CAPITOLUL 6

Curbe: Probleme

6.1 Enunţuri

6.1 Folosind formula lungimii de arc şi ecuaţiile parametrice ale unei drepte în spaţiu să se obţină formula distanţei dintre două puncte din spaţiu.

6.2 Folosind formula lungimii de arc şi ecuaţiile parametrice ale cercului centrat în origine de rază R să se obţină expresia lungimii cercului.

6.3 Se cere lungimea pe $[0, 2\pi]$ a *cicloidei*: $\overline{r} : I\!R \to I\!R^2$, $\overline{r}(t) = R(t - \sin t, 1 - \cos t)$, unde $R > 0$ este o constantă data.

6.4 Se cere lungimea arcului de curbă $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru *astroidă*: $\overline{r} : I\!R \to I\!R^2, \overline{r}(t) = R\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$.

6.5 Pentru *spirala logaritmică*: $\overline{r} : I\!R \to I\!R^2$,

$\overline{r}(t) = R\left(e^{kt}\cos t, e^{kt}\sin t\right)$, $R, k > 0$ constante, se cer:

(i) să se arate că unghiul dintre $\overline{r}(t)$ şi $\overline{r}'(t)$ este constant,

(ii) dacă notăm l_n lungimea arcului de curbă $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$ să se arate că raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ este constant.

Aceste proprietăţi caracterizează spirala logaritmică iar ultima proprietate arată că spirala logaritmică este un exemplu de fractal!

6.6 Fie funcţia $f : I = (a, b) \to I\!R$ de clasa $C^k, k \geq 1$ şi curba grafic: $\overline{r} : I \to I\!R^2, \overline{r}(t) = (t, f(t))$. Să se obţină formula lungimii curbei grafic $L(f) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt$. Această formulă apare în Manualul de Analiză Matematică, clasa a XII-a.

6.7 Pentru curba $\overline{r}(t) = e^t(\sin t, \cos t, 1)$ să se arate că tangenta, normala principala şi binormala formează fiecare un unghi constant cu axa Oz.

6.8 Se cer punctele curbei $\overline{r}(t) = \left(2t-1, t^3, 1-t^2\right)$ în care planul osculator este perpendicular pe planul $\pi : 7x - 12y + 5z = 0$.

6.9 Se cer curbele $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ pentru care tangenta este paralelă cu vectorul $(y(t)z(t), z(t)(x(t)-1), y(t)(x(t)-1))$.

6.10 Să se arate că tangentele la curba $\overline{r}(t) = \left(a\cos t, -a\sin t, be^t\right)$ intersectează planul xOy după un cerc.

6.11 Se cer punctele curbei $\overline{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, t, 2t^2-1\right)$ în care binormala este perpendiculară pe dreapta $d : \begin{cases} x+y=0 \\ 4x-z=0 \end{cases}$.

6.12 Se cer punctele curbei $\overline{r}(t) = \left(\frac{t^4}{2}, -\frac{t^3}{3}, t^2\right)$ în care tangenta este paralelă cu planul $\pi : 3x - 2y - 2z - 1 = 0$.

6.13 Să se arate că locul geometric al punctelor de intersecţie dintre planul xOy şi tangentele la curba $\overline{r}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$ este o conică C. Să se arate că C este înfăşuratoarea dreptelor de intersecţie dintre planul xOy şi planele osculatoare la curba dată.

6.14 Să se arate că planele normale la curba $\overline{r}(t) = \left(\sin^2 t, \sin t\cos t, \cos t\right)$ trec prin origine.

6.15 Se cer unghiurile dintre axele de coordonate şi tangenta la curba $\overline{r}(t) = \left(t-\sin t, 1-\cos t, 4\sin\frac{t}{2}\right)$.

6.16 Se cer ecuaţiile tangentei şi planul normal la curba dată implicit $\Gamma : \begin{cases} x=y \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$.

6.17 Se cere planul osculator în punctul $M(1,1,1)$ la curba $\Gamma : \begin{cases} y^2=x \\ x^2=z \end{cases}$.

6.18 Pentru curbele următoare se cer versorii reperului Frenet, curbura şi torsiunea:

(i) $\overline{r} : I\!R \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \left(1, t, \frac{t^2}{2}\right)$

(ii) (*elicea circulară*) $\overline{r} : I\!R \to I\!R^3, \overline{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ cu $a, b > 0$ constante

(iii) $\overline{r} : I\!R_+^* \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \frac{1}{2}\left(t, \frac{1}{t}, \sqrt{2}\ln t\right)$

(iv) $\overline{r} : I\!R_+^* \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \left(2t, \ln t, t^2\right)$

(v) $\overline{r} : I\!R \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right)$

(vi) $\overline{r} : (0, 2\pi) \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \left(t-\sin t, 1-\cos t, 4\cos\frac{t}{2}\right)$

(vii) $\overline{r} : I\!R \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \left(a(\sin t+\cos t), a(\sin t-\cos t), be^{-t}\right)$

(viii) $\overline{r} : I\!R \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \left(ae^t\cos t, ae^t\sin t, be^t\right)$.

6.19 (*Curbe Ţiţeica*) O curbă $\overline{r} : I \to I\!R^3$ se numeşte *curbă Ţiţeica* dacă funcţia $f(t) = \frac{d^2(O, \pi_{osc}(t))}{\tau(t)}$ este constantă, unde

$d(O, \pi_{osc}(t))$ este distanţa de la originea O la $\pi_{osc}(t)$=planul osculator în $\overline{r}(t)$ iar $\tau(t)$ este torsiunea în $\overline{r}(t)$. Să se arate că:

$$f(t) = \frac{(\overline{r}, \overline{r}', \overline{r}'')^2}{(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}''')}.$$

Să se arate că următoarele curbe sunt curbe Ţiţeica:
(i) $\overline{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}, t^3\right), t > 0$
(ii) $\overline{r}(t) = \left(e^{-2t}, e^t \cos\left(\sqrt{3}t\right), e^t \sin\left(\sqrt{3}t\right)\right)$.

6.20 Să se arate că următoarele curbe sunt curbe plane şi se cere planul osculator (care le conţine):
(i) $\overline{r}(t) = \left(\sin t, 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right), 1 + \cos t\right)$
(ii) $\overline{r}(t) = \left(t^2 - 1, t^2, -\ln t\right), \quad t \in (0, +\infty)$
(iii) $\overline{r}(t) = \left(t^2(2t+1), t(t-2), t\left(t^2+1\right) - 1\right)$.

6.21 Fie $f : I \to I\!R$ de clasă $C^k, k > 1$ şi curba grafic $\overline{r} : I \to I\!R^2, \overline{r}(t) = (t, f(t))$. Să se arate că: $k(t) = \frac{f''(t)}{\left(1+(f'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

6.22 Fie o curbă plană definită implicit de ecuaţia $F(x, y) = 0$. Să se arate că: $k(x, y) = -\frac{F_x^2 F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{xx}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\Delta}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ unde Δ este determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}$.

Folosind această formulă se cere:
(i) să se reobţină curbura cercului de rază R centrat în origine.
(ii) curbura elipsei
(iii) curbura hiperbolei
(iv) curbura parabolei $y^2 = 2px$
(v) să se arate că dacă $\overline{n} = (n_1, n_2)$ este versorul normalei atunci avem următoarea formulă pentru curbură: $k = \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} = div\overline{n}$.

6.23 Aplicaţia $J : I\!R^2 \to I\!R^2, \quad J(x, y) = (-y, x)$ se numeşte *structura complexă a planului*. Să se arate că:
(i) J este endomorfism liniar al spaţiului vectorial $I\!R^2$
(ii) $J^2 = -Id$ unde Id este aplicaţia identică a lui $I\!R^2$(această relaţie motivează denumirea lui J)
(iii) J este *aplicaţie ortogonală* i.e. $< Jp, Jq > = < p, q >$ pentru orice $p, q \in I\!R^2$. Cu transformarea $q \to Jq$ rezultă că J este antisimetrică i.e. $< Jp, q > = - < p, Jq >$
(iv) $< Jp, p > = 0$ i.e. Jp este ortogonal pe p.

Identificând planul $I\!R^2$ cu mulţimea numerelor complexe să se arate că:

(v) $Jp = +i \cdot p$

(vi) $p \cdot \overline{q} =< p, q > +i < p, Jq >=< p, q > -i < Jp, q >$.

Să se arate că matricea lui J este $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$ şi să se verifice pe această matrice proprietăţile (ii),(iii),(iv).

(vii) De ce sensul orar este opus sensului trigonometric?

6.24 (i) Să se arate că pentru o curbă plană $\overline{r} : (a, b) \to I\!R^2$ expresia curburii este:

$$k(t) = \frac{x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)}{\left(x'^2(t) + y'^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{< J\overline{r}'(t), \overline{r}''(t) >}{\|\overline{r}'(t)\|^3}.$$

(ii) Folosind formula precedentă să se arate că pentru o curbă parametrizată canonic, i.e. $\|\overline{r}'(s)\| = 1$ pentru orice $s \in (a, b)$, avem: $\overline{r}''(s) = +k(s)\, J\overline{r}'(s)$.

6.25 Folosind formula din exerciţiul precedent se cere curbura pentru:

(i) *elipsa* $E : \overline{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$

(ii) *hiperbola* $H : \overline{r}(t) = (acht, bsht)$

(iii) $\overline{r}(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$

(iv) spirala logaritmică,

(v) cicloida,

(vi) astroida.

6.26 Folosind exerciţiul 6.22 se cere curbura pentru:

(i) $C : xy = a^2$

(ii) $C : x^3 - y^3 + 2xy = 0$ în punctul $M(1, -1)$

(iii) $C : 3ay^2 - 2x^3 = 0$.

6.27 Dată curba plană C în coordonate polare $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ cu $\rho = \rho(\varphi)$ să se arate că C are curbura

$$k(\varphi) = \frac{2\rho'^2 + \rho^2 - \rho\rho''}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aplicând această relaţie se cere curbura următoarelor curbe:

(i) (*lemniscata*) $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$

(ii) $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$

(iii) $\rho = a \sin 4\varphi$.

6.28 (*Curbe cilindrice*) (i) Să se definească şi să se studieze (după modelul exerciţiului 6.21) curbele cilindrice.

(ii) Să se determine curbele cilindrice Ţiţeica.

6.29 (*Formule Frenet generalizate*) Notăm cu E unul din următoarele corpuri: $\mathbb{R}$ al numerelor reale, $\mathbb{C}$ al numerelor complexe, $\mathbb{H}$ al cuaternionilor. Dându-se numărul natural impar n şi o curbă în spaţiul E^n se cer formulele Frenet corespunzătoare.

6.30 (*Noduri olonome*) O curbă în spaţiu $t \to \overline{r}(t)$ se numeşte *nod olonom* dacă există o funcţie periodică $f : I\!R \to I\!R$ astfel încât:

$$\overline{r}(t) = \left(-f(t), f'(t), -f''(t)\right).$$

A) Să se studieze nodurile olonome şi să se figureze pentru:

(i) $f(t) = \cos t$

(ii) $f(t) = \sin t$.

B) Să se studieze cazul când există numerele reale a, b aşa încât: $f'' = af' + bf$.

6.31 (*Curbe sferice*) Fie în spaţiu curba $C : \overline{r} = \overline{r}(s)$ parametrizată canonic şi având curbura k respectiv torsiunea τ.

(i) Fie punctul $\overline{r}(s_0) \in C$ cu $\tau(s_0) \neq 0$. Să se arate că sfera ce trece prin $\overline{r}(s_0)$ şi este centrată în punctul

$$\overline{r}(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\overline{n}(s_0) - \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\,\tau(s_0)}\overline{b}(s_0)$$

are contact de ordinul 3 cu C. Această sferă este unic determinată cu aceste proprietăţi şi se numeşte *sfera osculatoare* în $\overline{r}(s_0)$.

(ii) Să se arate că C este situată pe o sferă dacă şi numai dacă are loc relaţia:

$$\frac{\tau}{k} = \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)'.$$

(iii) Presunpunem C situată pe sfera unitate S^2 şi notăm $J := Det(\overline{r}, \overline{r}', \overline{r}'')$. Avem atunci:

$$\begin{cases} k = \sqrt{1+J^2} \\ \tau = \frac{J'}{1+J^2} \end{cases}.$$

Cercurile mari sunt caracterizate de $J = 0$ iar alte cercuri de $J =$constant.

6.2 Soluţii

6.1 Fie punctele distincte $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ si d dreapta care le uneşte. Ecuaţia lui d este:

$\overline{r}(t) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1), z_1 + t(z_2 - z_1))$. Punctul M_1 corespunde lui $t = 0$ iar punctul M_2 lui $t = 1$ deci: $d(M_1, M_2) = \int\limits_0^1 \|\overline{r}'(t)\| dt = \int\limits_0^1 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} dt =$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

6.2 Cum ecuaţia cercului este: $\overline{r}(t) = (R\cos t, R\sin t), t \in (0, 2\pi)$ rezultă: $L(C) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = 2\pi R$.

6.3 $L(C) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1 - \cos t)^2 + R^2 \sin^2 t} dt = 2R \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4R \cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8R$.

6.4 $L(C) = 3R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos^2 t \sin t)^2 + (\sin^2 t \cos t)^2} dt = \frac{3}{2} R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{3}{4} R \cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} R$.

Fig.1 Astroida cu $R = 3$

6.5 (i) $\overline{r}' = Re^{kt}(k\cos t - \sin t, k\sin t + \cos t), \|\overline{r}'\| = Re^{kt}\sqrt{k^2 + 1}, \|\overline{r}\| = Re^{kt}$ şi deci $cos\measuredangle(\overline{r}, \overline{r}') = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ deoarece $< \overline{r}, \overline{r}' >= R^2 k e^{2kt}$.

(ii) $a_n = R\sqrt{k^2 + 1} \int\limits_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^{kt} dt = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k} R \left(e^{2(n+1)k\pi} - e^{2nk\pi}\right)$ de unde rezulta: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{2k\pi} = const > 1$.

Fig.2 Spirala logaritmică cu $R = \dfrac{1}{3}, k = \dfrac{1}{7}$

6.6 Deoarece $\overline{r}'(t) = (1, f'(t))$ avem imediat concluzia.

6.7 Fie α, β, γ unghiurile formate de tangentă, normala principală şi binormala cu versorul director $\overline{k}$ al axei Oz. Avem:

$$\overline{r}' = e^t(\sin t + \cos t, \cos t - \sin t, 1), \overline{r}'' = e^t(2\cos t, 2\sin t, 1), \|\overline{r}'\| = \sqrt{3}e^t$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = e^{2t}(\cos t + \sin t, \cos t - \sin t, -2), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = \sqrt{6}e^{2t}$$

$$\left(\overline{r}' \times \overline{r}''\right) \times \overline{r}' = e^{3t}(3(\cos t - \sin t), -3(\cos t + \sin t), 0), \|\left(\overline{r}' \times \overline{r}''\right) \times \overline{r}'\| = 3\sqrt{2}e^{3t}$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{<\overline{r}', \overline{k}>}{\|\overline{r}'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\beta = \frac{<(\overline{r}' \times \overline{r}'') \times \overline{r}', \overline{k}>}{\|(\overline{r}' \times \overline{r}'') \times \overline{r}'\|} = 0 \\ \cos\gamma = \frac{<\overline{r}' \times \overline{r}'', \overline{k}>}{\|\overline{r}' \times \overline{r}''\|} = -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{cases}.$$

6.8 Normala la planul π este: $\overline{N}(\pi) = (7, -12, 5)$ iar normala la planul osculator este binormala $\overline{r}' \times \overline{r}''$. Avem:

$$\overline{r}' = \left(2, 3t^2, -2t\right), \overline{r}'' = (0, 6t, -2), \overline{r}' \times \overline{r}'' = 2\left(3t^2, 2, 6t\right).$$

Din condiţia: $0 =< \overline{N}(\pi), \overline{r}' \times \overline{r}'' >= 21t^2 + 30t - 24 = 3\left(7t^2 + 10t - 8\right)$ obţinem: $t_1 = -2, t_2 = \frac{4}{7}$. Avem:

$$\pi_{osc}(1) : 6x + y - 6z + 20 = 0, \pi_{osc}(2) : \frac{24}{49}x + y + \frac{12}{7}z - \frac{66}{49} = 0.$$

6.9 Avem sistemul diferenţial:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{z(x-1)} = \frac{dz}{y(x-1)}.$$

Din prima şi ultima fracţie avem integrala: $\frac{x^2}{2} - x = \frac{z^2}{2} + c_1$, iar din ultimele două fracţii avem integrala: $y^2 - z^2 = c_2$. Prin urmare avem familia 2-parametrică de curbe $C(c_1, c_2) : \begin{cases} x^2 - z^2 - 2x - c_1 = 0 \\ y^2 - z^2 - c_2 = 0 \end{cases}$.

