acţiuni* şi Ω o altă mulţime nevidă numită *spaţiul parametrilor*. Fie $\mathscr{F}_\Omega$ o σ-algebră pe Ω.

Definiţia 6.1 Aplicaţia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o numim *$\mathscr{F}$-măsurabilă* dacă pentru orice $r \in \mathbb{R}$ avem:

$$\{X < r\} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) < r\} \in \mathscr{F}_\Omega. \tag{6.1}$$

Observaţia 6.2 Comparând relaţia anterioara cu relaţia (3.5) din Cursul 3 observăm că sunt identice. Deci o variabilă aleatoare este exact o funcţie $\mathscr{F}_\Omega$-măsurabilă.

Definiţia 6.3 Numim *funcţie pierdere* o funcţie $Pierd : \Omega \times A \to \mathbb{R}_+$.

În exemplele care urmează $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ şi atunci $\mathscr{F}_\Omega = \mathscr{B}(m) \cap \Omega$.

Exemple 6.4
1) *pierdere eroare-pătratică*: $A = \Omega \subseteq \mathbb{R}$

$$Pierd(\omega, a) = \rho(\omega - a)^2 \tag{6.2}$$

cu $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ fixat.
2) *pierdere eroare-pătratică ponderată*: $A = \Omega \subseteq \mathbb{R}$

$$Pierd(\omega, a) = \rho(\omega)(\omega - a)^2 \tag{6.3}$$

cu $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{F}_\Omega$-măsurabilă.
3) *pierdere liniară* $A = \Omega \subseteq \mathbb{R}$

$$Pierd(\omega, a) = \begin{cases} \rho_1(\omega - a), & \omega \geq a \\ \rho_2(a - \omega), & \omega < a \end{cases} \tag{6.4}$$

cu ρ_1, ρ_2 numere reale pozitive.
4) *pierdere liniară ponderată* ca mai sus dar cu $\rho_1, \rho_2 : \Omega \to (0, +\infty)$, $\mathscr{F}_\omega$-măsurabilă.
5) *pierdere eroare-absolută*: $A = \Omega \subseteq \mathbb{R}$

$$Pierd(\omega, a) = \rho|\omega - a| \tag{6.5}$$

cu $\rho > 0$.
6) *pierderea* $c_1 - c_2$: $A = \{a_1, a_2\}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ cu $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$

$$Pierd(\omega, a_i) = \begin{cases} c_1, & \omega \in \Omega_i \\ c_2, & \omega \in \Omega_j \end{cases} \tag{6.6}$$

cu $i \neq j$.

Fie $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă numită *spaţiul de selecţie* şi σ-algebra $\mathscr{F}_{\mathscr{X}} = \mathscr{B}(n) \cap \mathscr{X}$.

Definiţia 6.5 Numim *problemă de decizie* un ansamblu $(A, \Omega, \mathscr{X}, X)$ cu $X : \Omega \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ aşa încât pentru orice $\omega \in \Omega$ aplicaţia $X(\omega, \cdot) : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ este $\mathscr{F}_{\mathscr{X}}$-măsurabilă i.e. pentru orice $F \in \mathscr{F}_{\mathscr{X}}$ avem:

$$\{x \in \mathscr{X} : X(x) \in F\} \in \mathscr{F}_{\mathscr{X}}. \tag{6.7}$$

Fie $g : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ ce este $\mathscr{F}_{\mathscr{X}}$-măsurabilă şi $\omega \in \Omega$ fixat. Putem defini *media g-ponderată* a lui $X(\omega, .)$ la fel ca în Cursul precedent:

$$M(g(X(\omega, \cdot))) := \begin{cases} \sum_{x \in \mathscr{X}} g(x) X(\omega, x) & X(\omega, \cdot) \text{ este discretă} \\ \int_{\mathscr{X}} g(x) \rho(\omega, x) dx & X(\omega, \cdot) \text{ este continuă cu densitatea de repartiţie } \rho(\omega, \cdot). \end{cases} \tag{6.8}$$

Definiţia 6.6 O funcţie $d : \mathscr{X} \to A$ ce este $\mathscr{F}_{\mathscr{X}}$-măsurabilă o numim *funcţie de decizie* sau *regulă de decizie*. Fie $\mathscr{D}$ mulţimea regulilor de decizie pentru problema de decizie dată.

Am ajuns astfel la noţiunea centrală întregului Curs şi anume *riscul* unei decizii:

Definiţia 6.7 *Funcţia risc* a problemei de decizie $(A, \Omega, \mathscr{X}, X)$ este $R : \Omega \times \mathscr{D} \to \mathbb{R}$:

$$R(\omega, d) = M(Pierd(\omega, d \circ X(\omega, \cdot))) \tag{6.9}$$

Deci riscul este o medie a pierderilor asociatei unei perechi (parametru ω, decizie a), parametrul ω fiind luat în cosiderare pentru adoptarea deciziei a din mulţimea A a tuturor deciziilor.

Exemplul 6.8 (*Acceptarea unui lot de produse*)
O firmă produce un tip de produse şi vrem să decidem dacă acceptăm sau nu un lot de astfel de n produse. Fie ω probabilitatea de a găsi un produs defect. Există $\omega_0 \in (0, 1]$, numit *prag de acceptare-respingere*, astfel încât:
-dacă $\omega \leq \omega_0$ facem acţiunea a_1=acceptăm,
-dacă $\omega > \omega_0$ facem acţiunea a_2=respingem.
În practică $\omega_0 = 0,05$ adică acceptăm cel mult 5 produse defecte. Avem $A = \{a_1, a_2\}$, $\mathscr{X} = \{0, ..., n\}$ şi $X = X(\omega, x)$ va da numărul de produse defecte din lotul de $x \in \mathscr{X}$ cu probabilitatea ω. Avem că $X(\omega, \cdot)$ este continuă cu densitatea de tip binomial:

$$\rho(\omega, x) = C_n^x \omega^x (1 - \omega)^{n-x}. \tag{6.10}$$

Fixăm $\rho > 0$ un coeficient de *calibrare* iar funcţia pierdere va fi:

$$Pierd(\omega, a_1) = \begin{cases} 0 & \omega \leq \omega_0 \\ \rho(\omega - \omega_0) & \omega > \omega_0 \end{cases} \tag{6.11}$$

$$Pierd(\omega, a_2) = \begin{cases} \rho(\omega_0 - \omega) & \omega \leq \omega_0 \\ 0 \omega > \omega_0. \end{cases} \tag{6.12}$$

Funcţia decizie este $d : \mathscr{X} = \{0, ..., n\} \to A = \{a_1, a_2\}$:

$$d(x) = \begin{cases} a_1 & \frac{x}{n} \leq \omega_0 \\ a_2 & \frac{x}{n} > \omega_0. \end{cases} \tag{6.13}$$

Atunci funcţia risc devine:

$$R(\omega, d) = \sum_{x=0}^{n} Pierd(\omega, d(x))\rho(\omega, x) \tag{6.14}$$

şi are expresia finală:

$$R(\omega, d) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathscr{X}, n\omega_0 \leq x \leq n} \rho(\omega_0 - \omega) C_n^x \omega^x (1-\omega)^{n-x} & \omega \leq \omega_0 \\ \sum_{x \in \mathscr{X}, 1 \leq x \leq n\omega_0} \rho(\omega_0 - \omega) C_n^x \omega^x (1-\omega)^{n-x} & \omega > \omega_0. \end{cases} \tag{6.15}$$

Exemplul 6.9 O firmă doreşte să-şi modernizeze fluxul tehnologic şi epntru aceasta este necesară achiziţionarea a 10 dispozitive automate de prelucrare a unor piese. Dintre acestea, un număr de ω vor avea o durată de funcţionare de 10.000 de ore fără reparaţii majore, durată ce aduce un beneficiu de k_1 lei. Pentru celelalte $10 - \omega$ dispozitive ce au suferit defecţiuni importante pe durata funcţionării de 10.000, firma va suporta cheltuieli de k_2 lei.