6.10 Ecuaţia tangentei este: $\frac{x - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{y + a\sin t}{-a\cos t} = \frac{z - be^t}{be^t}$. Făcând $z = 0$ obţinem $\begin{cases} x = a(\cos t + \sin t) \\ y = a(\cos t - \sin t) \end{cases}$ care este cercul $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 2$ în planul xOy.

6.11 Scriind dreapta sub forma $d : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}$ rezultă că vectorul director al dreptei este $\overline{a} = (1, -1, 4)$. Deoarece:

$$\overline{r}' = \left(-\frac{1}{t^2}, 1, 4t\right), \overline{r}'' = \left(\frac{2}{t^3}, 0, 4\right)$$

rezultă că vectorul binormalei este: $\overline{r}' \times \overline{r}'' = 2\left(2, \frac{6}{t^2}, -\frac{1}{t^2}\right)$. Din condiţia $< \overline{a}, \overline{r}' \times \overline{r}'' >= 0 = 2 - \frac{6}{t^2} - \frac{4}{t^3}$ rezultă ecuaţia $t^3 - 3t - 2 = 0$ cu soluţiile: $t_1 = t_2 = -1, t_3 = 2$ deci punctele $P_1(-1, -1, 1), P_2(\frac{1}{2}, 2, 7)$.

6.12 Normala la π este: $\overline{N}(\pi) = (3, -2, -2)$ şi deci tangenta la curbă, $\overline{r}'(t) = \left(2t^3, -t^2, 2t\right)$ trebuie să fie perpendiculară pe acest vector. Din $< \overline{N}(\pi), \overline{r}'(t) >= 0 = 2t\left(3t^2 + t - 2\right)$ rezultă: $t_1 = 0, t_2 = -1, t_3 = \frac{2}{3}$. Dar în punctul t_1 avem $\overline{r}'(0) = \overline{0}$ ceea ce contrazice regularitatea curbei deci singurele soluţii valabile rămân t_2 şi t_3 cu $P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\right), P_3\left(\frac{8}{81}, -\frac{8}{81}, \frac{4}{9}\right)$.

6.13 Tangenta este: $\frac{x-t}{1} = \frac{y-t^2}{2t} = \frac{z-t^3}{3t^2}$ şi deci intersecţia acestei tangente cu xOy este $C : \begin{cases} x = \frac{2t}{3} \\ y = \frac{t^2}{3} \end{cases}$. Prin eliminarea lui t obţinem $C : y = \frac{3}{4}x^2$ care este o parabolă. Planul osculator este $\pi_{osc} : \begin{vmatrix} x-t & y-t^2 & z-t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 0$ şi să notăm cu $\Gamma_t = \pi_{osc} \cap xOy : \begin{vmatrix} x-t & y-t^2 & -t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 0$. La final obţinem $\Gamma_t : 3y - 3tx + t^2 = 0$.

Reamintim că dată familia de curbe $\Gamma_t : F(x, y, t) = 0$ numim *înfăşurătoare* a acestei familii, curba $\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ F_t(x, y, t) = 0 \end{cases}$. În cazul de faţă $F_t = -3x + 2t = 0$ implică $t = \frac{3}{2}x$ şi înlocuind această expresie în ecuaţia lui Γ_t obţinem $y = \frac{3}{4}x^2$ ceea ce voiam.

6.14 Deoarece $\overline{r}'(t) = (\sin 2t, \cos 2t, -\sin t)$ avem planul normal π_{nor} : $\sin 2t\left(x - \sin^2 t\right) + \cos 2t\left(y - \frac{1}{2}\sin 2t\right) - \sin t\,(z - \cos t) = 0$ şi în final π_{nor} : $\sin 2tx + \cos 2ty - \sin tz = 0$. Deoarece termenul liber din ecuaţia lui π_{nor} este nul rezultă că originea aparţine planului normal.

6.15 Fie $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ unghiul făcut de tangentă $\overline{r}'(t)$ cu axele $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Avem: $\overline{r}'(t) = \left(1 - \cos t, \sin t, 2\cos\frac{t}{2}\right)$ şi $\|\overline{r}'(t)\| = 2$ de unde rezultă: $\cos\alpha(t) = \sin^2\frac{t}{2}, \cos\beta(t) = \frac{1}{2}\sin t, \cos\gamma(t) = \cos\frac{t}{2}$.

6.16 Cu notaţia $x = t$ obţinem $y = t, z = 2t^2$ şi deci avem curba C: $\overline{r}(t) = \left(t, t, 2t^2\right)$. Ecuaţia tangentei este: $\frac{x-t}{1} = \frac{y-t}{1} = \frac{z-2t^2}{4t}$ iar planul normal este $\pi_{nor} : x + y + 4tz - 2t - 8t^3 = 0$.

6.17 Mai întâi observăm că punctul dat este pe curbă. Cu substituţia $y = t$ rezultă: $x = t^2, z = t^4$ şi deci avem curba $C : \overline{r}(t) = \left(t^2, t, t^4\right)$ cu planul osculator $\pi_{osc} : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0$ şi în final $\pi_{osc} : 6x - 8y - z + 3 = 0$.

6.18

(i)

$$\overline{r}' = (0, 1, t), \overline{r}'' = (0, 0, 1), \overline{r}''' = (0, 0, 0)$$

$$\|\overline{r}'\| = \sqrt{1+t^2}, \overline{r}' \times \overline{r}'' = (1, 0, 0), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = 1, \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = 0$$

$$\begin{cases} \overline{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(0, 1, t) \\ \overline{b}(t) = (1, 0, 0) \\ \overline{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(0, -t, 1) \\ k(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \tau(t) = 0 \end{cases}.$$

(ii)

$$\overline{r}' = (-a\sin t, a\cos t, b), \overline{r}'' = (-a\cos t, -a\sin t, 0), \overline{r}''' = (a\sin t, -a\cos t, 0)$$

$$\|\overline{r}'\| = \sqrt{a^2 + b^2}, \overline{r}' \times \overline{r}'' = a(b\sin t, -b\cos t, a), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = a^2 b$$

$$\begin{cases} \bar{t}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(-a\sin t, a\cos t, b) \\ \bar{b}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(b\sin t, -b\cos t, a) \\ \overline{n}\,(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \\ k\,(t) = \frac{a}{a^2+b^2} \\ \tau\,(t) = \frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}.$$

Deci curbura şi torsiunea elicei sunt constante (şi proporţionale).

(iii)

$$\overline{r}' = \frac{1}{2}\left(1, -\frac{1}{t^2}, \frac{\sqrt{2}}{t}\right), \overline{r}'' = \frac{1}{2}\left(0, \frac{2}{t^3}, -\frac{\sqrt{2}}{t^2}\right), \overline{r}''' = \frac{1}{2}\left(0, -\frac{6}{t^4}, \frac{2\sqrt{2}}{t^3}\right), \|\overline{r}'\| = \frac{1}{2t^2}\left(1+t^2\right)$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = \frac{1}{4t^4}\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}t^2, 2t\right), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = \frac{\sqrt{2}}{4t^4}\left(1+t^2\right), \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4t^6}$$

$$\begin{cases} \bar{t}\,(t) = \frac{1}{1+t^2}\left(t^2, -1, \sqrt{2}t\right) \\ \bar{b}\,(t) = \frac{1}{1+t^2}\left(-1, t^2, \sqrt{2}t\right) \\ \overline{n}\,(t) = \frac{1}{1+t^2}\left(\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, 1-t^2\right) \\ k\,(t) = \frac{2\sqrt{2}t^2}{(1+t^2)^2} \\ \tau\,(t) = -\frac{2\sqrt{2}t^2}{(1+t^2)^2} \end{cases}.$$

(iv)

$$\overline{r}' = \left(2, \frac{1}{t}, 2t\right), \overline{r}'' = \left(0, -\frac{1}{t^2}, 2\right), \overline{r}''' = \left(0, \frac{2}{t^3}, 0\right), \|\overline{r}'\| = \frac{2t^2+1}{t}$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = \frac{2}{t^2}\left(2t, -2t^2, -1\right), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = \frac{2}{t^2}\left(1+2t^2\right), \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = -\frac{8}{t^3}$$

$$\begin{cases} \bar{t}\,(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(2t, 1, 2t^2\right) \\ \bar{b}\,(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(2t, -2t^2, 1\right) \\ \overline{n}\,(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(1-2t^2, -2t, 2t\right) \\ k\,(t) = \frac{2t}{(2t^2+1)^2} \\ \tau\,(t) = -\frac{2t}{(2t^2+1)^2} \end{cases}.$$

(v)

$$\overline{r}' = \left(1, 2t, 2t^2\right), \overline{r}'' = (0, 2, 4t), \overline{r}''' = (0, 0, 4), \|\overline{r}'\| = 2t^2+1$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = 2\left(2t^2, -2t, 1\right), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = 2\left(2t^2+1\right), \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = 8$$

$$\begin{cases} \bar{t}(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(1, 2t, 2t^2\right) \\ \bar{b}(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(2t^2, -2t, 1\right) \\ \overline{n}(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(-2t, 1-2t^2, 2t\right) \\ k(t) = \frac{2}{\left(2t^2+1\right)^2} \\ \tau(t) = \frac{2}{\left(2t^2+1\right)^2} \end{cases}.$$

(vi)

$$\overline{r}' = \left(1-\cos t, \sin t, -2\sin\frac{t}{2}\right), \overline{r}'' = \left(\sin t, \cos t, -\cos\frac{t}{2}\right),$$

$$\overline{r}''' = \left(\cos t, -\sin t, \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$\|\overline{r}'\| = 2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}, \overline{r}' \times \overline{r}'' = -2\sin^2\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}, 1\right)$$

$$\|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = 2\sqrt{2}\sin^2\frac{t}{2}, \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = \sin^3\frac{t}{2}$$

$$\begin{cases} \bar{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}, -1\right) \\ \bar{b}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}, 1\right) \\ \overline{n}(t) = \left(\cos\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2}, 0\right) \\ k(t) = \frac{1}{8\sin\frac{t}{2}} \\ \tau(t) = \frac{1}{8\sin\frac{t}{2}} \end{cases}.$$

(vii)

$$\overline{r}' = \left(a(\cos t - \sin t), a(\cos t + \sin t), -be^{-t}\right), \|\overline{r}'\| = \sqrt{2a^2 + b^2e^{-2t}}$$

$$\overline{r}'' = \left(a(-\sin t - \cos t), a(\cos t - \sin t), be^{-t}\right)$$

$$\overline{r}''' = \left(a(\sin t - \cos t), s(\cos t - \sin t), -be^{-t}\right), \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = -4a^2be^{-t}$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = 2a\left(be^{-t}\cos t, be^{-t}\sin t, a\right), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = 2a\sqrt{a^2 + b^2e^{-2t}}$$

$$\begin{cases} \bar{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{2a^2+b^2e^{-2t}}}\left(a(\cos t - \sin t), a(\sin t + \cos t), -be^{-t}\right) \\ \bar{b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2e^{-2t}}}\left(be^{-t}\cos t, be^{-t}\sin t, a\right) \\ \overline{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{(2a^2+b^2e^{-2t})(a^2+b^2e^{-2t})}}\begin{pmatrix} -a^2\cos t - \left(a^2+b^2e^{-2t}\right)\sin t, \\ \left(a^2+b^2e^{-2t}\right)\cos t - a^2\sin t, abe^{-t} \end{pmatrix} \\ k(t) = \frac{2a\sqrt{a^2+b^2e^{-2t}}}{(2a^2+b^2e^{-2t})^{\frac{3}{2}}} \\ \tau(t) = -\frac{be^{-t}}{a^2+b^2e^{-2t}} \end{cases}.$$

(viii)

$$\overline{r}' = e^t\left(a\left(\cos t - \sin t\right), a\left(\sin t + \cos t\right), b\right), \overline{r}'' = e^t\left(-2a\sin t, 2a\cos t, b\right)$$

$$\overline{r}''' = e^t\left(-2a\left(\cos t + \sin t\right), 2a\left(\cos t - \sin t\right), b\right),$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = ae^{2t}\left(b\left(\sin t - \cos t\right), -b\left(\cos t + \sin t\right), 2a\right), \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = 2a^2be^{3t}$$

$$\|\overline{r}'\| = e^t\sqrt{2a^2+b^2}, \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = \sqrt{2}ae^{2t}\sqrt{2a^2+b^2}$$

$$\begin{cases} \overline{t}\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{2a^2+b^2}}\left(a\left(\cos t - \sin t\right), a\left(\sin t + \cos t\right), b\right) \\ \overline{b}\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{2(2a^2+b^2)}}\left(b\left(\sin t - \cos t\right), -b\left(\sin t + \cos t\right), 2a\right) \\ \overline{n}\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\left(\sin t + \cos t\right), \cos t - \sin t, 0\right) \\ k\left(t\right) = \frac{\sqrt{2}a}{e^t(2a^2+b^2)} \\ \tau\left(t\right) = \frac{be^{-t}}{2a^2+b^2} \end{cases}.$$

6.19 Avem $\pi_{osc}\left(t\right) : \begin{vmatrix} x - x\left(t\right) & y - y\left(t\right) & z - z\left(t\right) \\ x'\left(t\right) & y'\left(t\right) & z'\left(t\right) \\ x''\left(t\right) & y''\left(t\right) & z''\left(t\right) \end{vmatrix} = 0$. Notând A, B, C minorii corespunzatori elemetelor din linia întâi rezultă:

$d^2\left(O, \pi_{osc}\left(t\right)\right) = \frac{\left(\overline{r}, \overline{r}', \overline{r}''\right)^2}{A^2+B^2+C^2}$ şi $\tau\left(t\right) = \frac{\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right)}{A^2+B^2+C^2}$ de unde relaţia cerută.

(i) Obţinem $\left(\overline{r}, \overline{r}', \overline{r}''\right) = \frac{20}{t^3}, \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = -\frac{120}{t^6}, f = -\frac{10}{3}$.

Observaţie: Curba dată se află pe suprafaţa Ţiţeica (ii) de la exerciţiul 7.31.

(ii) $\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = -8 \cdot 12\sqrt{3}, d^2\left(O, \pi_{osc}\right) = 12^2 \cdot 3, f = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6.20 Arătăm că $\overline{b}\left(t\right) = \frac{\overline{r}' \times \overline{r}''}{\|\overline{r}' \times \overline{r}''\|}$ este versor constant de unde obţinem că acea curbă este plană şi totodată ecuaţia planului osculator.

(i) $\overline{r}' = \left(\cos t, 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right), -\sin t\right), \overline{r}'' = -\left(\sin t, 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right), \cos t\right), \overline{r}' \times \overline{r}'' = \left(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}\right)$ deci concluzia şi $\pi_{osc} : \sqrt{2}x - y + \sqrt{2}z - \sqrt{2} = 0$.

(ii) $\overline{r}' = \left(2t, 2t, -\frac{1}{t}\right), \overline{r}'' = \left(2, 2, \frac{1}{t^2}\right), \overline{r}' \times \overline{r}'' = \frac{4}{t}\left(1, -1, 0\right)$ de unde concluzia şi $\pi_{osc} : x - y + 1 = 0$.

(iii) $\overline{r}' = \left(6t^2 + 2t, 2t - 2, 3t^2 + 1\right), \overline{r}'' = \left(12t + 2, 2, 6t\right), \overline{r}' \times \overline{r}'' = 2\left(3t^2 - 6t - 1\right)\left(1, -1, 2\right)$ de unde concluzia şi $\pi_{osc} : x - y - 2z - 2 = 0$.

6.21 Avem $\overline{r}' = \left(1, f'\left(t\right)\right), \overline{r}'' = \left(0, f''\left(t\right)\right)$ şi aplicăm, spre exemplu, punctul (i) de la problema 6.24.

6.22 Calcul imediat folosind exerciţiul precedent şi faptul că din relaţia $F\left(t, f\left(t\right)\right) = 0$ rezultă $f' = -\frac{F_x}{F_y}$ si $f'' = -\frac{F_x^2F_{yy} - 2F_xF_yF_{xy} + F_y^2F_{xx}}{F_y^3}$.

(ii) $k\left(x, y\right) = -\frac{a^4b^4}{\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

(iii) $k(x,y) = \frac{a^4b^4}{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}$

(iv) Folosind funcţia $F(x,y) = 2px - y^2$ avem $k(x,y) = \frac{p^2}{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

6.23 (i)-(vi) Verificări imediate.

(vii) Datorită punctului (v) putem spune că sensul trigonometric corespunde lui J.

Sensul orar este descris de ceas care este un oscilator armonic. Din legea a II-a a dinamicii $\overline{F} = m\overline{a}$ cum $\overline{F} = -kx$ iar $\overline{a} = \ddot{x}$ rezultă ecuaţia generală a oscilatorului armonic: $m\ddot{x} + kx = 0$ unde k este constanta elastică. Notând pulsaţia $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ecuaţia precedentă devine: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Dar ceasul are $\omega = 1$ bătând secunda şi deci ecuaţia ce guvernează ceasul este: $\ddot{x} + x = 0$ care se poate scrie, reducând la ordinul întâi:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

sau inca:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -J \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

În concluzie ceasul este descris de $(-J)$ ceea ce explică faptul că sensul orar este opus sensului trigonometric.

6.24 (i) Se verifică imediat. (ii) Din $\|\overline{r}(s)\|^2 = 1$ rezultă prin derivare $<\overline{r}''(s), \overline{r}'(s)>= 0$ deci $\overline{r}''(s)$ este vector paralel cu $J\overline{r}'(s)$ şi obţinem că factorul de proporţionalitate este $+k(s)$.

6.25 (i) $\overline{r}' = (-a\sin t, b\cos t), \overline{r}'' = (-a\cos t, -b\sin t)$,

$k(t) = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$. Spre exemplu, $k(0) = \frac{a}{b^2}, k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{b}{a^2}, k\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{ab}{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

(ii) $\overline{r}' = (asht, bcht), \overline{r}'' = (acht, bsht), k(t) = \frac{-ab}{(a^2sh^2t+b^2ch^2t)^{\frac{3}{2}}}$. Spre exemplu, $k(0) = -\frac{a}{b^2}$ si $\lim\limits_{t\to\pm\infty} k(t) = 0$ ceea ce confirmă faptul că hiperbola are asimptote!

(iii) $\overline{r}' = (t\cos t, t\sin t), \overline{r}'' = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t), k(t) = \frac{1}{t}$

(iv) $k(t) = \frac{e^{-kt}}{R\sqrt{k^2+1}}$

(v) $k(t) = \frac{-1}{4R\sin\frac{t}{2}}$

Fig. 3 Cicloida cu $R = 1$ pentru $t \in (-5, 5)$.

(vi) $k = -\frac{1}{3R \sin t \cos t}$.
6.26 (i) $k(x, y) = \frac{-2a^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

Fig. 4 Hiperbola echilateră cu $a = 2$ cu $x, y \in (-5, 5)$.

(ii) $k(1, -1) = 4\sqrt{2}$
(iii) $k(x, y) = \frac{-a\sqrt{3}}{\sqrt{x(3x+2a)}}$.
6.27 Folosim formula de la exerciţiul 6.24 (i) şi relaţiile imediate:

$$\begin{cases} x' = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi \\ y' = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \rho'' \cos\varphi - 2\rho' \sin\varphi - \rho\cos\varphi \\ y'' = \rho'' \sin\varphi + 2\rho' \cos\varphi - \rho\sin\varphi \end{cases}.$$

Astfel avem că $x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2$.

(i) $k(\varphi) = \frac{3}{a}\sqrt{\cos 2\varphi}$

(ii) $k(\varphi) = \frac{4}{3a\sin^2\frac{\varphi}{3}}$

(iii) $k(\varphi) = \frac{17+15\cos^2 4\varphi}{a(1+15\cos^2 4\varphi)^{\frac{3}{2}}}$

Fig. 5 Curba dată cu $a = 1$şi $\varphi \in (-5, 5)$.

6.28 (i)

A) *Curbele cilindrice eliptice* au reprezentarea:

$$\overline{r}(t) = (\cos t, \sin t, f(t))$$

pentru $f \in C^\infty\left(I\!R^3\right)$. Au fost folosite de Gheorghe Vrânceanu (1900-1979) în conexiune cu teoremele Levi-Civita şi Fenchel din teoria suprafeţelor în:

Vrânceanu, Gh., *Sur les courbes cylindriques fermées* , Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., 21(1976), no. 5, 601-607.

Rezultă:

$$\begin{cases} \overline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, f'(t)) \\ \overline{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t, f''(t)) \\ \overline{r}'''(t) = (\sin t, -\cos t, f'''(t)) \end{cases}$$

$$\|\overline{r}'(t)\| = \sqrt{1 + f'^2(t)}$$

şi deci:

$$\overline{t}(t) := \frac{\overline{r}'(t)}{\|\overline{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(t)}}\left(-\sin t, \cos t, f'(t)\right).$$

Din:

$$\overline{r}'(t)\times\overline{r}''(t)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -\sin t & \cos t & f'(t)\\ -\cos & -\sin t & f''(t)\end{vmatrix}=$$

$$=\left(f''(t)\cos t+f'(f)\sin t, f''(t)\sin t-f'(t)\cos t,1\right)$$

$$\|\overline{r}'(t)\times\overline{r}''(t)\|=\sqrt{1+f'^2(t)+f''^2(t)}$$

rezultă:

$$\overline{b}(t):=\frac{\overline{r}'\times\overline{r}''}{\|\overline{r}'\times\overline{r}''\|}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+f''^2}}\left(f''\cos t+f'\sin t, f''\sin t-f'\cos t,1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+f'^2\right)\left(1+f'^2+f''^2\right)}}\overline{n}(t)=$$

$$=\left(f'f''\sin t-\left(1+f'^2\right)\cos t,-f'f''\cos t-\left(1+f'^2\right)\sin t,f''\right)$$

$$k(t):=\frac{\|\overline{r}'\times\overline{r}''\|}{\|\overline{r}'\|^3}=\frac{1}{1+f'^2}\sqrt{\frac{1+f'^2+f''^2}{1+f'^2}}.$$

În determinantul:

$$\left(\overline{r}',\overline{r}'',\overline{r}'''\right)=\begin{vmatrix}-\sin t & \cos t & f'\\ -\cos t & -\sin t & f''\\ -\sin t & -\cos t & f'''\end{vmatrix}$$

adunăm ultima linie la prima:

$$\left(\overline{r}',\overline{r}'',\overline{r}'''\right)=\begin{vmatrix}0 & 0 & f'+f''\\ -\cos t & -\sin t & f''\\ -\sin t & -\cos t & f'''\end{vmatrix}=f'+f'''$$

ceea ce dă:

$$\tau(t):=\frac{\left(\overline{r}',\overline{r}'',\overline{r}'''\right)}{\|\overline{r}'\times\overline{r}''\|}=\frac{f'+f'''}{1+f'^2+f''^2}.$$

Exemple. În lucrarea citată la începutul soluţiei sunt date două exemple:
(1) $f(t)=\cos 2t$ (pag. 605)
(2) $f(t)=\sin 2t$ (pag. 607)
B) *Curbele cilindrice hiperbolice* au reprezentarea:

$$\overline{r}(t)=\left(cht, sht, f(t)\right).$$

După un calcul analog celui precedent obţinem:

$$\begin{cases} \overline{r}'(t) = (sht, cht, f'(t)) \\ \overline{r}''(t) = (cht, sht, f''(t)) \\ \overline{r}'''(t) = (sht, cht, f'''(t)) \end{cases}$$

$$\|\overline{r}'(t)\| = \sqrt{ch^2t + sh^2t + f'^2(t)}$$

$$\overline{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{ch^2t + sh^2t + f'^2(t)}}\big(sht, cht, f'(t)\big)$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = \big(f''cht - f'sht, f'cht - f''sht, -1\big)$$

$$\|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = \sqrt{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2t + sh^2t) - 4f'f''chtsht}$$

$$\overline{b}(t) = \frac{1}{\|\overline{r}' \times \overline{r}''\|}\big(f''cht - f'sht, f'cht - f''sht, -1\big)$$

$$\|\overline{r}'\|\|\overline{r}' \times \overline{r}''\|\overline{n}(t) =$$

$$= \left(\left(f'^2 + 1\right)cht - f'f''sht, \left(f'^2 - 1\right)sht - f'f''cht, f''\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} - f'\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right)$$

$$k(t) = \frac{\sqrt{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2t + sh^2t) - 4f'f''chtsht}}{(ch^2t + sh^2t + f'^2)\sqrt{ch^2t + sh^2t + f'^2}}.$$

Din:

$$\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = \begin{vmatrix} sht & cht & f' \\ cht & sht & f'' \\ sht & cht & f''' \end{vmatrix} \overset{\text{linia 3-linia 1}}{=} \begin{vmatrix} sht & cht & f' \\ cht & sht & f'' \\ 0 & 0 & f''' - f' \end{vmatrix} = f' - f'''$$

rezultă:

$$\tau(t) = \frac{f' - f'''}{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2t + sh^2t) - 4f'f''chtsht}.$$

(ii)

A) Avem că distanţa de la origine la planul osculator este:

$$d(t) = \frac{|(f''\cos t + f'\sin t)(-\cos t) + (f''\sin t - f'\cos t)(-\sin t) - f|}{\sqrt{1 + f'^2 + f''^2}} =$$

$$= \frac{\pm(f + f'')}{\sqrt{1 + f'^2 + f''^2}}.$$

Presupunem satisfacută conditia Ţiţeica cu constanta $K \neq 0$, deoarece curba nu este într-un plan:

$$\frac{\tau(t)}{d^2(t)} = K = \frac{f'(t) + f'''(t)}{(f(t) + f''(t))^2}.$$

Prin integrare rezultă:

$$\frac{1}{f(t) + f''(t)} = -(Kt + C)$$

cu C o constantă reală. Scriem ultima relaţie sub forma:

$$f''(t) + f(t) = \frac{-1}{Kt + C}.$$

Dar această ecuaţie diferenţiala este exact de tipul oscilatorului armonic forţat (" forced harmonic oscillator"):

$$\ddot{x}(t) + x(t) = g(t)$$

care are soluţia generală:

$$x(t) = x(0)\cos t - \dot{x}(0)\sin t + \int_0^t g(u)\sin(u-t)\,du$$

În concluzie:

O curbă cilindrică eliptică este Ţiţeica dacă şi numai dacă:

$$f(t) = f(0)\cos t - \dot{f}(0)\sin t - \int_0^t \frac{\sin(u-t)}{Ku + C}du$$

cu $f(0), \dot{f}(0), K \neq 0, C$ constante reale.

B) Avem:

$$d(t) = \frac{|(f''cht - f'sht)(-cht) + (f'cht - f''sht)(-sht) + f|}{\sqrt{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2t + sh^2t) - 4f'f''chtsht}} =$$

$$= \frac{\pm(f - f'')}{\sqrt{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2t + sh^2t) - 4f'f''chtsht}}.$$

Dacă avem condiţia Ţiţeica:

$$\frac{\tau(t)}{d^2(t)} = K = \frac{f' - f'''}{(f - f'')^2}$$

o integrare dă:

$$\frac{1}{f - f''} = -(Kt + C)$$

sau încă:

$$f'' - f = \frac{1}{Kt + C}.$$

Folosind identitatea:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{pmatrix}$$

rezultă:

O curbă cilindrică hiperbolică este Ţiţeica dacă şi numai dacă:

$$f(t) = f(0)\,cht + \dot{f}(0)\,sht + \int_0^t \frac{sh(t+u)}{Ku + C}$$

cu $f(0), \dot{f}(0), K \neq 0$ *şi* C *constante reale.*

Rezolvarea acestui punct urmăreşte lucrarea:

Crâşmăreanu, M., *Cylindrical Tzitzeica curves implies harmonic oscillators*, Balkan J. of Geometry and Its Applications, 7(2002), no. 1, 37-43.

6.29 Pe spaţiul E^n avem produsul scalar:

$$E^n \times E^n \ni (x, y) \to < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{y}^i \in E$$

unde am notat $x = (x^1, \ldots, x^n)$ iar prin $\overline{x}^i$ conjugatul lui x^i. Definim atunci $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.