Pentru achiziţionarea acestor 10 dispozitive firma are la dispoziţie un timp pentru a testa unul singur. Dacă acest dispozitiv funcţionează la anumiţi parametri atunci testul este considerat satisfăcător şi dispozitivele sunt achiziţionate. În caz contrar, nu se acceptă aceste dispozitive. Cheltuielile pentru acest test sunt de k_3 lei.

Avem din nou $A = \{a_1, a_2\}$ cu a_1= acceptare iar a_2= respingere; avem $\Omega = \{0, ..., 10\}$. Fie $\mathscr{X} = \{x_1, x_2\}$ cu:
-x_1 corespunde unui rezultat satisfăcător la test,
-x_2 corespunde unui rezultat nesatisfăcător la test.
X are densitatea:

$$\begin{cases} \rho(\omega, x_1) = \frac{\omega}{10} \\ \rho(\omega, x_2) = 1 - \frac{\omega}{10}. \end{cases} \tag{6.16}$$

Funcţia pierdere are expresia:

$$\begin{cases} Pierd(\omega, a_1) = k_3 - \omega k_1 + (10 - \omega)k_2 \\ Pierd(\omega, a_2) = k_3. \end{cases} \tag{6.17}$$

Funcţiile de decizie $d : \mathscr{X} = \{x_1, x_2\} \to \{a_1, a_2\}$ sunt în număr de patru:

$$d_1(x) = a_1, \forall x \in \mathscr{X}$$

$$d_2(x) = \begin{cases} a_1 & x = x_1 \\ a_2 & x = x_2 \end{cases}$$

$$d_3(x) = \begin{cases} a_2 & x = x_1 \\ a_1 & x = x_2 \end{cases}$$

$$d_4(x) = a_2, \forall x \in \mathscr{X}. \tag{6.18}$$

Observăm că d_1 şi d_4 ignoră rezultatul testului; astfel d_1 acceptă lotul în orice condiţii iar d_4 îl respinge indiferent de rezultatul testului. O astfel de situaţie este posibilă; spre exemplu firmei i se oferă un contract mai avantajos, prin care se acoperă şi cheltuielile efectuării testului.

Pentru un parametru ω dat, riscul asociat funcţiilor de decizie considerate este:

$$R(\omega, d) = Pierd(\omega, d(x_1))\rho(\omega, x_1) + Pierd(\omega, d(x_2))\rho(\omega, x_2) \tag{6.19}$$

care devine, în fiecare din cele patru cazuri particulare:

$$R(\omega, d_1) = k_3 - \omega k_1 + (10 - \omega)k_2$$

$$R(\omega, d_2) = \frac{\omega}{10}[k_3 - \omega k_1 + (10 - \omega)k_2] + \left(1 - \frac{\omega}{10}\right) k_3$$

$$R(\omega, d_3) = \frac{\omega}{10}k_3 + \left(1 + \frac{\omega}{10}\right) [k_3 - \omega k_1 + (10 - \omega)k_3]$$

$$R(\omega, d_4) = k_3. \tag{6.19}$$

Seminar 6 Diagrama *pie* afişează procentul cu care fiecare element al unui vector (sau matrice) contribuie la suma elementelor structurii.

S6.1 Să se figureze fenomenele echiprobabile $\bar{p}_n = (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$ (vezi Cursul 1) pentru $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soluţie Programul MATLAB:

```
>>x=[1 1];
>>pie(x) (+Enter)
```

dă:

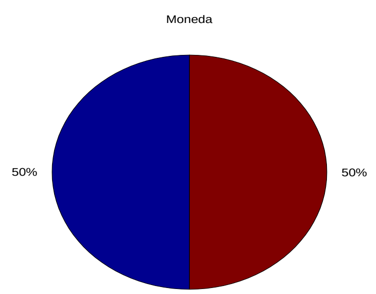

Figura 6.1

Analog avem:

```
>>x=[1 1 1];
>>pie(x) (+Enter)
```

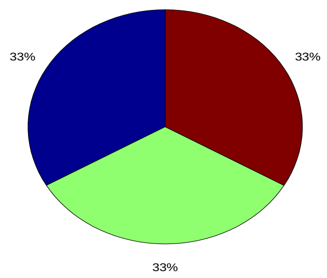

Figura 6.2

```
>>x=[1 1 1 1];
>>pie(x) (+Enter)
```

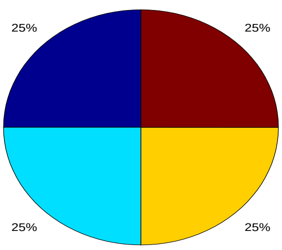

Figura 6.3

```
>>x=[1 1 1 1 1];
>>pie(x) (+Enter)
```

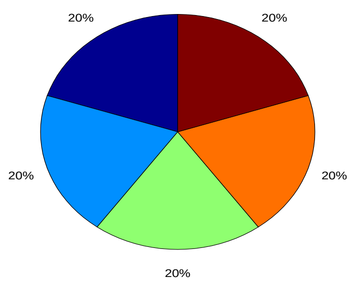

Figura 6.4

```
>>x=[1 1 1 1 1 1];
>>pie(x) (+Enter)
```

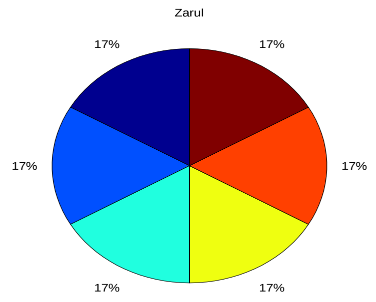

Figura 6.5

Putem utiliza şi *pie*3(.) pentru o reprezentare spaţială:

```
>>x=[1 1];
>>pie3(x) (+Enter)
```

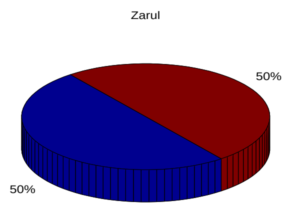

Figura 6.6

```
>>x=[1 1 1];
>>pie3(x) (+Enter)
```

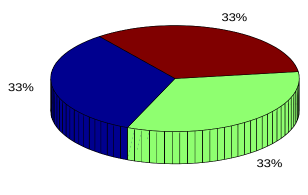

Figura 6.7

```
>>x=[1 1 1 1];
>>pie3(x) (+Enter)
```

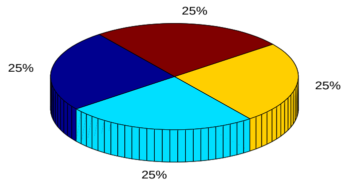

Figura 6.8

```
>>x=[1 1 1 1 1];
>>pie3(x) (+Enter)
```

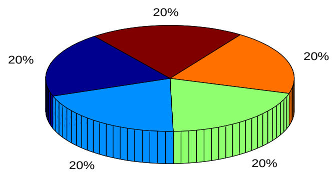

Figura 6.9

```
>>x=[1 1 1 1 1 1];
>>pie3(x) (+Enter)
```

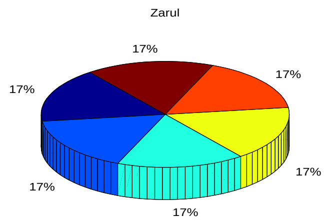

Figura 6.10

S6.2 Să se figureze cu *pie* variabila aleatoare dată de Exerciţiul 3.3

Soluţie Înmulţim cu 8 ultima linie pentru a norma această variabilă aleatoare şi avem: $x = (1, 2, 1, 4)$.

```
>>x=[1 2 1 4];
>>pie(x) (+Enter)
```

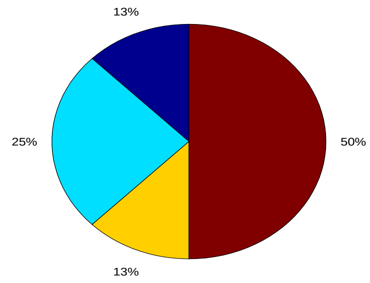

Figura 6.11

```
>>x=[1 2 1 4];
>>pie3(x) (+Enter)
```

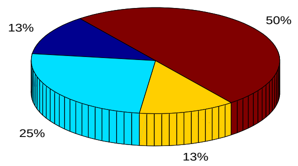

Figura 6.12

S6.3 Se dau variabilele aleatoare independente:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p+\frac{1}{6} & q+\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 2p-q & 12p^2 \end{pmatrix}.$$

Se cere distribuţia lui XY.

Soluţie Să determinăm mai întâi p şi q punând condiţia ca suma elemetelor din linia inferioară să fie 1:

$$\begin{cases} p+\frac{1}{6}+q+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1 \\ \frac{1}{3}+2p-q+12p^2=1. \end{cases}$$

Avem deci sistemul:

$$\begin{cases} p+q=\frac{1}{6} \\ 2p-q+12p^2=\frac{2}{3} \end{cases}$$

şi prin adunarea celor două ecuaţii avem:

$$3p+12p^2=\frac{5}{6}.$$

Putem scrie:

$$p^2+\frac{1}{4}p-\frac{5}{72}=0$$

care are discriminantul:

$$\Delta = \frac{1}{16} + \frac{5}{18} = \frac{18+80}{16 \cdot 18} = \frac{98}{16 \cdot 18} = \frac{49}{16 \cdot 9} = \left(\frac{7}{12}\right)^2.$$

Rezultă soluţiile:

$$p_1 = \frac{1}{2}(-\frac{1}{4} - \frac{7}{12})$$

impsibilă respectiv:

$$p_2 = p = \frac{1}{2}(-\frac{1}{4} + \frac{7}{12}) = \frac{4}{12 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

la care corespunde $q = 0$. Deci:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

V. a. XY ia valorile -1, 0 şi 1. Avem: $\{XY = -1\} = \{X = 1; Y = -1\} \cup \{X = -1; Y = 1\}$ şi deci:

$$P(XY = -1) = P(X = 1; Y = -1) + P(X = -1; Y = 1) =$$

$$= P(X = 1) \cdot P(Y = -1) + P(X = -1) \cdot P(Y = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Analog:

$$P(XY = 1) = \frac{2}{9}$$

şi deci:

$$P(XY = 0) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

În concluzie:

$$XY : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

S6.4 Se dau v. a. independente de la exerciţiul anterior. Se cere $X^2 + Y^2$.

Soluţie Avem:

$$X^2 = Y^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

şi deci v. a. ia valorile 0, 1 şi 2. Deoarece X^2 şi Y^2 sunt independente avem:

$$X^2 + Y^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

S6.5 Se cer numerele reale a, b, c aşa încât următoarea funcţie să fie o funcţie de repartiţie continuă:

$$F(x) = \begin{cases} a & x \in (-\infty, 0]) \\ bx^2 & x \in (0, 1] \\ c & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Soluţie Din FR2), Cursul 4, avem: $0 = \lim_{x \to -\infty} F(x) = a$ şi $1 = \lim_{x \to +\infty} F(x) = c$. Din continuitatea în $x = 1$ avem: $F(1) = b = lim_{x \searrow 1} F(x) = c = 1$. $\square$

Chapter 7

Invarianţă în teoria deciziilor

Fie problema de decizie $(A, \Omega, \mathscr{X}, X)$ şi $S(\mathscr{X})$ mulţimea funcţiilor bijective pe $\mathscr{X}$ i.e. elementele lui $S(\mathscr{X})$ sunt funcţii $g : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ bijective.

Propoziţia 7.1 *$S(\mathscr{X})$ este grup relativ la compunerea funcţiilor.*

Definiţia 7.2 $S(\mathscr{X})$ se numeşte *grupul bijecţiilor* lui $\mathscr{X}$ sau încă *grupul simetric* al lui $\mathscr{X}$. O funcţie $g \in S(\mathscr{X})$ o numim *transformare a lui* $\mathscr{X}$ sau *pe* $\mathscr{X}$.

Fixăm $G \subset S(\mathscr{X})$ un subgrup; deci G este submulţime nevidă (conţine măcar funcţia identică $1_{\mathscr{X}}$) cu proprietăţile:
sg1) dacă $g_1 \in G$ şi $g_2 \in G$ atunci $g_2 \circ g_1 \in G$.
sg2) dacă $g \in G$ atunci şi inversa g^{-1} aparţine lui G.
Vom mai presupune că orice $g \in G$ este transformare *bimăsurabilă* în sensul că pentru orice $B \in \mathscr{F}_{\mathscr{X}}$ avem $g(B) \in \mathscr{F}_{\mathscr{X}}$ şi $g^{-1}(B) \in \mathscr{F}_{\mathscr{X}}$. Cum compunerea de aplicaţii măsurabile este măsurabilă rezultă căpentru orice $\omega \in \Omega$ aplicaţia $g(X(\omega, .)) : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ este $\mathscr{F}_{\mathscr{X}}$-măsurabilă.

Definiţia 7.3 Aplicaţia $X : \Omega \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ o numim *G-invariantă* dacă pentru orice $g \in G$ şi orice $\omega \in \Omega$ există şi este unic $om\bar{e}ga \in \Omega$ astfel încât dacă $X(\omega, .)$ are distribuţia de probabilitate $P(\omega)$ atunci $g(X(\omega, .))$ are distribuţia $P(\bar{\omega})$.

În limbajul densităţilor de probabilitate avem că dacă $X(\omega, x)$ are distribuţia $\rho(\omega, x)$ atunci $g(X(\omega, x))$ are distribuţia $\rho(\bar{\omega}, y = gx)$. Notăm $\bar{\omega} = \bar{g}(\omega)$. Rezultă invarianţa mediei:

$$M(h \circ g(X(\omega, .))) = M(h \circ X(\bar{g}(\omega), .))$$

şi faptul că pentru $g \in G$ fixam avem că $\bar{g}(\omega)$ este o funcţie de ω. Putem deci considere $\bar{G} = \{\bar{g}; g \in G\}$ ca submulţime în $F(\Omega) = \{f : \Omega \to \Omega\}$=mulţimea tuturor funcţiilor de la Ω la Ω.

Propoziţia 7.4 *$\bar{G}$ este subgrup în $S(\Omega)$.*

Elementul neutru din $\bar{G}$ este $\bar{e} = 1_\Omega : \omega\Omega \to \omega$ corespunzător elementului neutru $e = 1_{\mathscr{X}} : x \in \mathscr{X} \to x$.

Presupunem că funcţia pierdere satisface proprietatea: $Pierd(\omega, a_1) = Pierd(\omega, a_2)$ pentru orice $\omega \in \Omega$ implică $a_1 = a_2$. Această presupunere este naturală în sensul că având aceleaşi pierderi pentru orice parametru ω e clar că cele două acţiuni a_1, a_2 sunt echivalente.

Definiţia 7.5 i) Functia pierdere este *G-invariantă* dacă pentru orice $g \in G$ şi orice $a \in A$ există şi este unic $\tilde{a} \in A$ astfel ca: $Pierd(\omega, a) = Pierd(\omega, \bar{g}(\omega), \tilde{a})$ pentru orice $\omega \in \Omega$.
ii) Problema de decizie dată este *G-invariantă* dacă X şi $Pierd$ sunt G-invariante.