În lucrarea:

Wong, Y. C., *Frenet formulas for curves in real, complex and quaternionic euclidian spaces*, Differential geometry in honor of K. Yano, Kinokuniya, Japan, 1972, 525-545,

este demonstrată următoarea:

Propoziţie. *Fie în* E^n *cu n impar, o curbă de clasă* C^∞, *parametrizată canonic* $C : x = x(s)$. *Presupunem că vectorii* $\frac{dx}{ds}(s), \ldots, \frac{d^n x}{ds^n}(s)$ *sunt liniari independenţi pentru orice* s. *Atunci există un unic reper ortonormat* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *de-a lungul lui* C *satisfăcând ecuaţiile:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = e_1 \\ \frac{de_1}{ds} = h_1 e_1 + k_1 e_2 \\ \frac{de_2}{ds} = -k_1 e_1 + h_2 e_2 + k_2 e_3 \\ \ldots \\ \frac{de_{n-1}}{ds} = -k_{n-2} e_{n-2} + h_{n-1} e_{n-1} + k_{n-1} e_n \\ \frac{de_n}{ds} = -k_{n-1} e_{n-1} + h_n e_n \end{cases}$$

unde:

(i) funcţiile $k_1(s), \ldots, k_{n-1}(s)$ *sunt cu valori reale,* $k_1 > 0, \ldots, k_{n-2} > 0$

(ii) funcţiile $h_1(s), \ldots, h_n(s)$ *sunt cu valori în* E *şi au părţile reale nule.*

Funcţiile $k_1, \ldots, k_{n-1}$ se numesc *curburi primare* iar funcţiile $h_1, \ldots, h_n$ se numesc *curburi secundare.*

6.30 A) Avem:

$$\begin{cases} \overline{r}'(t) = (-f', f'', -f''') \\ \overline{r}''(t) = \left(-f'', f''', -f^{(iv)}\right) \\ \overline{r}'''(t) = \left(-f''', f^{(iv)}, -f^{(v)}\right) \end{cases}$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = \left(f'''^2 - f'' f^{(iv)}, f'' f''' - f' f^{(iv)}, f''^2 - f' f'''\right)$$

$$\|\overline{r}' \times \overline{r}''\|^2 = \left(f'''^2 - f'' f^{(iv)}\right)^2 + \left(f'' f''' - f' f^{(iv)}\right)^2 + \left(f''^2 - f' f'''\right)^2$$

$$\|\overline{r}'\|^2 = f'^2 + f''^2 + f'''^2$$

$$k = \frac{\left[\left(f'''^2 - f'' f^{(iv)}\right)^2 + \left(f'' f''' - f' f^{(iv)}\right)^2 + \left(f''^2 - f' f'''\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(f'^2 + f''^2 + f'''^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = f^{(v)}\left(f' f''' - f''^2\right) + f^{(iv)}\left(f'' f''' - f' f^{(iv)}\right) + f'''\left(f'' f^{(iv)} - f'''^2\right)$$

$$\tau = \frac{f^{(v)}\left(f' f''' - f''^2\right) + f^{(iv)}\left(f'' f''' - f' f^{(iv)}\right) + f'''\left(f'' f^{(iv)} - f'''^2\right)}{\left(f'''^2 - f'' f^{(iv)}\right)^2 + \left(f'' f''' - f' f^{(iv)}\right)^2 + \left(f''^2 - f' f'''\right)^2}.$$

Exemple:

(i) $\overline{r}(t) = (-\cos t, -\sin t, \cos t)$

(ii) $\overline{r}(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t)$

Nodurile olonome au fost introduse ca extensie în sensul 2-jeturilor a funcţiei periodice f în lucrarea:

Vassiliev, V. A., *Holonomic Links and Smale Principles for Multisingularities*, J. Knot Theory and Its Ramifications, 6(1997), no. 1, 115-123.

B) Din relaţia dată rezultă:

$$f''' = \left(a^2 + b\right) f' + abf$$

$$f^{(iv)} = \left(a^3 + 2ab\right) f' + \left(a^2 b + b^2\right) f$$

$$f^{(v)} = \left(a^4 + 3a^2 b + b^2\right) f' + \left(a^3 b + 2ab^2\right) f$$

şi deci:

$$\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} -f' & af' + bf & -\left(a^2 + b\right) f' - abf \\ -af' - bf & \left(a^2 + b\right) f' + abf & -f^{(iv)} \\ -\left(a^2 + b\right) f' - abf & \left(a^3 + 2ab\right) f' + \left(a^2 b + b^2\right) f & -f^{(v)} \end{vmatrix} =$$

(prin înmulţirea primei linii cu $(-a)$ şi adunarea la a doua, respectiv înmulţirea primei linii cu $\left(-a^2 - b\right)$ şi adunarea la a treia)

$$= \begin{vmatrix} -f' & af' + bf & -\left(a^2 + b\right) f' - abf \\ -bf & bf' & -abf' - b^2 f \\ -abf & abf' & -a^2 bf' - ab^2 f \end{vmatrix} = 0$$

deoarece ultima linie este egală cu a doua înmulţită cu a. Astfel se explică faptul că pentru cele două exemple de mai sus, în care avem $b = -1$ şi $a = 0$, torsiunea este nulă!

Mai general, dacă $f'' = af' + bf + c$, atunci se obţine cu Maple:

$$\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = -c\left[-2ab^2 f'^2 + 2a^2 b^2 ff' + 2ab^3 f^2 + cf'\left(a^4 + b^2 + 3a^2 b\right) + abcf\left(a^2 + 2b\right)\right]$$

ceea ce dă prin particularizarea $c = 0$ cazul precedent.

6.31 (i) Fie $m(s_0)$ centrul sferei osculatoare. Notând:

$$m(s_0) = c(s_0) + \alpha\overline{t}(s_0) + \beta\overline{n}(s_0) + \gamma\overline{b}(s_0)$$

vom determina α, β, γ. Astfel, derivăm funcţia $d(s) =< m - \overline{r}(s), m - \overline{r}(s) >$:

$$\begin{cases} d' = -2 < m - \overline{r}(s), \overline{r}'(s) > \\ d'' = -2 < m - \overline{r}(s), \overline{r}''(s) > +2 < \overline{r}'(s), \overline{r}'(s) > \\ d''' = -2 < m - \overline{r}(s), \overline{r}'''(s) > \end{cases}.$$

Contact optim va fi când vom avea cât mai multe derivate nule în s_0. Avem:

$$d'(s_0) = 0 \Leftrightarrow < m - \overline{r}(s_0), \overline{t}(s_0) >= 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$d''(s_0) = 0 \Leftrightarrow < m - \overline{r}(s_0), \overline{r}''(s_0) > -1 = 0 \Leftrightarrow \beta k = 1$$

$$d'''(s_0) = 0 \Leftrightarrow < m - \overline{r}(s_0), \overline{r}'''(s_0) >= 0 \Leftrightarrow < m - \overline{r}(s_0), k'\overline{n} - k^2\overline{t} + k\tau\overline{b} >= 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k'}{k} + k\tau\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\,\tau(s_0)}.$$

(ii) Impunem condiţia ca funcţia $m(s)$ definită la punctul anterior să fie constantă. Deci:

$$\left(\overline{r} + \frac{1}{k}\overline{n} - \frac{k'}{k^2\tau}\overline{b}\right)' = \left[\frac{\tau}{k} - \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)'\right]\overline{b} = \overline{0}$$

ceea ce dă concluzia.

(iii) Din ipoteză rezultă că vectorii $\overline{r}, \overline{r}', \overline{r} \times \overline{r}'$ constituie o bază ortonormată. Avem:

$$\overline{r}'' = < \overline{r}'', \overline{r} > \overline{r} + < \overline{r}'', \overline{r}' > \overline{r}' + < \overline{r}'', \overline{r} \times \overline{r}' > \overline{r} \times \overline{r}'.$$

Deoarece: $< \overline{r}'', \overline{r} >= - < \overline{r}, \overline{r} >= -1$ rezulta: $\overline{r}'' = -\overline{r} + J\overline{r} \times \overline{r}''$ si deci:

$$k^2 = < \overline{r}'', \overline{r}'' >= 1 + J^2.$$

De asemeni: $\overline{n} = \frac{1}{k}\overline{r}'', \overline{b} = \overline{r}' \times \overline{n}$ si $< \overline{r}''', \overline{r} >= 0$ implică:

$$\tau = - < \overline{b}', \overline{n} >= - < \left(\frac{1}{k}\overline{r}' \times \overline{r}''\right)', \frac{1}{k}\overline{r}'' >= -\frac{1}{k^2} < \overline{r}' \times \overline{r}'', \overline{r}'' > + \frac{k'}{k^3} < \overline{r}' \times \overline{r}'', \overline{r}'' >=$$

$$= -\frac{1}{k^2} < \overline{r}' \times \overline{r}''', -\overline{r} + J\overline{r} \times \overline{r}' >= \frac{J'}{k^2}.$$

Ultima egalitate rezultă din faptul că $\overline{r}'''$ este perpendicular pe $\overline{r}$ şi în consecinţă $\overline{r}' \times \overline{r}'''$ este perpendicular pe $\overline{r}' \times \overline{r}$.

Rezolvarea acestui exerciţiu urmăreşte teorema 2.10, p. 20-22 din:

Kuhnel, W., *Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library, vol. 16, A.M.S., 2002.

CAPITOLUL 7

Suprafeţe: Probleme

7.1 Enunţuri

7.1 Pentru suprafaţa $S: x = u^2 + u + v, y = v^2 + u - v, z = u - v$ curbele de coordonate(u=constant respectiv v=constant) sunt curbe plane.

7.2 Să se arate că intersecţia suprafeţelor $S_1 : x + y + z = 0$, $S_2 : x^2 + xy + y^2 = 2$ se află pe sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

7.3 Se cere planul tangent şi normala la suprafaţa $S : z\left(x^2 + y^2\right) = 1$ în punctul $M\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$.

7.4 Se cere planul tangent şi normala la suprafaţa $S : x = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}, y = \frac{u^3+v^3}{u^2+v^2}, z = \frac{uv-1}{u^2+v^2}$ în punctul $M\left(u = 1, v = 1\right)$.

7.5 Se consideră curba C de intersecţie a suprafeţelor $S_1 : x^2+y^2+z^2 = 3$ (sferă centrată în origine), $S_2 : 2x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ (con centrat în origine). Se cere ecuaţia dreptei tangente în $M\left(1, 1, 1\right)$ la C.

7.6 Pentru suprafaţa $S : x = u + v, y = u - v, z = uv$ se cer:

(i) coordonatele carteziene ale punctelor $M_1\left(u = 2, v = 1\right), M_2\left(u = 1, v = 2\right)$

(ii) să se stabilească dacă punctele $M_3\left(4, 2, 3\right), M_4\left(1, 4, -2\right)$ aparţin lui S

(iii) ecuaţia implicită.

7.7 Pentru suprafaţa $S : x = u^2 + v, y = u^2 - v, z = uv$ să se arate că:

(i) curbele $u = u_0 \neq 0$ sunt drepte iar curbele $v = v_0$ sunt curbe plane

(ii) curba $u = v$ este curbă plană.

7.8 Se cere suprafaţa cilindrică cu generatoarele paralele cu dreapta d şi având curba directoare C unde:

(i) $d : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z + 0 \end{cases}, C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ (cerc)

(ii) $d : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}, C : \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$

(iii) d are vectorul director(direcţia) $\overline{a} = (2, 3, 4)$,
$C : \begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

7.9 Se cere suprafaţa conică având vârful V şi curba directoare C unde:

(i) $V(0,0,0), C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 - z^2 = 1 \end{cases}$

(ii) $V(0,0,0), C : \begin{cases} y^2 = x \\ 4x + 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

(iii) $V(1,1,1), C : \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^2 = xy \\ z = 0 \end{cases}$

(iv) $V(0,-a,0), C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

7.10 Se cere suprafaţa conoidă:

(i) generată de o dreaptă paralelă cu planul $\pi = xOy$, ce se sprijină pe curba C=axa Oz şi dreapta $d : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

(ii) generată de o dreaptă paralelă cu planul $\pi = xOy$, ce se sprijină pe curba C=hiperbola $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ şi dreapta $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

(iii) generată de o dreaptă paralelă cu planul $\pi = yOz$, ce se sprijină pe curba $C : \begin{cases} z^2 = 2x \\ 9y^2 = 16xz \end{cases}$ şi dreapta d=axa Ox.

7.11 Fie S o suprafaţă de rotaţie având axa Oz ca axă de rotaţie. Să se arate că ecuaţiile lui S sunt: $\begin{cases} x = \varphi(u)\cos v \\ y = \varphi(u)\sin v \\ z = \psi(u) \end{cases}$ alegând curba meridian în planul xOz astfel $C : \begin{cases} x = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{cases}$.

Se cere studiul următoarelor suprafeţe după algoritmul:

-primele două forme fundamentale,

-curbura medie şi curbura totală,

-linii remarcabile: asimptotice, de curbură, geodezice.

7.12 Planul determinat de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorii necoliniari $\overline{a} = (a, a_2, a_3), \overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

7.13 O suprafaţă de rotaţie cu axa de rotaţie Oz folosind parametrizarea din problema 2.11. Cazuri particulare:

(i) cilindrul circular drept cu R raza bazei,

(ii) curba meridian este parametrizată canonic.

Pentru cazul (ii) să se studieze când:

(iii) curbura medie şi curbura totală sunt constante?

7.14 Sfera de rază R centrată în origine.

2.15 (*Suprafaţa Enneper*) $S : \begin{cases} x = 3u + 3uv^2 - u^3 \\ y = 3v + 3u^2 v - v^3 \\ z = 3\left(u^2 - v^2\right) \end{cases}$

7.16 (*Elicoidul*) $S : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \sin v \\ z = hv \end{cases}$ cu $h > 0$ o constantă reală.

7.17 O suprafaţă explicită $S : z = f(x, y)$ folosind notaţiile lui *Monge*: $p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$.

7.18 (*Paraboloidul hiperbolic*) $S : z = xy$.

7.19 (*Pseudosfera*) $S : \begin{cases} x = R \sin u \cos v \\ y = R \sin u \sin v \\ z = R\left(\cos u + \ln tg\frac{u}{2}\right) \end{cases}$ pentru $tg\frac{u}{2} > 0$.

7.20 (*Torul*) $T_{R,r} : \begin{cases} x = (R + r\cos u)\cos v \\ y = (R + r\cos u)\sin v \\ z = r \sin u \end{cases}$ cu $0 < r < R$. Torul $T_{R,r}$ se obţine prin rotirea cercului de centru $(R, 0, 0)$ şi rază r din planul xOz în jurul axei Oz.

7.21 (*Banda lui Möbius*) $S : \begin{cases} x = \cos u\left(1 + v \sin\frac{u}{2}\right) \\ y = \sin u\left(1 + v\sin\frac{u}{2}\right) \\ z = v\cos\frac{u}{2} \end{cases}$.

7.22 $S : \begin{cases} x = a(\cos u - v \sin u) \\ y = a(\sin u + v\cos u) \\ z = b(u + v) \end{cases}$ cu $a, b > 0$.

7.23 $S : \begin{cases} x = v \sin\varphi \cos u \\ y = v\sin\varphi\sin u \\ z = v\cos\varphi \end{cases}$ cu $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

7.24 (*Unghiul dintre 2 curbe pe o suprafaţă*) Fie pe suprafaţa S două curbe având tangentele $d\overline{r} = r_u du + r_v dv, \delta\overline{r} = r_u \delta u + r_v \delta v$ într-un punct în care se intersectează. Definim unghiul φ dintre cele 2 curbe în punctul comun prin:

$$\cos\varphi = \frac{< d\overline{r}, \delta\overline{r} >}{\|d\overline{r}\| \|\delta\overline{r}\|}.$$

Să se arate că:

$$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F\left(du\delta v + \delta u dv\right) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\cdot\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

7.25 Pe paraboloidul $S : x^2 + y^2 = 2\rho z$ se dau curbele $C_1 : x = y, C_2 : z = a$. Se cere unghiul dintre cele două curbe, cu a, ρ constante nenule.

7.26 Pe suprafaţa $S : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u\left(1 + v\right) \end{cases}$ se cere unghiul dintre curbele coordonate şi unghiurile dintre curba $C : u + v = 0$ şi curbele coordonate.

7.27 (i) Folosind ecuaţiile parametrice de la problema 2.11 să se obţină următoarea formulă pentru curbura totală a suprafeţelor de rotaţie cu axa Oz ca axă de rotaţie:

$$K = \frac{\psi'\left(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'\right)}{\varphi\left(\left(\varphi'\right)^2 + \left(\psi'\right)^2\right)^2}$$

(ii) Folosind formula precedentă se cer suprafeţele de rotaţie având curbura totală constantă negativă.