Mai notăm $\tilde{a} = \tilde{g}(a)$ şi obţinem $\tilde{G} = \{\tilde{g}; g \in G\}$ ca submulţiem în $F(A)$. Avem ca mai sus:

Propoziţia 7.5 *$\tilde{G}$ este subgrup în $S(A)$.*

O observaţie importantă este că pentru o problemă de decizie G-invariantă avem:

$$Pierd(\omega, a) = Pierd(\bar{g}(\omega), \tilde{g}(\omega)) \tag{7.1}$$

pentru orice $\omega \in \Omega$. Relativ la funcţii de decizie avem următoarea noţiune de invarianţă:

Definiţia 7.6 Considerăm că problema de decizie dată este G-invariantă şi fie $d \in \mathscr{D}$ o regulă de decizie. Spunem atunci că d este *G-invariantă* dacă pentru orice $x \in \mathscr{X}$ şi orice $g \in G$ avem:

$$d(g(x)) = \tilde{g}(d(x)). \tag{7.2}$$

Vom nota cu $\mathscr{D}(G)$ mulţimea funcţiilor de decizie G-invariante.

Definiţia 7.7 Considerăm că problema de decizie dată este G-invariantă şi fie parametrii $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$. Spunem că ω_1 şi ω_2 sunt *echivalenţi* dacă există $g \in G$ aşa încât $\omega_2 = \bar{g}(\omega_1)$.

Obţinem astfel o relaţie de echivalenţă pe spaţiul Ω al parametrilor. O clasă de echivalenţă se va numi *orbită*. Următorul rezultat este central în acest Curs şi spune în esenţă că pentru funcţiile de decizie G-invariante funcţia rsic este invariantă pe orbită:

Teorema 7.8 *Considerăm că problema de decizie dată este G-invariantă şi fie $d \in \mathscr{D}(G)$. Atunci pentru orice $\omega \in \Omega$ avem:*

$$R(\omega, d) = R(\bar{g}(\omega), d). \tag{7.3}$$

Cazul particular de constanţă totală a riscului merită menţionat.

Definiţia 7.9 Grupul $\bar{G}$ se numeşte *tranzitiv* dacă există $\omega_0 \in \Omega$ astfel încât întreg Ω este orbita lui ω_0.

Prin urmare, în cazul $\bar{G}$ tranzitiv, avem o singură orbită iar din Teorema avem că riscul asociat la orice funcţie de decizie este acelaşi indiferent de parametrii din Ω. O funcţie de decizie invariantă care minimizează acest risc constant se numeşte *cea mai bună funcţie de decizie invariantă*.

Exemplul 7.10 Fie $A = \Omega = (0, +\infty)$ şi $\{P(\omega); \omega \in \Omega\}$ familia distribuţiilor exponentiale de parametru ω. Fie funcţia pierdere"

$$Pierd(\omega, a) = (a - a\omega)^2. \tag{7.4}$$

Fie $G = g_c; c \in (0, +\infty)$ *grupul transformărilor de scală* ale dreptei reale i.e. $g_c : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $g_c(x) = cx$. Se observă că $\bar{G}$ este tranzitiv.

Avem că această problemă de decizie este invariantă iar o funcţie de decizie va fi invariantă dacă $d(cx) = cd(x)$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$. Ultima egalitate este o *ecuaţie funcţională* adică o ecuaţie având ca necunoscută o funcţie.

Soluţia acestei ecuaţii funcţionale este: $d(x) = \lambda x$ cu $\lambda > 0$. Funcţia risc pentru această decizie este:

$$R(\omega, d) = M(1 - \omega d(X(\omega, .))^2) = M(1 - \lambda\omega X(\omega))^2 = 1 - 2\lambda + 2\lambda^2. \tag{7.5}$$

Derivăm această funcţie risc şi egalăm cu zero derivata pentru a-i afla minimul.

$$\frac{dR}{d\lambda} = 4\lambda - 2 = 0$$

şi prin urmare cea mai bună decizie invariantă este $d_0(x) = \frac{x}{2}$ iar riscul corespunzator este: $R(\omega, d_0) = 1 - 1 + \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Seminar 7

S7.1 (**Exemplu de v. a. numărabilă**) Se aruncă un zar şi fie X numărul de aruncări efectuate până apare cifra 1. Se cere distribuţia lui X.

Soluţie X poate lua orice valoare 1, 2, 3, ... Să calculăm probabilitatea $p_k = P(X = k)$. Avem $p_1 = P(X = 1) = \frac{1}{6}$. $p_2 = P(X = 2)$ este probabilitatea ca la prima aruncare să nu iasă faţa 1 combinată cu probabilitatea ca la aruncarea a doua să iasă faţa 1. Avem deci $p_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$. Analog $p_3 = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$. Rezultă că pentru cazul general avem:

$$p_k = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

iar distribuţia este:

$$X : \begin{pmatrix} k \in \mathbb{N}^* \\ \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Cazul general: v. a. a primei realizări Fie o experienţă şi un eveniment A legat de această experienţă şi care se realizează cu probabilitatea p. Fie X numărul de efectuări ale experienţei până la prima realizare a lui A. Avem:

$$X : \begin{pmatrix} k \in \mathbb{N}^* \\ q^{k-1}p \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

cu $q = 1 - p$.

Avem că:

$$1 + q + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \tag{7.6}$$

şi deci suma elementelor din linia inferioară a lui (6.5) este: $p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$ deoarece $lim_{n \to +\infty} q^n = 0$, q fiind un număr subunitar.

S7.2 Se cer numerele reale a, b, c aşa încât următoarea funcţie să fie o funcţie de repartiţie continuă:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(a-2b)x^3}{x^3+1} & x \le 0 \\ c \sin x & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{(a+b-2)x^2-1}{x^2-1} & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Soluţie Din FR2), Cursul 4, avem: $0 = \lim_{x \to -\infty} F(x) = a - b$ şi $1 = \lim_{x \to +\infty} F(x) = a + b - 2$. Avem un sistem în necunoscutele a şi b cu soluţia: $a = 1$, $b = 1$, obţinută înlocuind

$a = 2b$ în a doua ecuaţie.
Din continuitatea în $x = \frac{\pi}{2}$ avem: $F(\frac{\pi}{2}) = c = lim_{x \searrow 1} F(x) = 1$. $\square$

S7.3 Se cere $a \in \mathbb{R}$ astfel ca funcţia următoare să fie o densitate de repartiţie:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [0,1] \\ 2ax & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Soluţie Folosim D2) din Cursul 4:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = \int_0^1 \rho(x)dx = ax^2|_0^1 = a.$$

S7.4 Se dă v. a. X cu densitatea:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda e^{-2x} & x > 0. \end{cases}$$

Se cere $P(X > 3)$.

Soluţie Determinăm λ din aceeaşi condiţie D2):

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-2x} dx = \frac{\lambda}{-2} e^{-2x}|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{-2}(e^{-infty} - e^0) = \frac{\lambda}{2}$$

de unde rezultă $\lambda = 2$.
Avem atunci:

$$P(X > 3) = P(3 < X < +\infty) = \int_3^{+\infty} 2e^{-2x} dx = -e^{-2x}|_3^{+\infty} = e^{-6} - 0 = \frac{1}{e^6}.$$

Chapter 8

Utilitate şi pierdere

Reamintim că am notat cu $\mathscr{D}$ mulţimea deciziilor asociate unei probleme de decizie.

Definiţia 8.1 Fie deciziile $d_1, d_2 \in \mathscr{D}$. Spunem că:
1) d_1 *domină* d_2 sau că d_1 *este mai bună decât* d_2 şi notăm $d_1 > d_2$ dacă: $R(\omega, d_1) \leq R(\omega, d_2)$ pentru orice $\omega \in \Omega$ cu inegalitate strictă pentru cel puţin un parametru ω.
2) d_1 *este cel puţin tot aşa de bună ca şi* d_2 şi notăm $d_1 \geq d_2$ dacă: $R(\omega, d_1) \leq R(\omega, d_2)$ pentru orice $\omega \in \Omega$.
3) d_1 şi d_2 sunt *echivalente* şi notăm d_1 d_2 dacă: $R(\omega, d_1) = R(\omega, d_2)$ pentru orice $\omega \in \Omega$.

Relaţiile 1) şi 2) sunt de ordine iar 3) este o relaţie de echivalenţă.

Fie C mulţimea consecinţelor unei decizii luate. Fie $u : C \to \mathbb{R}$ o funcţie de "cuantificare" a acestor consecinţe. Dacă avem o probabilitate P pe C atunci "valoarea" unei consecinţe este media $M(u(c))$, care pentru orice P defineşte o funcţie utilitate.

Fie deci $\mathscr{P}(C)$ mulţimea tuturor distribuţiilor de probabilitate *simple* pe C. Pentru o consecinţă fixată $c \in C$ notăm cu $< c >$ distribuţia de probabilitate care asociază valoarea 1 mulţimii $\{c\}$ şi 0 în rest.

Definiţia 8.2 Fie $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(C)$. Spunem că:
u1) p_2 *este preferat faţă de* p_1 şi notăm $p_1 < p_2$ dacă: $M_{p_1}(u(c)) < M_{p_2}(u(c))$ unde M_p înseamnă media în raport cu probabilitatea p.
u2) Notăm $p_1 \leq p_2$ dacă p_1 nu este preferat facţă de p_2.
u3) Notăm p_1 p_2 dacă p_1 şi p_2 sunt *echivalente*.

Să observăm că $\mathscr{P}(C)$ este *o mulţime convexă*: dacă $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(C)$ şi $\alpha \in [0,1]$ atunci avem următorul element $p = \alpha p_1 + (1-\alpha)p_2$ în $\mathscr{P}(C)$ definit de: $p(C') = \alpha p_1(C') + (1-\alpha)p_2(C')$ pentru orice $C' \subseteq C$. În particular, dacă $c_1, c_2 \in C$ atunci $\alpha < c_1 > +(1-\alpha) < c_2 >$ este o distribuţie de probabilitate.

Fixăm o mulţime nevidă M.

Definiţia 8.3 Numim *mixtură* o pereche (M, m) cu $m : [0,1] \times M \times M \to M$ satisfăcând:
M1) $m(1, P, Q) = P$,
M2) $m(\alpha, P, Q) = m(1-\alpha, Q, P)$,
M3) $m(\alpha, m(\beta, P, Q), Q) = m(\alpha\beta, P, Q)$.

Vom mai nota $m(\alpha, P, Q)$ prin $\alpha P + (1-\alpha)Q$. Avem atunci:
m1) $1P + 0Q = P$,

m2) $\alpha P + (1-\alpha)Q = (1-\alpha)Q + \alpha P$,
m3) $\alpha[\beta P + (1-\beta)Q] + (1-\alpha)Q = \alpha\beta P + (1-\alpha\beta)Q$.

Propoziţia 8.4 *Fie* (M, m) *o mixtură. Atunci*:
m4) $\alpha P + (1-\alpha)P = P$,
m5) $\alpha[\beta Q+(1-\beta)R]+(1-\alpha)[\gamma Q+(1-\gamma)R] = [\alpha\beta+(1-\alpha)\gamma]Q+[\alpha(1-\beta)+(1-\alpha)(1-\gamma)]R$.

Demonstraţie m4)
$\alpha P+(1-\alpha)P = \alpha[1P+0P]+(1-\alpha)P = \alpha[0P+1P]+(1-\alpha)P = 0P+1P = 1P+0P = P$.
m5) Presupunem că $\beta \leq \gamma$.
$[\alpha\beta+(1-\alpha)\gamma]Q+[\alpha(1-\beta)+(1-\alpha)(1-\gamma)]R = [\frac{\alpha\beta}{\gamma}+(1-\alpha)\gamma]Q+1-[\frac{\alpha\beta}{\gamma}+(1-\alpha)]\gamma R =$
$= [\frac{\alpha\beta}{\gamma}+(1-\alpha)][\gamma Q+(1-\gamma)R]+[1-\frac{\alpha\beta}{\gamma}-(1-\alpha)]R =$
$= \alpha(1-\frac{\beta}{\gamma})R+[1-\alpha(1-\frac{\beta}{\gamma})][\gamma Q+(1-\gamma)R] = \alpha\frac{\beta}{\gamma}[\gamma Q+(1-\gamma)R]+(1-\frac{\beta}{\gamma})R+(1-\alpha)[\gamma Q+$ $(1-\gamma)R] = \alpha[\beta Q+(1-\beta)R]+(1-\alpha)[\gamma Q+(1-\gamma)R]$.
Demonstraţia a fost realizată în ipoteza $\gamma \neq 0$. Dacă $\gamma = 0$ atunci relaţia cerută este imediată.
$\square$

Definiţia 8.5 Fie $\leq$ o relaţie binară pe M. Pentru $P, Q \in M$ definim $P < Q$ dacă $P \leq Q$ dar nu avem $Q \leq P$. Definim P Q dacă $P \leq Q$ şi $Q \leq P$.

Vom considera următoarele axiome:
a1) $\leq$ este o ordine slabă i.e. este tranzitivă şi completă.
a2) Dacă $\alpha \in (0, 1]$ şi $P < Q$ atunci $\alpha P + (1-\alpha)R < \alpha Q + (1-\alpha)R$.
a3) Dacă $P < Q < R$ atunci există $\alpha, \beta \in (0, 1)$ aşa încât: $\alpha P+(1-\alpha)R < Q < \beta P+(1-\beta)R$.

Propoziţia 8.6 *Dacă avem* a_1, a_2 *şi* a_3 *atunci*:
i1) *dacă* $P < Q$ *şi* $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ *atunci* $\beta P + (1-\beta)Q < \alpha P + (1-\alpha)Q$.
i2) *dacă* $P \leq Q$, $Q \leq R$ *şi* $P < R$ *atunci există* $\alpha \in [0, 1]$ *unic aşa încât* Q $\alpha P + (1-\alpha)R$.
i3) *dacă* $P < Q$, $R < S$ *şi* $\alpha \in [0, 1]$ *atunci* $\alpha P + (1-\alpha)R < \alpha Q + (1-\alpha)S$.
i4) *dacă* P Q *şi* $\alpha \in [0, 1]$ *atunci* $\alpha P + (1-\alpha)Q$ P.
i5) *dacă* P Q *şi* $\alpha \in [0, 1]$ *atunci* $\alpha P + (1-\alpha)R$ $\alpha Q + (1-\alpha)R$.

Propoziţia 8.7 *Fie* (M, m) *o mixtură cu axiomele* a1, a2, a3. *Atunci există* $u : M \to \mathbb{R}$ *astfel încât*:
(1) $P < Q$ *dacă şi numai dacă* $u(P) < u(Q)$.
(2) $u[\alpha P + (1-\alpha)Q] = \alpha u(P) + (1-\alpha)u(Q)$.
Să presupunem că u satisface aceste două condiţii. Atunci $v : M \to \mathbb{R}$ *satisface* (1)-(2) *dacă şi numai dacă există* $a > 0$ *şi* $b \in \mathbb{R}$ *astfel încât:* $v = au + b$ *i.e.* $v(P) = au(P) + b$ *pentru orice* $P \in M$.

Materialul acestui Curs a fost prelucrat după: Vasile Preda, *Teoria deciziilor statistice*, Ed. Academiei Române, 1992.

Chapter 9

Teoria credibilităţii

Fixăm mulţimea nevidă Ω, nu neapărat finită.