7.28 Se cere locul geometric al punctelor parabolice ale suprafeţei $S : \begin{cases} x = u + v \\ y = uv \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}.$

7.29 Să se arate că toate punctele suprafeţei $S : x + y = z^3$ sunt parabolice.

7.30 Să se arate că toate punctele suprafeţei $S : \begin{cases} x = shu \\ y = chu\cos v \\ z = chu\sin v \end{cases}$ sunt hiperbolice.

7.31 (*Suprafeţe Ţiţeica*) O suprafaţă S se numeşte *suprafaţă Ţiţeica* dacă:

a) curbura totală K este nenulă pe S

b) $\frac{K}{d^4}$ este o constantă unde d este distanţa de la origine la planul tangent în punctul curent al lui S.

Să se arate:

(i) sfera este suprafaţă Ţiţeica.

(ii) $S : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{uv} \end{cases}$ este suprafaţă Ţiţeica.

(iii) Pentru o suprafaţă Ţiţeica având curbura totală negativă liniile asimptotice sunt curbe Ţiţeica.

7.32 (*Expresii ale curburii totale*) (i) Fie o suprafaţă în *coordonate semi-geodezice*(sau *coordonate polare geodezice*) adică forma I-a fundamentală are expresia $ds^2 = g = dr^2 + G(r,\varphi)\,d\varphi^2$. Să se arate că $K = -\frac{\partial_r^2 \sqrt{G}}{\sqrt{G}}$. Să se studieze cazul $K = -1$.

(ii) Mai general, să se arate că pentru o parametrizare ortogonală i.e. $F = 0$, avem:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right]$$

unde indicele inferior reprezintă variabila în raport cu care se derivează.

(iii) (*Reţele Cebîşev*) O parametrizare a unei suprafeţe pentru care $g_{11} = g_{22} = 1, g_{12} = \cos\varphi$ se numeşte *reţea Cebîşev*. Să se arate că:

$$K = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}.$$

7.33 Fie o suprafaţă de rotaţie de ecuaţie $S : x^2 + y^2 = f^2(z)$. Cu parametrizarea $\begin{cases} x = f(u)\cos v \\ y = f(u)\sin v \\ z = u \end{cases}$ să se arate că forma I-a fundamentală este $g = \left(1 + f'^2(u)\right)du^2 + f^2(u)\,dv^2$ iar curbura totală este $K = -\frac{f''(u)}{f(u)\left(1+f'^2(u)\right)^2}$. Să se studieze cazul $K = -1$. Să se calculeze K în cazul sferei de rază R când $f(u) = \sqrt{R^2 - u^2}$.

7.34 Fie o suprafaţă de rotaţie de ecuaţie $S : z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Cu parametrizarea $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = f(u) \end{cases}$ să se arate că forma I-a fundamentală este $g = \left(1 + f'^2(u)\right)du^2 + u^2dv^2$ iar curbura totală este $K = -\frac{1}{u\sqrt{1+f'^2(u)}}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(u)}}\right) = -\frac{\varphi'(u)}{2u}$ cu notaţia $\varphi(u) = \frac{1}{1+f'^2(u)}$. Să se studieze cazurile $K = -1$ şi $K = 0$.

7.35 Fie S un domeniu în $I\!R^2$ considerat ca suprafaţă şi pentru care forma I-a fundamentală este conformă cu metrica lui $I\!R^2$ adică $g_{ij} = E\delta_{ij} = e^{2v}\delta_{ij}$. Presupunând $E = E(r), v = v(r)$ să se arate că:

$$K = -\frac{1}{2E^2}\left(E''(r) + \frac{1}{r}E'(r)\right)^2 = -\left(v''(r) + \frac{1}{r}v'(r)\right)e^{-2v}.$$

(i) Să se studieze cazul $K = -1$.

(ii) Se cere K pentru $g_{ij} = \frac{4}{(1-r^2)^2}\delta_{ij}$.

7.36 Pentru suprafaţa $S : z = f(x, y)$ şi punctul $p = (x, y, f(x, y))$ să se arate că:

$$K(p) = \left(1 + \|\nabla f(x, y)\|^2\right)^{-2} \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)(x, y).$$

7.37 Să se arate că simbolii Christoffel pentru suprafaţa $S : \overline{r} = \overline{r}\left(u^1, u^2\right)$ sunt daţi de relaţia:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{1j}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial g_{2j}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^2} \end{pmatrix}.$$

7.38 (i) Se dă suprafaţa S în coordonatele semigeodezice, conform exerciţiului 2.32(i). Se cer simbolii Christoffel.

(ii) Să se aplice calculul precent la elicoid.

(iii) Se cer simbolii Christoffel pentru o reţea Cebîşev, conform exerciţiului 2.32(iii).

7.39 (*Aplicaţii conforme*) Fie un domeniu simplu conex $W \subset \mathbb{C}$. Aplicaţia $X : W \to I\!R^3$ se numeşte *conformă* dacă:

$$\|\frac{\partial X}{\partial x}\|^2 - \|\frac{\partial X}{\partial y}\|^2 = < \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} > = 0.$$

Să se studieze proprietăţile suprafeţei $S = X(W)$.

7.40 (*Reprezentarea Weierstrass a suprafeţelor minimale*) Folosind exerciţiul anterior să se definească suprafeţele minimale ca imagini de aplicaţii conforme speciale şi să se deducă reprezentarea Weierstrass. Să se deducă o interpretare a aplicaţiei Gauss.

7.41 (*Geometria reprezentării Weierstrass*) Pentru o suprafaţă minimală să se exprime elementele geometrice în funcţie de datele reprezentării Weierstrass.

7.42 (*Exemple de suprafeţe minimale*) (i) Precizând convenabil datele reprezentării Weierstrass să se obţină exemple de suprafeţe minimale.

(ii) Sa se scrie diferite forme ale ecuatiei suprafetelor minimale.

7.43 (*Curbura Gauss a hipersuprafeţelor*) Să se definească curbura Gauss a hipersuprafeţelor şi pentru hipersuprafeţe definite implicit să se dea o formulă de calcul.

7.44 (*Ecuaţii Gauss-Codazzi*) (i) Să se scrie ecuaţiile Gauss-Codazzi pentru suprafeţe conforme.

(ii) Să se aplice la suprafeţe minimale.

7.45 Ca aplicaţie a ecuaţiei Gauss să se arate că nu există o suprafaţă S cu:

(i) forma I-a fundamentală $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi forma a II-a fundamentală $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $g = \begin{pmatrix} 1 + \left(u^1\right)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^1 \end{pmatrix}$.

7.46 (*Formulele Gauss-Weingarten*) Fie suprafaţa $S : \overline{r} = \overline{r}\left(u^1, u^2\right)$. Să se arate că au loc:

$$\begin{cases} \overline{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \overline{r}_k + b_{ij}\overline{N} \text{ (formulele Gauss)} \\ \overline{N}_i = -b_i^k \overline{r}_k \text{ (formulele Weingarten)} \end{cases}.$$

7.47 (*Geodezice*) O curbă pe suprafaţa S se numeşte *geodezică* dacă vectorul acceleraţie este normal la S. Folosind formula Gauss se cere ecuaţia geodezicelor.

7.2 Soluţii

7.1 Notăm $\overline{r}_{u_0}$ respectiv $\overline{r}_{v_0}$ curba de coordonată $u = u_0 = const.$ respectiv $v = v_0 = const.$ Avem $\overline{r}_{u_0} = \left(u_0^2 + u_0 + v, v^2 + u_0 - v, u_0 v\right)$ de unde rezultă $\overline{r}_{u_0}''' = \overline{0}$ şi deci torsiunea curbei $\overline{r}_{u_0}$ este nulă adică această curbă este plană. Analog $\overline{r}_{v_0}''' = \overline{0}$.

7.2 Fie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Rezultă, ţinând cont de S_1, $F(x, y, -x-y) = 2\left(x^2 + y^2 + xy - 2\right)$ de unde rezultă că restricţia lui $F(x, y, -x-y)$ pe S_2 este nulă, ceea ce voiam.

7.3 Se observă mai întâi că $M \in S$. Notând $F(x, y, z) = z\left(x^2 + y^2\right) - 1$ avem $\nabla F = \left(2xz, 2yz, x^2 + y^2\right)$ deci $\nabla F(M) = \overline{N}(M) = (1, 1, 2)$ de unde rezultă $T_M S : x + y + x - 3 = 0$ şi normala ca dreaptă: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1/2}{2}$.

7.4 Coordonatele carteziene ale lui M sunt $(0, 1, 0)$. Avem

$$\begin{cases} \overline{r}_u = \left(\frac{4uv^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}, \frac{u\left(u^3+3uv^2-2v^3\right)}{\left(u^2+v^2\right)^2}, \frac{-u^2v+2u+v^3}{\left(u^2+v^2\right)^2}\right) \\ \overline{r}_v = \left(\frac{-4u^2v}{\left(u^2+v^2\right)^2}, \frac{v\left(v^3+3vu^2-u^3\right)}{\left(u^2+v^2\right)^2}, \frac{-v^2u+2v+u^3}{\left(u^2+v^2\right)^2}\right) \end{cases} \text{de unde rezultă}$$

$$\begin{cases} \overline{r}_u(M) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \overline{r}_v(M) = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \text{şi deci } T_M S : \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0, \text{ în final}$$

$T_M S : -y+z+1=0$ (deci Ox este paralelă cu $T_M S$!). Normala ca dreaptă este: $\frac{x}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$.

7.5 Se observă mai întâi că $M \in C = S_1 \cap S_2$. Prin urmare, tangenta căutata este $T_M C = T_M S_1 \cap T_M S_2$. Notând $F_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3, F_2(x,y,z) = 2x^2+y^2-3z^2$ avem $\nabla F_1 = 2(x,y,z), \nabla F_2 = 2(2x,y,-3z)$ şi deci (până la factorul de proporţionalitate) $\nabla F_1(M) = (1,1,1), \nabla F_2(M) = (2,1,-3)$. Obţinem $T_M S_1 : x+y+z-3=0, T_M S_2 : 2x+y-3z=0$ şi tangenta cerută apare ca intersecţia a două plane $T_M C : \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$.
Altfel: vectorul director al dreptei tangente este $\nabla F_1(M) \times \nabla F_2(M) = (-4,5,-1)$ de unde $T_M C : \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{-1}$.

7.6 (i) $M_1(3,2,1), M_2(3,-1,2)$ (ii) $M_3 \in S$ deoarece sistemul $\begin{cases} u+v=4 \\ u-v=2 \\ uv=3 \end{cases}$ are soluţia $u=3, v=1$, $M_4 \notin S$ deoarece sistemul $\begin{cases} u+v=1 \\ u-v=4 \\ uv=-2 \end{cases}$ este incompatibil. (iii) Din $\begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \end{cases}$ rezultă $\begin{cases} u=\frac{x+y}{2} \\ v=\frac{x-y}{2} \end{cases}$ şi deci $z = \frac{1}{4}\left(x^2-y^2\right)$. Deci $S : x^2-y^2-4z=0$.

7.7 (i) $\overline{r}^{u_0}(v) = \left(u_0^2+v, u_0^2-v, u_0 v\right)$ şi eliminând v obţinem $(v=)\ \frac{x-u_0^2}{1} = \frac{y-u_0^2}{-1} = \frac{z}{u_0}$ care este o dreaptă ce trece prin punctul $M\left(u_0^2, u_0^2, 0\right)$ şi are vectorul director $\overline{a} = (1,-1,u_0) \neq \overline{0}$.

Avem $\overline{r}^{v_0}(u) = \left(u^2+v_0, u^2-v_0, uv_0\right)$ de unde $\frac{d^3}{du^3}\overline{r}^{v_0} = \overline{0}$ ceea ce dă concluzia.

(ii) $\overline{r}^{u=v}(u) = \left(u^2+u, u^2-u, u^2\right)$ de unde $\frac{d^3}{du^3}\overline{r}^{u=v} = \overline{0}$ ceea ce voiam.

7.8 Numim *suprafaţă cilindrică* o suprafaţă generată de o dreaptă G ce se deplasează în spaţiu paralel cu o direcţie fixă şi sprijinindu-se pe o curbă fixă C. Dreapta G se numeşte *generatoare* iar C se numeşte *curba directoare*.

(i) Generatoarele fiind paralele cu d au ecuaţia $G : \begin{cases} x+y+z=\alpha \\ x+2y+3z=\beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Punem condiţia ca G să se sprijine pe C adică sistemul format din ecuaţiile lui G si C să fie compatibil $\begin{cases} x+y+z=\alpha \\ x+2y+3z=\beta \\ y=0 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$. Din primele 3 relaţii avem $\begin{cases} x=\frac{3\alpha-\beta}{2} \\ z=\frac{\beta-\alpha}{2} \end{cases}$ care înlocuite în ultima relaţie dau *condiţia de* *compatibilitate*: $(\beta-\alpha)^2+(3\alpha-\beta)^2=8$ şi înlocuind α,β din ecuaţiile lui G în condiţia de compatibilitate rezultă ecuaţia lui $S:(2z+y)^2+(2x+y)^2=8$.

(ii) Scriem $d:\begin{cases}x-3z=0\\ y-2z=0\end{cases}$ de unde $G:\begin{cases}x-3z=\alpha\\ y-2z=\beta\end{cases}$. Din sistemul $G\cap C$ obţinem $\begin{cases}x=3+\frac{\alpha}{4}\\ y=\beta+2-\frac{\alpha}{2}\\ z=1-\frac{\alpha}{4}\end{cases}$ ce dă condiţia de compatibitate: $2\left(3+\frac{\alpha}{4}\right)^2+\left(\beta+2-\frac{\alpha}{2}\right)^2=2\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)$ şi suprafaţa $S:(x-3z+12)^2+2\left(-x+2y-z+4\right)^2=4\left(-x+3z+4\right)$.

(iii) d are direcţia $\overline{a}=(2,3,4)$ deci $G:\frac{x-x_0}{2}=\frac{y-y_0}{3}=\frac{z-z_0}{4}$ sau $G:\begin{cases}3x-2y=\alpha\\ 2x-z=\beta\end{cases}$. Din sistemul $G\cap C$ obţinem $\begin{cases}x=\alpha-2\beta-4\\ y=\alpha-3\beta-6\\ z=2\alpha-5\beta-8\end{cases}$ şi condiţia de compatibilitate: $(\alpha-2\beta-5)^2+(\alpha-3\beta-3)^2+(2\alpha-5\beta-10)^2=25$ ceea ce dă suprafaţa $S:(-x-2y+2z-5)^2+(-3x-2y+3z-3)^2+(-4x-4y+5z-10)^2=25$.

7.9 Numim *suprafaţă conică* o suprafaţă generată de o dreaptă G ce trece printr-un punct fix V şi se sprijină pe o curbă fixă C. Denumiri: *G-generatoare*, *V-vârf*, *C-curba directoare*.

(i) Generatoarele trecând prin V au ecuaţia $G:\frac{x-0}{\alpha}=\frac{y-0}{\beta}=\frac{z-0}{1}$ adică $G:\begin{cases}x=\alpha z\\ y=\beta z\end{cases}$. Din sistemul $G\cap C$ obţinem condiţia de compatibilitate $3\alpha^2-5\beta^2-1$ şi suprafaţa $S:3x^2-5y^2-z^2=0$.

(ii) Generatoarele au aceeaşi ecuaţie cu cea de la punctul precedent. Condiţia de compatibilitate $4\alpha^2+3\alpha\beta+2\alpha-\beta^2=0$ dă suprafaţa $S:4x^2+3xy+3xz-y^2=0$.