Definiţia 9.1 Numim *mšură de credibilitate* pe Ω o aplicaţie $Cr : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfăcând axiomele:
cr1) (normalitate) $Cr(\Omega) = 1$.
cr2) (monotonia) dacă $A \subset B$ atunci $Cr(A) \leq Cr(B)$.
cr3) (autodualitate) pentru orice eveniment A avem $Cr(A) + Cr(\bar{A}) = 1$.
cr4) (maximalitate) pentru orice şir $\{A_i\}_{i \in I}$ cu $\sup_{i \in I} Cr(A_i) < 0.5$ avem:

$$Cr(\cup_{i \in I} A_i) = \sup_{i \in I} Cr(A_i) \tag{9.1}$$

Perechea (Ω, Cr) o numim *spaţiu de credibilitate*.

Exemplul 9.2 Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ şi funcţia Cr dată astfel:

$$Cr(\omega_1) = 0,7, \quad Cr(\omega_2) = 0,3$$

iar $Cr(\Omega) = 1 = 1 - Cr(\emptyset)$. Atunci Cr este o măsură de credibilitate pe Ω.

Exemplul 9.3 Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ şi $\mu : \Omega \to [0, +\infty)$ aşa încât:

$$\sup_{x \in \Omega} \mu(x) = 1.$$

Atunci următoarea funcţie este o măsură de credibilitate pe Ω:

$$Cr(A) = \frac{1}{2}\left(\sup_{x \in A} \mu(x) + \sup_{x \in \bar{A}} \mu(x)\right). \tag{9.2}$$

Exemplul 9.4 Fie Ω o mulţime nevidă oarecare şi pentru orice $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ diferită de $\emptyset$ şi Ω definim:

$$Cr(A) = 0,5 \tag{9.3}$$

iar $Cr(\Omega) = 1 = 1 - Cr(\emptyset)$. Atunci Cr este o măsură de credibilitate pe Ω.

Propoziţia 9.5 *Fie Ω nevidă şi $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ oarecare. Dacă Cr este o măsură de credibilitate pe Ω atunci:*

cr5) $Cr(\emptyset) = 0$.
cr6) $Cr(A) \in [0,1]$.

Demonstraţie cr5 rezultă imediat din cr1 şi cr3. cr6 rezultă din cr2 aplicată incluziunii: $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$. $\square$

O serie de proprietăţi ale credibilităţi sunt date de:

Propoziţia 9.6 *Fie (Ω, Cr) un spaţiu de credibilitate şi $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$. Avem:*
cr7) *dacă $Cr(A \cup B) \leq 0,5$ atunci: $Cr(A \cup B) = \max\{Cr(A), Cr(B)\}$.*
cr8) *dacă $Cr(A \cap B) \geq 0,5$ atunci: $Cr(A \cap B) = \min\{Cr(A), Cr(B)\}$.*
cr9) *$Cr(A \cup B) \leq Cr(A) + Cr(B)$.*

Demonstraţie i) Dacă $Cr(A \cup B) < 0,5$ atunci din cr2 avem $\max\{Cr(A), Cr(B)\} < 0,5$ şi obţinem cr7 din cr4. Să presupunem acum că $Cr(A \cup B) = 0,5$ şi cr7 nu are loc; rezultă că $\max\{Cr(A), Cr(B)\} < 0,5$. Putem atunci aplica axioma cr4:

$$Cr(A \cup B)(= 0,5) = \max\{Cr(A), Cr(B)\} < 0,5$$

ceea ce este o contradicţie.
ii) Deoarece $Cr(A) \cap Cr(B) \geq 0,5$ aplicând c3 avem: $Cr(\bar{A} \cup \bar{B}) \leq 0,5$ şi deci:

$$Cr(A \cap B) = 1 - Cr(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - \max\{Cr(\bar{A}), Cr(\bar{B})\} = \min\{Cr(A), Cr(B)\}$$

ceea ce dă cr8.
iii) Avem trei cazuri posibile.
Cazul I) $\max\{Cr(A), Cr(B)\} < 0,5$. Avem, conform cr4:

$$Cr(A \cup B) = \max\{Cr(A), Cr(B)\} \leq Cr(A) + Cr(B).$$

Cazul II) $Cr(A) \geq 0,5$. Din cr2 şi cr3 avem: $Cr(\bar{A}) \leq 0,5$ şi $Cr(A \cup B) \geq Cr(A) \geq 0,5$ ceea ce implică:

$$Cr(\bar{A}) = \max\{Cr(\bar{A} \cap B), Cr(\bar{A} \cap \bar{B})\} \leq Cr(\bar{A} \cap B) + Cr(\bar{A} \cap \bar{B}) \leq Cr(B) + Cr(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

Rezultă atunci:

$$Cr(A)+Cr(B) = 1-Cr(\bar{A})+Cr(B) \geq 1-Cr(B)-Cr(\bar{A}\cap\bar{B})+Cr(B) = 1-Cr(\bar{A}\cap\bar{B}) = Cr(A\cup B)$$

adică concluzia.
Cazul III) $Cr(B) \geq 0,5$. Se aplică acelaşi argument ca mai sus cu A schimbat cu B. $\square$

Observaţii 9.7 i) O măsură de credibilitate nu este doar finit-subaditivă ci chiar numărabil subaditivă adică:

$$Cr(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} Cr(A_i). \tag{9.4}$$

ii) Din demonstraţia de la cr9 rezultă că o măsură de credibilitate este *nul-aditivă* adică: $Cr(A \cup B) = Cr(A) + Cr(B)$ dacă $Cr(A) = 0$ sau $Cr(B) = 0$.

Propoziţia 9.8 *Fie (Ω, Cr) un spaţiu de credibilitate şi $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un şir descrescător de evenimente cu: $\lim_{i \to \infty} Cr(B_i) = 0$. Atunci pentru orice eveniment A avem:*

$$\lim_{i \to \infty} Cr(A \cup B_i) = \lim_{i \to \infty} Cr(A \setminus B_i) = Cr(A). \tag{9.5}$$

Demonstraţie Avem, din cr2 şi cr9, pentru orice i:

$$Cr(A) \leq Cr(A \cup B_i) \leq Cr(A) + Cr(B_i)$$

şi deci, cum $Cr(B_i) \to 0$ avem $Cr(A \cup B_i) \to Cr(A)$. Deoarece $A \setminus B_i \subset A \subset (A \setminus B_i) \cup B_i$ avem:

$$Cr(A \setminus B_i) \leq Cr(A) \leq Cr(A \setminus B_i) + Cr(B_i)$$

şi avem a doua egalitate când trecem la limită. $\square$

Prezentăm fără demonstraţie şi alte proprietăţi ale măsurilor de credibilitate:

Propoziţia 9.9 *O măsură de credibilitate este aditivă dacă şi numai dacă există cel mult două elemente din Ω ce au credibilitatea nenulă.*

Propoziţia 9.10 (Legea semicontinuităţii credibilităţii) *Fie $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un şir de evenimente. Atunci are loc relaţia:*

$$\lim_{i\to\infty} Cr(A_i) = Cr(\lim_{i\to\infty} A_i) \tag{9.6}$$

dacă şi numai dacă una din următoarele identităţi este satisfăcută:
1. $A_i \uparrow A$ *cu* $Cr(A) \leq 0,5$.
2. $A_i \downarrow A$ *cu* $Cr(A) \geq 0,5$.
3. $A_i \uparrow A$ *cu* $Cr(A) < 0,5$.
4. $A_i \downarrow A$ *cu* $Cr(A) > 0,5$.

Seminar 9

S9.1 Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ şi:

$$Cr(\omega_1) = 0,6, Cr(\omega_2) = 0,3, Cr(\omega_3) = 0,2$$

$$Cr(\{\omega_1, \omega_2\}) = 0,8, Cr(\{\omega_1, \omega_3\}) = 0,7, Cr(\{\omega_2, \omega_3\}) = 0,4$$

iar $Cr(\Omega) = 1 = 1 - Cr(\emptyset)$. Este Cr o măsură de credibilitate pe Ω?

Chapter 10

Variabile fuzzy pe spaţii de credibilitate

Fie (Ω, Cr) un spaţiu de credibilitate.

Definiţia 10.1 i) O aplicaţie $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ se numeşte *variabilă fuzzy.*
ii) O funcţie $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ se numeşte *vector fuzzy n-dimensional.*
iii) Se numeşte *funcţia de apartenenţă* (sau *membership*) a variabilei fuzzy ξ, funcţia $\mu = \mu_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$:

$$\mu_\xi = \min\{2Cr(\xi = x), 1\}. \tag{10.1}$$

Funcţia membership reprezintă gradul de posibilitate ca un număr real să fie valoare a variabilei fuzzy respective. Astfel, $\mu_\xi(x) = 0$ dacă x este o valoare "imposibilă" respectiv $\mu_\xi(x) = 1$ dacă x este cea mai posibilă valoare a lui ξ.

Este evident că unei variabile fuzzy i se asociază o unică funcţie m,embership dar este posibil ca o aplicaţie de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$ să fie funţia membership pentru mai multe variabile fuzzy. Spre exemplu, fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ şi definim $Cr(\omega_1) = Cr(\omega_2) = 0,5$. Avem atunci că (Ω, Cr) este un spaţiu de credibilitate pentru care definim varibilele fuzzy:

$$\xi_1(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = \omega_1 \\ 1, & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

$$\xi_2(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \omega_1 \\ 0, & \omega = \omega_2 \end{cases}$$

Aceste două variabile fuzzy au acceaşi funcţie memebership:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{0,1\} \\ 0, & x \notin \{0,1\}. \end{cases}$$

Un rezultat important în teoria credibilităţii este următoarea teoremă ce afirmă că ştiind funcţia membership a unei variabile aleatoare date putem determina credibilitatea unui eveniment:

Teorema 10.2 (**Teorema inversă a crdibilităţii**) *Fie ξ o variabilă fuzzy pe spaţiul de credibilitate (Ω, Cr) având funcţia membership μ. Atunci, pentru orice submulţime B a lui*

$\mathbb{R}$, *avem*:

$$Cr(\xi \in B) = \frac{1}{2}\left(\sup_{x\in B}\mu(x) + 1 - \sup_{x\in \bar{B}}\mu(x)\right). \tag{10.2}$$

Drept consecinţe avem:

$$Cr(\xi = x) = \frac{1}{2}\left(\mu(x) + 1 - \sup_{y\neq x}\mu(y)\right) \tag{10.3}$$

$$Cr(\xi \leq x) = \frac{1}{2}\left(\sup_{y\leq x}\mu(y) + 1 - \sup_{y<x}\mu(y)\right) \tag{10.4}$$

$$Cr(\xi \geq x) = \frac{1}{2}\left(\sup_{y\geq x}\mu(y) + 1 - \sup_{y<x}\mu(y)\right). \tag{10.5}$$

Dacă funcţia μ este continuă atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$Cr(\xi = x) = \frac{\mu(x)}{2}. \tag{10.6}$$

Propoziţia 10.3 (**Caracterizarea funcţiilor membership**) *Funcţia* $\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$ *este funcţia membership a unei variabile fuzzy dacă şi numai dacă* $\sup \mu(x) = 1$.

Definiţia 10.4 Se numeţe *distribuţia credibilă* a variabilei fuzzy ξ, funcţia $\Phi : \mathbb{R} \to [0,1]$:

$$\Phi(x) = Cr(\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x). \tag{10.7}$$

Folosind teorema inversă a crdibilităţii avem:

Propoziţia 10.4 *Fie varibila fuzzy* ξ *cu funcţia memebership* μ. *Atunci pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *avem*:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(\sup_{y\leq x}\mu(y) + 1 - \sup_{y>x}\mu(y)\right). \tag{10.8}$$

Chapter 11

Entropia, energia şi corelaţia surselor de informaţie

Definiţia 11.1 Numim *sursă de informaţie* o pereche $S = (\Sigma, \pi)$ cu Σ alfabet şi π o *distribuţie de probabilitate* pe Σ adică o aplicaţie $\pi : \Sigma \to \mathbb{R}_+$ sastisfăcând $\sum_{s\in\Sigma} \pi(s) = 1$. Distribuţia π o numim *pozitivă* dacă $\pi(s) > 0$ pentru orice $s \in \Sigma$.

Observaţii 11.2 i) Avem că $\pi(s) \in [0, 1]$ pentru orice $s \in \Sigma$.
ii) O sursă de informaţie poate fi gândită ca un dispozitiv "black-box" care emite simboluri din Σ fiecare astfel de simbol s fiind emis cu probabilitatea $\pi(s)$.
iii) Fixăm $|\Sigma| = n$ şi notăm $S = (\Sigma = (s_i), \pi = (\pi_i)), 1 \leq i \leq n$ cu convenţia $p_1 \geq ... \geq p_n$. Vom nota tabelar:

S	s_1	$\dots$	s_n
π	p_1	$\dots$	p_n

Exemplul 11.3 $\pi_u(s) = \frac{1}{n}$ pentru orice $s \in \Sigma$ este o distribuţie pozitivă de probabilitate numită *distribuţia uniformă.*

Putem extinde π la monoidul cuvintelor obţinându-se un morfism de la Σ^* la monoidul multiplicativ al lui $[0, 1]$, $\pi : \Sigma^* \to ([0, 1], \cdot, 1)$ considerând:
i) $\pi(\varepsilon) = 0$,
ii) $\pi(w) = \pi(w(1))...\pi(w(k))$ pentru orice $w \in \Sigma^k, k \geq 2$.
Proprietatea de morfism o interpretăm astfel: probabilitatea emiterii unui simbol este independentă de simbolurile emise anterior; din acest motiv, sursele de informaţii astfel definite mai sunt numite *fără memorie*, cele cu memorie mai fiind numite *surse Markov.* Obţinem astfel o extindere a lui π la limbaje peste Σ:
iii) $\pi(\emptyset) = 0$,
iv) $\pi(L) = \sum_{w\in L} \pi(w)$ dacă L este submulţime nevidă a lui Σ^*.
Numărul real nenegativ $\pi(L)$ îl numim *π-măsura lui L.* Astfel, π_u-măsura lui L o numim *indicatorul de cod* al lui L.

Definiţia 11.4 Limbajul produs L_1L_2 se numeşte *neambiguu* dacă pentru orice $w \in L_1L_2$ există cuvintele unice $u \in L_1$ şi $v \in L_2$ aşa încât $w = uv$.

Propoziţia 11.5 1) $\pi(\Sigma^k) = 1$ *pentru orice* $k \geq 1$.
2) $\pi(\cup_{i\in I} L_i) \leq \sum_{i\in I} \pi(L_i)$ *pentru orice familie* $L_i, i \in I$ *cel mult numărabilă de submulţimi ale lui* Σ^* *cu următorea convenţie: dacă există* $i \in I$ *aşa încât* $\pi(L_i) = \infty$ *atunci* $\pi(\cup_{i\in I}) = \infty$.

Dacă familia L_i are mulţimile disjuncte atunci avem egalitate.
3) $\pi(L_1L_2) \leq \pi(L_1)\pi(L_2)$. *Dacă produsul L_1L_2 este neambiguu atunci avem egalitate.*
4) $\pi(L^*) \leq \sum_{i\geq 0} \pi(L^n) \leq \sum_{i\geq 0}(\pi(L))^n$ *cu convenţia:* $\pi(L) = \infty$ *implică* $\pi(L^*) = \infty$.

Conceptul de entropie ca măsură a informaţiei şi a gradului de incertitudine, a fost introdus în 1948 de către Claude Shannon. Această noţiune este profund analoagă conceptului similar din termodinamică unde a fost introdus de către Clausius în 1864 ca măsură a gradului de dezordine al unui sistem fizic.