(iii) Generatoarele $G:\frac{x-1}{\alpha}=\frac{y-1}{\beta}=\frac{z-1}{1}$ sau încă $G:\begin{cases}x=\alpha\left(z-1\right)+1\\ y=\beta\left(z-1\right)+1\end{cases}$ dau relaţia de compatibilitate $\left[(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2\right]^2=(1-\alpha)(1-\beta)$ de unde rezultă suprafaţa $S:\left[(z-x)^2+(z-y)^2\right]^2=(z-x)(z-y)(z-1)^2$.

(iv) Generatoarele $G:\frac{x-0}{\alpha}=\frac{y+a}{\beta}=\frac{z-0}{1}$ sau încă $G:\begin{cases}x=\alpha z\\ y=\beta z-a\end{cases}$ dau relaţia de compatibilitate $(a+2)^2\left(\alpha^2+1\right)+(2\beta-a)^2=4\left(\beta+1\right)^2$ de unde rezultă suprafaţa $S:(a+2)^2\left(x^2+z^2\right)+(2y+2a-az)^2=4\left(y+z+a\right)^2$.

7.10 Numim *suprafaţă conoidă cu plan director* o suprafaţa generată de o dreaptă G ce se deplasează în spaţiu, paralel cu un plan π şi sprijininduse pe o dreaptă fixă d şi o curbă fixă C. Denumiri: G-*generatoare*, π-*plan director*.

(i) Generatoarea G se gândeşte ca fiind intersecţia a doua plane: unul paralel cu π (deci de ecuaţie $\pi_1 : z = \alpha$) şi altul din fascicolul de plane ce conţine $Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, deci al doilea plan are ecuaţia $\pi_2 : x + \beta y = 0$. Din $G \cap d$ obţinem relaţia de compatibilitate $\alpha\beta - 2\alpha - 3\beta = 0$ şi suprafaţa $S : z\,(x + 2y) - 3x = 0$.

(ii) Generatoarea G este intersecţia a două plane, unul paralel cu π (deci are ecuaţia $\pi_1 : z = \alpha$) şi al doilea din fascicolul de plane ce conţine pe d, deci $\pi_2 : y + \beta\,(x - 2) = 0$. Din $G \cap C$ obţinem condiţia de compatibilitate $9\,(\beta - 1)^2 - \alpha^2\beta^2 = 9\beta^2$ şi suprafaţa $S : 9\,(x + y - 2)^2 - y^2z^2 = 9y^2$.

(iii) Generatoarea G este intersecţia a două plane, unul paralel cu π, deci $\pi_1 : x = \alpha$, şi altul din fascicolul de plane ce conţine pe d, $\pi_2 : y + \beta z = 0$. Din $G \cap C$ obţinem condiţia de compatibilitate $81\beta^4 = 128\alpha$ şi suprafaţa $S : 81y^4 - 128xz^2 = 0$.

7.11 Numim *suprafaţă de rotaţie* o suprafaţă generată de rotirea, fără alunecare a unei curbe C în jurul unei axe fixe d. Curba C se numeşte *curba meridian* iar d o numim *axa de rotaţie*. În această rotaţie orice punct al lui C descrie un cerc, numit *cerc paralel*, cu centrul pe d.

Presupunând curba meridian C în planul xOz rezultă ecuaţia lui C : $\begin{cases} x = \varphi\,(u) \\ z = \psi\,(u) \end{cases}$ şi efectuând rotaţia de unghi v în jurul lui Oz obţinem ecuaţiile cerute.

7.12 Avem $\pi : \overline{r}\,(u, v) = \overline{r}_0 + u\overline{a} + v\overline{b}$, unde $\overline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, de unde rezultă:

$$\overline{r}_u = \overline{a}, \overline{r}_v = \overline{b}, \overline{N} = \frac{\overline{a} \times \overline{b}}{\|\overline{a} \times \overline{b}\|}, \overline{r}_{uu} = \overline{r}_{uv} = \overline{r}_{vv} = \overline{0}$$

şi deci: $E = \|\overline{a}\|^2, F =< \overline{a}, \overline{b} >, G = \|\overline{b}\|^2, L = M = N = 0$. Putem alege vectorii $\overline{a}, \overline{b}$ ca formând o bază ortonormată în π (conform procedeului Gram-Schmidt) şi deci: $E = G = 1, F = 0, H = K = 0$. Toate punctele sunt planare.

7.13

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$\varphi' \cos v$	$\varphi' \sin v$	ψ'
$\overline{r}_v$	$-\varphi \sin v$	$\varphi \cos v$	0
$\overline{r}_{uu}$	$\varphi'' \cos v$	$\varphi'' \sin v$	ψ''
$\overline{r}_{uv}$	$-\varphi' \sin v$	$\varphi' \cos v$	0
$\overline{r}_{vv}$	$-\varphi \cos v$	$-\varphi \sin v$	0
$\overline{N}$	$\frac{-\psi' \cos v}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}$	$\frac{-\psi' \sin v}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}$	$\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}$

$$\begin{cases} E = \varphi'^2 + \psi'^2, F = 0, G = \varphi^2, EG - F^2 = \varphi^2 \left(\varphi'^2 + \psi'^2\right) \\ L = \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}, M = 0, N = \frac{\varphi\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}} \end{cases}.$$

$$H = \frac{\psi'\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right) - \varphi\left(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'\right)}{2\varphi\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)^{\frac{3}{2}}}, K = \frac{\psi'\left(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'\right)}{\varphi\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)^2}.$$

Cazuri particulare:

(i) Cilindrul circular drept

Luăm $\varphi(u) = 1, \psi(u) = Ru$ şi obţinem:

$$\begin{cases} E = R^2, F = 0, G = 1, EG - F^2 = R^2 \\ L = M = 0, N = 1 \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}, K = 0.$$

(ii) Presupunem curba meridian parametrizată canonic, deci:

$$\varphi'^2 + \psi'^2 = 1. \qquad (*)$$

Avem:

$$E = 1, F = 0, G = \varphi^2, EG - F^2 = \varphi^2$$

$$L = \varphi'\psi'' - \varphi''\psi', M = 0, N = \varphi\psi'$$

$$H = \frac{\psi' - \varphi\left(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'\right)}{2\varphi}, K = \frac{\psi'\left(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'\right)}{\varphi}.$$

Derivând relaţia $(*)$ obţinem $\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0$ de unde:

$$\varphi'' = -\frac{\psi'\psi''}{\varphi'}, \psi'' = -\frac{\varphi'\varphi''}{\psi'}.$$

Înlocuind φ'' în expresia precenta a lui H şi ψ'' în expresia precedentă a lui K obţinem:

$$H=\frac{\varphi'\psi'+\varphi\psi''}{2\varphi\varphi'}=\frac{(\varphi\psi')'}{(\varphi^2)'},K=-\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

(iii) Deci pentru o suprafaţă de rotaţie având curbura medie constantă $H=H_0$ avem ecuaţia diferenţială: $(\varphi\psi')'=H_0\left(\varphi^2\right)'$ care se integrează: $\varphi\psi'=H_0\varphi^2+C$ cu C constantă reală. Alegând $C=0$ şi simplificând prin φ avem $\psi'=H_0\varphi$.

Analog pentru o suprafaţă de rotaţie având curbura totală constantă $K=K_0$ avem ecuaţia diferenţială de ordinul doi: $\varphi''+K_0\varphi=0$ cu următoarea soluţie generală depinzând de constatele reale a,b :

$$\varphi(u)=\begin{cases} a\cos\left(\sqrt{K_0}u\right)+b\sin\left(\sqrt{K_0}u\right), & pt.K_0>0\\ au+b,|a|\leq 1, \quad pt.K_0=0 & \\ ach\left(\sqrt{-K_0}u\right)+bsh\left(\sqrt{-K_0}u\right), & pt.K_0<0\end{cases}.$$

Examplu: $K_0=0$. Avem:

-cilindru circular de rază $R=b$ dacă $a=0$

-plan ortogonal pe axa de rotaţie dacă $|a|=1$

-con circular dacă $0<|a|<1$.

7.14 Aplicăm formulele obţinute la exerciţiul anterior cu: $\varphi(u)=R\cos u,\psi(u)=R\sin u$.

$$\begin{cases} E=R^2,F=0,G=R^2\cos^2 u,EG-F^2=R^4\cos^2 u\\ L=R,M=0,N=R\cos^2 u\end{cases}.$$

$$H=\frac{1}{R},K=\frac{1}{R^2}.$$

Toate punctele sunt ombilicale şi eliptice. Pe sferă nu avem linii asimptotice şi orice curbă este linie de curbură.

7.15

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$3\left(1+v^2-u^2\right)$	$6uv$	$6u$
$\overline{r}_v$	$6uv$	$3\left(1+u^2-v^2\right)$	$-6v$
$\overline{r}_{uu}$	$-6u$	$6v$	6
$\overline{r}_{uv}$	$6v$	$6u$	0
$\overline{r}_{vv}$	$6u$	$-6v$	-6
$\overline{N}$	$\frac{-2u}{1+u^2+v^2}$	$\frac{2v}{1+u^2+v^2}$	$\frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}$

$$\begin{cases} E=G=9\left(1+u^2+v^2\right)^2,F=0,EG-F^2=81\left(1+u^2+v^2\right)^4\\ L=6,M=0,N=-6\end{cases}.$$

$$H = 0, K = \frac{-4}{9\left(1 + u^2 + v^2\right)^2}.$$

Deci suprafaţa Enneper este suprafaţă minimală cu toate punctele hiperbolice. Liniile asimptotice sunt: $\begin{cases} u + v = const. \\ u - v = const. \end{cases}$ iar liniile de curbură sunt liniile parametrice: $\begin{cases} u = const. \\ v = const. \end{cases}$.

Fig.6 Suprafaţa Enneper.

7.16

$$\begin{array}{llll}
\overline{r} & x & y & z \\
\overline{r}_u & \cos v & \sin v & 0 \\
\overline{r}_v & -u\sin v & u\cos v & h \\
\overline{r}_{uu} & 0 & 0 & 0 \\
\overline{r}_{uv} & -\sin v & \cos v & 0 \\
\overline{r}_{vv} & -u\cos v & -u\sin v & 0 \\
\overline{N} & \frac{h\sin v}{\sqrt{u^2+h^2}} & \frac{-h\cos v}{\sqrt{u^2+h^2}} & \frac{u}{\sqrt{u^2+h^2}}
\end{array}$$

$$\begin{cases} E = 1, F = 0, G = u^2 + h^2, EG - F^2 = u^2 + h^2 \\ L = 0, M = -\frac{h}{\sqrt{u^2+h^2}}, N = 0 \end{cases}.$$

$$H = 0, K = \frac{-h^2}{\left(h^2 + u^2\right)^2}$$

de unde rezultă că elicoidul este suprafaţă minimală cu toate punctele hiperbolice.

Liniile asimptotice sunt liniile parametrice: $\begin{cases} u = const. \\ v = const. \end{cases}$ iar liniile de curbură: $v = \pm \int\limits_{u_0}^{u} \frac{dt}{\sqrt{h^2+t^2}}$.

7.17

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	1	0	p
$\overline{r}_v$	0	1	q
$\overline{r}_{uu}$	0	0	r
$\overline{r}_{uv}$	0	0	s
$\overline{r}_{vv}$	0	0	t
$\overline{N}$	$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$	$\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$

$$\begin{cases} E = 1 + p^2, F = pq, G = 1 + q^2, EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2 \\ L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{cases}.$$

$$H = \frac{\left(1 + p^2\right) t - 2pqs + \left(1 + q^2\right) r}{2\left(1 + p^2 + q^2\right)^{\frac{3}{2}}}, K = \frac{rt - s^2}{\left(1 + p^2 + q^2\right)^2}.$$

7.18 Aplicăm exerciţiul precedent:

$$\begin{cases} p = y, q = x, r = t = 0, s = 1 \\ E = 1 + y^2, F = xy, G = 1 + x^2 \\ L = N = 0, M = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \end{cases}.$$

$$H = \frac{-2xy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, K = \frac{-1}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}$$

deci toate punctele sunt hiperbolice. Linie asimptotică este doar: $v = const.$ iar linii de curbură sunt liniile parametrice: $\begin{cases} u = const. \\ v = const. \end{cases}$.

7.19

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$R\cos u \cos v$	$R\cos u \sin v$	$R\frac{\cos^2 u}{\sin u}$
$\overline{r}_v$	$-R\sin u \sin v$	$R\sin u \cos v$	0
$\overline{r}_{uu}$	$-R\sin u \cos v$	$-R\sin u \sin v$	$-R\cos u\frac{1+\sin^2 u}{\sin^2 u}$
$\overline{r}_{uv}$	$-R\cos u \sin v$	$R\cos u \cos v$	0
$\overline{r}_{vv}$	$-R\sin u \cos v$	$-R\sin u \sin v$	0
$\overline{N}$	$-\cos u \cos v$	$-\cos u \sin v$	$\sin u$

$$\begin{cases} E = R^2 ctg^2 u, F = 0, G = R^2 \sin^2 u, EG - F^2 = R^4 \cos^2 u \\ L = -R ctg u, M = 0, N = R \sin u \cos u \end{cases}.$$

$$H = \frac{ctg 2u}{R}, K = -\frac{1}{R^2}$$

deci toate punctele sunt hiperbolice.

7.20

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$-r \sin u \cos v$	$-r \sin u \sin v$	$r \cos u$
$\overline{r}_v$	$-(R + r\cos u)\sin v$	$(R + r\cos u)\cos v$	0
$\overline{r}_{uu}$	$-r \cos u \cos v$	$-r \cos u \sin v$	$-r \sin u$
$\overline{r}_{uv}$	$r \sin u \sin v$	$-r \sin u \cos v$	0
$\overline{r}_{vv}$	$-(R + r\cos u)\cos v$	$-(R + r\cos u)\sin v$	0
$\overline{N}$	$-\cos u \cos v$	$-\cos u \sin v$	$-\sin v$

$$\begin{cases} E = r^2, F = 0, G = (R + r\cos u)^2, EG - F^2 = r^2 (R + r\cos u)^2 \\ L = r, M = 0, N = \cos u (R + r\cos u) \end{cases}.$$

$$H = \frac{R + 2r\cos u}{2r (R + r\cos u)}, K = \frac{\cos u}{r (R + r\cos u)}$$

de unde rezultă: curba $u = \pm\frac{\pi}{2}$ are toate punctele parabolice, $\{(u, v) \,|\, \frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}\}$ are toate punctele hiperbolice, $\{(u, v) \,|\, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\}$ are toate punctele eliptice.