Deoarece din punct de vedere matematic, informaţia furnizată de simbolul $s_k \in \Sigma$ este $I_k = -\log p_k$ rezultă că media ponderată a informaţiilor furnizate de sursa dată este:

Definiţia 11.6 Se numeşte *entropie* a sursei S numărul real nenegativ:

$$H(\pi) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \tag{11.1}$$

unde logaritmul este în baza 2 şi avem convenţia $0 \cdot \log 0 = 0$. Unitatea de măsură a entropiei este "biţi/simbol".

Alegerea bazei 2 se poate considera ca fiind neimportantă matematic datorită proprietăţii de schimbare a bazei logaritmilor şi este impusă din punct de vedere tehnic de utilizarea calculului binar în procesarea datelor de către calculatoare.

Lema 11.7 *Dacă $b > 0$ şi $x > 0$ atunci $\log_b x \leq x - 1$ cu egalitate doar pentru $x = 1$.*

Propoziţia 11.8 Inegalitatea Gibbs *Fie numerele reale $(p_i, q_i), 1 \leq i \leq n$ satisfăcând:*
i) $0 \leq p_i, q_i \leq 1$,
ii) $\sum_{i=1}^{n} q_i \leq 1 = \sum_{i=1}^{n} p_i$.
Atunci: $-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$. *Avem egalitate dacă şi numai dacaă $p_i = q_i$ pentru totţi $i \in \mathbb{N}_n$.*

Corolar 11.9 *Pentru orice sursă de n informaţii avem:* $0 \leq H(\pi) \leq \log n = H(\pi_u)$.

Demonstraţie Avem $H(\pi_u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = -\log \frac{1}{n} = \log n$. Deoarece $p_i \in [0, 1]$ avem $-p_i \log p_i \geq 0$ şi rezultă membrul stâng. Pentru membrul drept aplicăm inegalitatea Gibbs cu $q_i = \frac{1}{n}, 1 \leq i \leq n$. □

Cazurile de egalitate pentru inegalitatea precedentă sunt precizate de:

Propoziţia 11.10 i) $H(\pi) = 0$ *dacă şi numai dacă* $p_1 = 1$.
ii) $H(\pi) = \log n$ *dacă şi numai dacă* $\pi = \pi_u$.

Demonstraţie i) $H(\pi) = 0$ dacă şi numai pentru orice $i \in \mathbb{N}_n$ avem $p_i \log p_i = 0$. Cum nu putem avea că toţi p_i sunt nuli deoarece suma lor este 1 rezultă că trebuie să existe măcar un indice i aşa încât $p_i = 1$. Din ordonarea probabilităţilor p_i rezultă $p_1 = 1$.
ii) rezultă din cazul de egalitate al Inegalităţii Gibbs. □

Observaţia 11.11 În termodinamică unui sistem fizic izolat, o stare de echilibru este caracterizată de entropie maximă. Prin analogie, am putea numi distribuţia uniformă ca fiind starea de echilibru "informaţional" al sursei date, toate cele n simboluri (stări) fiind la fel de probabile.

Definiţia 11.12 Se dau sursele de informaţie $S_1 = (\Sigma_1, \{p_i\}, i \in I), S_2 = (\Sigma_2, \{q_j\}, j \in J)$. Numim *produsul* lor sursa $S_1S_2 = (\Sigma_1 \times \Sigma_2, \{p_iq_j\})$. (Avem imediat $\sum_{i,j} p_iq_j = 1$.)

Putem spune că sursa produs S^2 generează grupe de câte două mesaje ale sursei S. Analog pentru o putere $k \geq 2$ oarecare.

Propoziţia 11.13 $H(S_1S_2) = H(S_1) + H(S_2)$. *În consecinţă* $H(S^k) = kH(S)$.

Demosntraţie $-\sum_{i,j} p_iq_j \log(p_iq_j) = -\sum_{i,j} p_iq_j \log p_i - \sum_{i,j} p_iq_j \log q_j = \sum_j q_jH(S_1) + \sum_i p_iH(S_2)$. $\square$

Definiţia 11.14 Pentru sursa dată iniţial definim:
1) *redundanţa* $R = \log n - H(\pi)$,
2) *eficienţa* $\eta = \frac{H(\pi)}{\log n}$.

Exemplul 11.15 (n=2) Notând $p_1 = p$ avem:

S	s_1	s_2
π	p	$1-p$

i) $H(p, 1-p) = \eta = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$,
ii) $R = 1 + p \log p + (1-p) \log(1-p)$.

Inspirat de expresia energiei cinetice care este suma pătratelor vitezelor, matematicianul român Octav Onicescu a introdus în 1964 conceptul următor:

Definiţia 11.16 Numim *energia* sursei date numărul real strict pozitiv:

$$E(\pi) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2. \tag{11.2}$$

Propoziţia 11.17 i) $E(\pi_u) = \frac{1}{n} \leq E(\pi) \leq 1$.
ii) $E(\pi) = \frac{1}{n}$ *dacă şi numai dacă* $\pi = \pi_u$.
iii) $E(\pi) = 1$ *dacă şi numai dacă* $p_1 = 1$.
iv) $E(S_1S_2) = E(S_1)E(S_2)$.

Demonstraţie i) Faptul că $E(\pi_u) = \frac{1}{n}$ este imediat ca şi inegalitatea din dreapta deoarece p_i fiind subunitare avem $E(\pi) \leq \sum_{i=1}^{n} p_1$. Pentru a arăta inegalitatea din stânga fie $x_i = p_i - \frac{1}{n}$; rezultă $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Avem $E(\pi) = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
ii) Avem egalitate în stânga dacă şi numai dacă toţi x_i sunt nuli.
iii) Avem egalitate în dreapta dacă şi numai dacă $p_i^2 = p_i$ ceea ce revine la $p_1 = 1$ şi $p_2 = \ldots = p_n = 0$.
iv) $\sum_{i,j}(p_iq_j)^2 = (\sum p_i^2)(\sum q_j^2)$ din independenţa celor două surse. $\square$

Definiţia 11.18 Date sursele S_1 şi S_2 de aceeaşi dimensiune n numim:
i) *corelaţia* lor numărul real nenegativ $C(\pi_1, \pi_2) = \sum_{i=1}^{n} p_iq_i$.
ii) *coeficientul de corelaţie* numărul real nenegativ $CC(\pi_1, \pi_2) = \frac{C(\pi_1,\pi_2)}{\sqrt{E\pi_1)E(\pi_2)}}$.

Propoziţia 11.19 $CC(\pi_1, \pi_2) \leq 1 = CC(\pi, \pi)$ *cu egalitate dacă şi numai dacă* $\pi_1 = \pi_2$.

Demonstraţie Faptul că $CC(\pi, \pi) = 1$ este imediat iar inegalitatea este exact inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schartz (CBS) din teoria produselor scalar. Avem egalitate în inegalitatea CBS dacă şi numai dacă vectorii n-dimensionali π_1, π_2 sunt coliniari adică există numărul real λ aşa încât $\pi_2 = \lambda\pi_1$. Dar din $\sum p_i^1 = \sum p_i^2 = 1$ rezultă $\lambda = 1$. $\square$

SEMINAR 11

S11.1 Se dă o sursă cu $n = 5$ şi $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{8}, p_4 = p_5 = \frac{1}{16}$. Se cere entropia, redundanţa, eficienţa şi energia acestei surse.

Rezolvare $H = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{15}{8} = 1.875$ biţi/simbol.
$R = \log 5 - H = 2.3219 - 1.8750 = 0.4469, \eta = \frac{1.875}{2.3219} = 0.8075,$
$E = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{2}{256} = 0.25 + 0.0625 + 0.0156 + 0.0078 = 0.3359$

Index