7.21

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$-\sin u \left(1 + v\sin\frac{u}{2}\right) + \frac{v}{2}\cos u \cos\frac{u}{2}$	$\cos u \left(1 + v\sin\frac{u}{2}\right) + \frac{v}{2}\sin u \cos\frac{u}{2}$	$-\frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}$
$\overline{r}_v$	$\cos u \sin\frac{u}{2}$	$\sin u \sin\frac{u}{2}$	$\cos\frac{u}{2}$

$$E = \left(1 + v\sin\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{4}, F = 0, G = 1.$$

7.22

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$-a(\sin u + v\cos u)$	$a(\cos u - v\sin u)$	b
$\overline{r}_v$	$-a \sin u$	$a \cos u$	b
$\overline{r}_{uu}$	$a(-\cos u + v\sin u)$	$-a(\sin u + v\cos u)$	0
$\overline{r}_{uv}$	$-a \cos u$	$-a \sin u$	0
$\overline{r}_{vv}$	0	0	0
$\overline{N}$	$\frac{-b\sin u}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{b\cos u}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\begin{cases} E = a^2\left(1+v^2\right)+b^2, F = a^2+b^2 = G, EG-F^2 = a^2v^2\left(a^2+b^2\right) \\ L = \frac{-abv}{\sqrt{a^2+b^2}}, M = 0 = N \end{cases}$$

$$H = -\frac{b}{2av\sqrt{a^2+b^2}}, K = 0$$

7.23

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$-v\sin\varphi\sin u$	$v\sin\varphi\cos u$	0
$\overline{r}_v$	$\sin\varphi\cos u$	$\sin\varphi\sin u$	$\cos\varphi$
$\overline{r}_{uu}$	$-v\sin\varphi\cos u$	$-v\sin\varphi\sin u$	0
$\overline{r}_{uv}$	$-\sin\varphi\sin u$	$\sin\varphi\cos u$	0
$\overline{r}_{vv}$	0	0	0
$\overline{N}$	$\cos\varphi\cos u$	$\cos\varphi\sin u$	$-\sin\varphi$

$$\begin{cases} E = v^2\sin^2\varphi, F = 0, G = 1 \\ L = -v\sin\varphi\cos\varphi, M = N = 0 \end{cases}$$

$$H = \frac{-ctg\varphi}{2v}, K = 0$$

Liniile asimptotice sunt $u = const.$

7.24 Se aplică direct formula cosinusului şi faptul că $d\overline{r} = \overline{r}_u du + \overline{r}_v dv$.

7.25 Parametrizăm suprafaţa $S : x = u, y = v, z = \frac{1}{2\rho}\left(u^2+v^2\right)$ şi obţinem

$$E = 1+\frac{u^2}{\rho^2}, F = \frac{uv}{\rho^2}, G = 1+\frac{v^2}{\rho^2}.$$

Avem $C_1 : du = dv, C_2 : \delta v = -\frac{u}{v}\delta u$ din derivarea relaţiei $2a\rho = u^2+v^2$ folosind faptul că a si ρ sunt constante. Rezultă $Edu\delta u + F\left(du\delta v + dv\delta u\right) + Gdv\delta v = \left(1-\frac{u}{v}\right)du\delta u = 0$ deoarece la intersecţia curbelor avem $u = v$ datorită lui C_1. Deci cele două curbe sunt perpendiculare pe S.

7.26 Avem:

$$E = 1+(1+v)^2, F = u(1+v), G = 1+u^2.$$

Unghiul dintre curbele de coordonate este:

$$\cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{u_0\left(1+v_0\right)}{\sqrt{\left(1+u_0^2\right)\left[1+\left(1+v_0^2\right)\right]}}$$

în punctul $M(u_0, v_0) \in S$. Fie ω_1 unghiul dintre Γ^{u_0} şi C respectiv ω_2 unghiul dintre Γ^{v_0} şi C. Pentru Γ^{u_0} avem $du = 0$, pentru Γ^{v_0} avem $dv = 0$ iar pentru C avem $\delta v = -\delta u$. Deci:

$$\cos\omega_1 = \frac{Fdv\delta u + Gdv(-\delta u)}{\sqrt{G}dv\sqrt{E-2F+G}\delta u} = \frac{F-G}{\sqrt{G(E-2F+G)}} \overset{v=-u_0}{=}$$

$$= \frac{u_0 - 2u_0^2 - 1}{\sqrt{\left(1+u_0^2\right)\left(4u_0^2 - 4u_0 + 3\right)}}$$

$$\cos\omega_2 = \frac{Edu\delta u + Fdu(-\delta u)}{\sqrt{E}du\sqrt{E-2F+G}\delta u} = \frac{E-F}{\sqrt{E(E-2F+G)}} \overset{u=-v_0}{=}$$

$$= \frac{2 + 3v_0 + 2v_0^2}{\sqrt{\left(v_0^2 + 2v_0 + 2\right)\left(4v_0^2 + 4v_0 + 3\right)}}.$$

Am folosit faptul că punctul de intersecţie dintre Γ^{u_0} şi C este $M_1(u_0, -u_0)$ iar punctul de intersecţie dintre Γ^{v_0} şi C este $M_2(-v_0, v_0)$.

7.27 (i) Fie forma I-a fundamentală a unei suprafeţe oarecare S:

$$I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

respectiv forma a II-a fundamentală:

$$II(du, dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Asociem acestora matricele:

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

şi reamintim că I este inversabilă deoarece $\det I = EG - F^2 > 0$ din condiţia de regularitate a lui S. Reamintim de asemeni, că curbura totală este $K = det\left(II \cdot I^{-1}\right)$ sau încă:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Atunci, folosind rezultatele de la problema 7.13 obţinem relaţia cerută.

(ii) Considerăm $\psi = \psi(\varphi)$ şi atunci relaţia din problemă devine:

$$K = \frac{\psi'\psi''}{\varphi\left(1+\psi'^2\right)^2} = -\frac{1}{R^2}$$

sau încă: $\frac{\psi'\psi''}{(1+\psi'^2)^2} = -\frac{\varphi}{R^2}$ care este o ecuaţie cu variabile separate şi deci prin integrare obţinem:

$$\frac{1}{1+\psi'^2} = \frac{\varphi^2}{R^2} + C$$

cu C o constantă reală pe care o alegem de forma $C = 1 - \frac{a^2}{R^2}$. Rezultă:

$$\frac{1}{1+\psi'^2} = \frac{\varphi^2 + R^2 - a^2}{R^2} \Rightarrow 1+\psi'^2 = \frac{R^2}{R^2 - a^2 + \varphi^2} \Rightarrow \psi'^2 = \frac{a^2-\varphi^2}{R^2 - (a^2 - b^2)}$$

şi deci avem soluţia generală, care este o familie 1-parametrică de suprafeţe, numite *suprafeţe pseudosferice*:

$$\psi_a = \psi_a(\varphi) = \int \sqrt{\frac{a^2-\varphi^2}{R^2 - (a^2-\varphi^2)}} d\varphi.$$

Exemplu. Alegem $a = R$ şi deci:

$$\psi = \psi(\varphi) = \int \frac{\sqrt{R^2-\varphi^2}}{\varphi} d\varphi.$$

Dacă în plus luăm $\varphi = \varphi(u) = R \sin u$ atunci:

$$\psi = \psi(u) = R \int \frac{\cos^2 u}{\sin u} du = R \int \frac{1-\sin^2 u}{\sin u} du = R\left(\cos u + \ln tg \frac{u}{2}\right) + C_0$$

pentru $tg\frac{u}{2} > 0$ si C_0 constantă reală. Pentru $C_0 = 0$ obţinem *pseudosfera* conform parametrizării de la problema 7.19.

7.28 Avem:

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	1	v	$3u^2$
$\overline{r}_v$	1	u	$3v^2$
$\overline{r}_{uu}$	0	0	$6u$
$\overline{r}_{uv}$	0	1	0
$\overline{r}_{vv}$	0	0	$6v$
$\overline{N}$	$\frac{3(v^3-u^3)}{\sqrt{EG-F^2}}$	$\frac{3(u^2-v^2)}{\sqrt{EG-F^2}}$	$\frac{u-v}{\sqrt{EG-F^2}}$

de unde rezultă:

$$E = 1 + 9u^4 + v^2, F = 1 + uv + 9u^2v^2, G = 1 + u^2 + 9v^4$$

$$L = \frac{6u(u-v)}{\sqrt{EG-F^2}}, M = \frac{3\left(u^2-v^2\right)}{\sqrt{EG-F^2}}, G = \frac{6v(u-v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

unde $EG - F^2 = (u-v)^2 + 9\left(u^2-v^2\right)^2 + 9\left(u^3-v^3\right)^2$. Reamintim că punctele parabolice sunt date de anularea curburii totale K deci satisfac ecuaţia $LN = M^2$. În cazul nostru avem ecuaţia:

$$4uv(u-v)^2 = \left(u^2-v^2\right)^2$$

care devine $(u-v)^4 = 0$. Deci locul geometric al punctelor parabolice de pe S este curba $\Gamma^{u=v}(u) = \left(2u, u^2, 2u^3\right)$ care, după cum se observă, este intersecţia lui S cu paraboloidul hiperbolic $P_h : z = xy$.

7.29 Parametrizăm $S : x = u, y = v^3 - u, z = v$ şi avem:

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	1	-1	0
$\overline{r}_v$	0	$3v^2$	1
$\overline{r}_{uu}$	0	0	0
$\overline{r}_{uv}$	0	0	0
$\overline{r}_{vv}$	0	$6v$	0
$\overline{N}$	$\frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}$	$\frac{3v^2}{\sqrt{EG-F^2}}$

de unde rezultă:

$$E = 2, F = -3v^2, G = 1 + 9v^4, EG - F^2 = 2 + 9v^4$$

$$L = M = 0, N = \frac{-6v}{\sqrt{EG-F^2}}$$

şi deci: $LN - M^2 = 0$ ceea ce voiam.

7.30 Avem:

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	chu	$shu\cos v$	$shu\sin v$
$\overline{r}_v$	0	$-chu\sin v$	$chu\cos v$
$\overline{r}_{uu}$	shu	$chu\cos v$	$chu\sin v$
$\overline{r}_{uv}$	0	$-shu\sin v$	$shu\cos v$
$\overline{r}_{vv}$	0	$-chu\cos v$	$-chu\sin v$
$\overline{N}$	$\frac{shu}{\sqrt{ch^2u+sh^2u}}$	$\frac{-chu\cos v}{\sqrt{ch^2u+sh^2u}}$	$\frac{-chu\sin v}{\sqrt{ch^2u+sh^2u}}$

şi deci:

$$E = ch^2u + sh^2u, F = 0, G = ch^2u, EG - F^2 = ch^2u\left(ch^2u + sh^2u\right)$$

$$L = \frac{-1}{\sqrt{ch^2u + sh^2u}}, M = 0, N = \frac{ch^2u}{\sqrt{ch^2u + sh^2u}}$$

de unde rezultă: $LN - M^2 = \frac{-ch^2u}{ch^2u+sh^2u} < 0$ ceea ce voiam.

7.31 (i) Ştim că pentru sfera de rază R avem $K = \frac{1}{R^2} \neq 0$ conform problemei 7.14. De asemeni, conform unei proprietăţi remarcabile a sferei centrate în origine (este esenţial acest fapt!) distanţa de la origine la planul tangent este $d = R$ deoarece raza este perpendiculară pe planul tangent. Prin urmare $\frac{K}{d^4} = \frac{1}{R^2 \cdot R^4} = \frac{1}{R^6} = const.$

(ii) Avem:

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	1	0	$-\frac{1}{u^2v}$
$\overline{r}_v$	0	1	$-\frac{1}{uv^2}$
$\overline{r}_{uu}$	0	0	$\frac{2}{u^3v}$
$\overline{r}_{uv}$	0	0	$\frac{1}{u^2v^2}$
$\overline{r}_{vv}$	0	0	$\frac{2}{uv^3}$
$\overline{N}$	$\frac{v}{\sqrt{u^4v^4+u^2+v^2}}$	$\frac{u}{\sqrt{u^4v^4+u^2+v^2}}$	$\frac{u^2v^2}{\sqrt{u^4v^4+u^2+v^2}}$

de unde rezultă:

$$E = 1 + \frac{2}{u^4v^2}, F = \frac{1}{u^3v^3}, G = 1 + \frac{1}{u^2v^4}, EG - F^2 = \frac{u^4v^4 + u^2 + v^2}{u^4v^4}$$

$$L = \frac{2v}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}, M = \frac{1}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}, N = \frac{2u}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}$$

şi deci:

$$K = \frac{3u^4v^4}{(u^4v^4 + u^2 + v^2)^2}.$$

Ecuaţia planului tangent în punctul curent este $T_pS : v\,(x-u) + u\,(y-v) + u^2v^2\left(z - \frac{1}{uv}\right) = 0$ şi deci:

$$d = \frac{|-uv - uv - uv|}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}} = \frac{3uv}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}.$$

În concluzie:

$$\frac{K}{d^4} = \frac{3}{3^4} = \frac{1}{27} = const.$$

Observaţie: pe suprafaţa dată, curba $u\,(t) = \frac{1}{t}, v\,(t) = \frac{1}{t^2}$ este curba Ţiţeica (i) de la exerciţiul 6.22.

(iii) Reamintim: dată S o suprafaţă având curbura totala negativă şi $c : I \to S, c(t) = (u(t), v(t))$, o curbă pe S are loc *formula lui Enneper*:

$$\tau^2(t) = -K(u(t), v(t)).$$

Fie deci S suprafaţă Ţiţeica având $K < 0$ şi c o linie asimptotică pe S. Din formula Enneper şi proprietatea Ţiţeica rezultă că $\frac{\tau^2}{d^4} = const.$ unde d este distanţa de la origine la planul tangent. Dar c fiind linie asimptotică, planul tangent coincide cu planul osculator şi deci $\frac{\tau}{d^2} = const.$ cu d distanţa de la origine la planul osculator, ceea ce spune că c este curbă Ţiţeica.

7.32 (i) Pentru $K = -1$ avem ecuaţia diferenţiala $\partial_r^2\sqrt{G} = \sqrt{G}$ şi se arată că $\sqrt{G}(0, \varphi) = 0, \partial_r\sqrt{G}(0, \varphi) = 1$. Deci notând $\sqrt{G}(r, \varphi) = x(r)$ avem problema Cauchy:

$$\begin{cases} x''(r) = x'(r) \\ x(0) = 0, x'(0) = 1 \end{cases}$$

cu soluţia unică $x(r) = shr$ şi deci, în final, soluţia unică $G(r, \varphi) = sh^2 r$.

(ii) Teorema Egregium afirmă următoarea expresie a curburii totale:

$$2\sqrt{EG - F^2} \cdot K = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{FE_v - EG_u}{E\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2EF_u - FE_u - EE_v}{E\sqrt{EG - F^2}}\right) \quad (*)$$

care pentru $F = 0$ devine relaţia cerută.

Alte expresii ale curburii totale:

-dacă $g_{11} = g_{22}$ şi $g_{12} = 0$ atunci:

$$K = -\frac{\Delta(\ln g_{11})}{2g_{11}}$$

(a se vedea şi prima relaţie de la ex. 2.42)

-dacă $g_{11} = g_{22} = 0$ atunci:

$$K = -\frac{1}{g_{12}}\frac{\partial^2 \ln g_{12}}{\partial u \partial v}.$$

(iii) Din $(*)$ avem:

$$\sqrt{1 - F^2}K = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F_u}{\sqrt{1 - F^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-\sin\varphi \cdot \varphi_u}{\sin\varphi}\right)$$

de unde concluzia.

În lucrarea:

Myller, A., *Reţelele lui Cebîşev şi paralelismul lui Levi-Civita*, Mathematica (Cluj), 1(1929), 48-53,
se redă povestea introducerii acestor reţele. Este singura sursă dintr-o bibliografie foarte amplă cercetată de autorul acestei culegeri în care apare această istorie!

Cităm:

"În anul 1878 la congresul Asociaţiunii franceze pentru înaintarea ştiinţelor, geometrul rus Cebîşev a facut o comunicare intitulată <<Sur la coupe des vêtements>>. A arătat atunci cum se poate îmbraca orice suprafaţă cu o singură bucată de stofă.

El consideră stofa ca formată din două rânduri de fire care se încrucişează. Aceste fire sânt înnodate în punctele lor de întretăere astfel că distanţa dintre două puncte consecutive să fie peste tot aceiaşi. Când se deformează stofa, această distanţă rămâne invariabilă, numai unghiul ce fac două fire în punctul lor de întretăere poate să se schimbe.

Dacă consider stofa într'o poziţie deformată oarecare şi iau două fire care se încrucişează ca linii coordonată de origină, atunci un punct oarecare al stofei poate să fie determinat prin două coordonate α şi β care sunt distanţele punctului la liniile coordonată de origină măsurate dealungul firelor ce trec prin acel punct:

$$\alpha = MQ, \qquad \beta = MP.$$

Avem atunci:

$$MM_1 = d\alpha, \qquad MM_2 = d\beta$$

şi prin urmare:

$$(M_1M_2)^2 = ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2cos\theta d\alpha d\beta$$

unde θ este unghiul M_1MM_2. θ este o funcţie de α, β şi această funcţie depinde de modul în care a fost deformată stofa.

Rezultă că pentru a îmbrăca o suprafaţă cu o singură bucată de stofă trebue deslegat problemul următor de geometrie: Fiind dată o suprafaţă al cărei element liniar este

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

să se facă o schimbare de coordonate, înlocuind variabilele u, v prin altele α, β alese astfel ca elementul liniar să ia forma

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\overline{F}d\alpha d\beta + d\beta^2$$

unde am însemnat $\cos\theta$ prin $\overline{F}(\alpha,\beta)$."

Încheiem această istorioară notând că, deşi este numit "geometru" de către Al. Myller, matematicianul rus P. L. Cebîşev (1821-1894) este celebru în alte domenii ale matematicii:
-crearea teoriei celei mai bune aproximări,
-teoria probabilităţilor,
-teoria numerelor.

7.33 (i) Pentru $K=-1$ avem ecuaţia diferenţială
$f''(u)=f(u)\left(1+(f'(u))^2\right)^2$.

(ii) Rezultatul binecunoscut $K=\frac{1}{R^2}$.

7.34 Pentru $K=-1$ avem $\varphi(u)=u^2+c$ adică $f(u)=\int\sqrt{\frac{1}{u^2+c}-1}du$ care este o integrală eliptică pentru marea majoritate a valorilor lui c. Dar pentru $c=0$ avem:

$$f(u)=\sqrt{1-u^2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{1-u^2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1-\sqrt{1-u^2}\right).$$

Pentru $K=0$ avem $\varphi(u)=c$ adică $f'(u)=const.=C_1$ de unde rezultă $f(u)=C_1u+C_2$.

7.35 (i) Pentru $K=-1$ avem ecuaţia diferenţiala $v''(r)+\frac{1}{r}v'(r)=e^{2v(r)}$.

(ii) Obţinem cu formula dată $K=-32\frac{\left(1+2r^2\right)^2}{\left(1-r^2\right)^4}$.

7.36 Calcul imediat.

7.37 O formă mai utilă pentru calcule practice este dată de:

$$\begin{pmatrix}\Gamma^1_{11}\\ \Gamma^1_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\\ \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma^1_{12}\\ \Gamma^2_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma^1_{22}\\ \Gamma^2_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\end{pmatrix}.$$

7.38 (i) Folosind formulele precente obţinem:

$$\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r},\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial r},\Gamma^2_{22}=\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial\varphi}$$

şi toţi ceilalţi simboli Christoffel sunt nuli.

(ii) Folosind rezultatele de la exerciţiul 2.16 cu $r = u, \varphi = v$ avem:

$$\Gamma_{22}^1 = -u, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{u}{u^2 + h^2}$$

toţi ceilalţi simboli Christoffel fiind nuli.

(iii) Aplicâand exercitiul anterior avem:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{22}^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial u} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\varphi} \begin{pmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

7.39 Fie $\{e_1, e_2\}$ o bază ortonormată în spaţiul tangent $T_{X(z)}S$. Din relaţia de definiţie avem că vectorii $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} \in T_{X(z)}S$ sunt ortogonali şi au aceeaşi normă, deci există funcţia $\omega : W \to I\!R$ astfel încât:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = e^{\omega} e_1, \frac{\partial X}{\partial y} = e^{\omega} e_2. \tag{1}$$

Rezultă forma I-a fundamentală:

$$I = e^{2\omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Fie forma a II-a fundamentală:

$$II = e^{2\omega} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Atunci:

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}, K = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Dar $II = \begin{pmatrix} < \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \overline{N} > & < \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}, \overline{N} > \\ < \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}, \overline{N} > & < \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \overline{N} > \end{pmatrix}$ si deci: $h_{11} = e^{-2\omega} < \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \overline{N} >$ $, h_{22} = e^{-2\omega} < \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \overline{N} >$ de unde rezultă:

$$H = \frac{e^{-2\omega}}{2} < \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \overline{N} >$$

sau cu notaţia cunoscută $\Delta X = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}$:

$$H = \frac{e^{-2\omega}}{2} < \Delta X, \overline{N} > \tag{5}$$

unde, ca de obicei: $\overline{N} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y}}{\| \frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y} \|}$.

O altă proprietate remarcabilă este faptul că ΔX este vector perpendicular pe $\frac{\partial X}{\partial x}$ şi $\frac{\partial X}{\partial y}$. În adevăr, derivând relaţia $< \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} >= 0$ în raport cu x şi relaţia $< \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial x} >=< \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial y} >$ în raport cu y avem:

$$\begin{cases} < \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \frac{\partial X}{\partial y} > + < \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} >= 0 \\ < \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \frac{\partial X}{\partial y} >=< \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}, \frac{\partial X}{\partial x} > \end{cases}$$

de unde rezultă $\Delta X \perp \frac{\partial X}{\partial y}$. Datorită rolului simetric al variabilelor x, y avem şi $\Delta X \perp \frac{\partial X}{\partial x}$.

Din această ultimă proprietate şi relaţia (5) rezultă că putem scrie: $\Delta X =< \Delta X, \overline{N} > \overline{N} \stackrel{(5)}{=} 2He^{2\omega}\overline{N}$ sau încă, ţinand cont de expresia lui $\overline{N}$ şi relaţiile (1):

$$\Delta X = 2H \frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y} \tag{6}$$

deoarece e_1, e_2 sunt ortonormaţi.

7.40 Din relaţia (6) de la problema precedentă rezultă că o suprafaţă este minimală dacă şi numai dacă este imaginea unei aplicaţii conforme *armonice* adică satisface, pe lângă condiţia de conformitate, şi condiţia: $\Delta X = \overline{0}$.

Să notăm că din $2H = h_{11} + h_{22} = 0$ rezultă $h_{22} = -h_{11}$ şi deci expresia curburii totale pentru o suprafaţă minimală conformă este, în notaţiile de la problema precedentă:

$$H = -h_{11}^2 - h_2^2.$$

Deci pentru a afla suprafeţe minimale căutăm aplicaţii $X : W \rightarrow I\!R^3$ cu proprietăţile:

(Si) X este conformă, ceea ce se poate scrie:

$$\|\frac{\partial X}{\partial x}\|^2 - \|\frac{\partial X}{\partial y}\|^2 - 2i < \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} >= 0$$

folosind faptul că un număr complex este nul dacă şi numai dacă sunt nule parţile reală şi imaginară,

(Sii) $\Delta X = \overline{0}$.

Folosind notaţiile consacrate: $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ obţinem că: $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ şi prin urmare cele două condiţii precedente devin:

(i) $\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial X^3}{\partial z}\right)^2 = 0$

(ii) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)=\overline{0}$

unde am notat $X=\left(X^1,X^2,X^3\right)$. Cu notaţia $f=\frac{\partial X}{\partial z}:W\rightarrow\mathbb{C}^3$ avem deci sistemul:

(S1) $\left(f^1\right)^2+\left(f^2\right)^2+\left(f^3\right)^2=0$

(S2) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\overline{0}$

care admite soluţia

$$f=\left(\frac{1}{2}\left(1-w^2\right),\frac{i}{2}\left(1+w^2\right),w\right)h$$

cu $w,h:W\rightarrow\mathbb{C}$ functii olomorfe. Reamintim că o funcţie $\varphi:W\subset\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ este *olomorfă* dacă $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}=0$. În concluzie, obţinem:

$$X(z)=\mathrm{Re}\left[\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\,d\zeta\right]$$

unde z_0 este punct arbitrar în W iar integrarea se face după o curbă în W ce uneşte z_0 şi z. Relaţia precedentă este faimoasa *reprezentare Weierstrass* a suprafeţelor minimale (alţi autori o numesc reprezentarea Enneper-Weierstrass) apărută în:

Weierstrass, K., *Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist*, Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1866, 612-625.

Trebuie de altfel notat că bibliografia relativ la suprafeţe minimale, la care se adaugă recent cea relativ la suprafeţe CMC ("constant mean curvature") este impresionantă!

Fie N polul nord al sferei $S^2=\{\overline{x}\in IR^3;\|x\|=1\}$ şi proiectia stereografică $\tau:S^2\backslash\{N\}\rightarrow C$:

$$\tau\left(x^1,x^2,x^3\right)=\frac{x^1+ix^2}{1-x^3}$$

care este o bijecţie cu inversa:

$$\tau^{-1}(z)=\frac{1}{1+|z|^2}\left(2\,\mathrm{Re}\,z,2\,\mathrm{Im}\,z,|z|^2-1\right).$$

Vom arăta ca $w=\tau\circ\overline{N}$.

În adevăr:

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\mathrm{Re}\left(\frac{h}{2}\left(1-w^2\right),\frac{ih}{2}\left(1+w^2\right),hw\right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\operatorname{Im}\left(\frac{h}{2}\left(1-w^2\right), \frac{ih}{2}\left(1+w^2\right), hw\right)$$

de unde rezultă:

$$\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}\left(\frac{ih}{2}\left(1+w^2\right)\right)\operatorname{Im}(hw) + \operatorname{Re}(hw)\operatorname{Im}\left(\frac{ih}{2}\left(1+w^2\right)\right) \\ \operatorname{Re}\left(\frac{h}{2}\left(1-w^2\right)\right)\operatorname{Im}(hw) - \operatorname{Re}(hw)\operatorname{Im}\left(\frac{h}{2}\left(1-w^2\right)\right) \\ -\operatorname{Re}\left(h\left(1-w^2\right)\right)\operatorname{Im}\left(\frac{ih}{4}\left(1+w^2\right)\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{ih}{4}\left(1+w^2\right)\right)\operatorname{Im}\left(h\left(1-w^2\right)\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{Im}\left[\frac{ih}{2}\left(1+w^2\right)\overline{hw}\right] \\ \operatorname{Im}\left[\frac{1}{2}\overline{h\left(1-w^2\right)}hw\right] \\ \operatorname{Im}\left[\frac{-i}{4}\overline{h\left(1+w^2\right)}h\left(1-w^2\right)\right] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|h|^2\operatorname{Re}\left(\overline{w}+|w|^2 w\right) \\ \frac{1}{2}|h|^2\operatorname{Im}\left(w-|w|^2\overline{w}\right) \\ \frac{1}{4}|h|^2\operatorname{Re}\left(|w|^4-1-\overline{w}^2+w^2\right) \end{pmatrix} = \frac{|h|^2\left(1+|w|^2\right)}{4\left(1+|w|^2\right)}\begin{pmatrix} 2\operatorname{Re} w \\ 2\operatorname{Im} w \\ |w|^2-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{|h|^2\left(1+|w|^2\right)^2}{4}\tau^{-1}\circ w.$$

Deoarece $\tau^{-1}\circ w \in S^2$ rezultă că $\|\tau^{-1}\circ w\| = 1$. Aplicaţia X fiind conformă rezultă despre prima formă fundamentală că avem $g_{12} = g_{21} = 0$ şi:

$$g_{11} = g_{22} = e^{2\omega} = \|\frac{\partial X}{\partial x}\|\cdot\|\frac{\partial X}{\partial y}\| = \|\frac{\partial X}{\partial x}\times\frac{\partial X}{\partial y}\| = \frac{|h|^2\left(1+|w|^2\right)^2}{4}. \quad (7)$$

În concluzie:

$$\overline{N} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x}\times\frac{\partial X}{\partial y}}{\|\frac{\partial X}{\partial x}\times\frac{\partial X}{\partial y}\|} = \tau^{-1}\circ w$$

ceea ce voiam. Din acest motiv aplicaţia $w = \tau\circ\overline{N}$ se numeşte *aplicaţia Gauss* a lui X.

Calculele acestei probleme au fost adaptate după volumul:

Fang, Yi; *Lectures on minimal surfaces in* $I\!R^3$, Proceedings of the Centre for Mathematics and Its Applications, The Australian National University, vol. 35, 1996.

Observaţii.

(i) Condiţia (Sii) spune că cele 3 funcţii componente ale funcţiei vectoriale $\overline{X}$ sunt funcţii armonice; altfel spus funcţia vectorială $\overline{X}$ este armonică!

Generalizarea imediată se referă la funcţii bi-armonice şi pentru aspecte geometrice deosebit de interesante ale acestor funcţii trimitem la:

1) Caddeo, R., Montaldo, S., Oniciuc, C., *Biharmonic submanifolds of* $\mathbb{S}^3$, Internat. J. Math., 12(2001), no. 8, 867-876,

2) Caddeo, R., Montaldo, S., Oniciuc, C., *Biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math., 130(2002), 109-123,

3) Caddeo, R., Montaldo, S., Piu, P., *Biharmonic curves on a surface*, Rendiconti di Matematica-Roma, Serie VII, 21(2001), 143-157.

(ii) Prezentăm o versiune a reprezentării Weierstrass adaptată după lucrările:

1) Taimanov, I. A., *Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces*, Trans. A.M.S., Ser. 2, 179(1997), 133-151. (dg-ga/9511005)

2) Taimanov, I. A., *The Weierstrass representation of closed surfaces in* $I\!R^3$, dg-ga/9710020.

Considerăm perechea de funcţii de o variabilă complexă $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, prima funcţie fiind anti-olomorfă iar a doua funcţie olomorfă; deci este satisfăcut sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \overline{z}} = 0 \end{cases} (*) .$$

Atunci aplicaţia $z \in \mathbb{C} \to \left(X^1(z, \overline{z}), X^2(z, \overline{z}), X^3(z, \overline{z})\right) \in I\!R^3$ dată de:

$$\begin{cases} X^1 + iX^2 = i \int\limits_\gamma \left(\overline{\psi}_1^2 dz' - \overline{\psi}_2^2 d\overline{z}'\right) \\ X^1 - iX^2 = i \int\limits_\gamma \left(\psi_2^2 dz' - \psi_1^2 d\overline{z}'\right) \\ X^3 = -\int\limits_\gamma \left(\psi_2 \overline{\psi}_1 dz' + \psi_1 \overline{\psi}_2 d\overline{z}'\right) \end{cases}$$

reprezintă parametrizarea conformă a unei suprafeţe minimale. Integrala se calculează pe un drum γ unind punctul complex z cu un punct iniţial z_0. Din ecuaţiile $(*)$ rezultă că integranzii sunt forme diferenţiale închise şi deci valoarea integralelor este independentă de drumul γ.

Această reprezentare se generalizează imediat pentru suprafeţe de curbură medie constantă, nu neapărat nulă. Condiţia $(*)$ se înlocuieşte cu:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = U\psi_2 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \overline{z}} = -U\psi_1 \end{cases} (**)$$

cu "potenţialul" U având valori reale. Atunci fie S suprafaţa cu parametrizarea $\left(X^1, X^2, X^3\right)$ de mai sus. Rezultă prin calcul că avem o parametrizare conformă a lui S i.e. forma I-a fundamentală are expresia: $I = D^2(z,\overline{z})\,dzd\overline{z}$ cu:

$$D(z,\overline{z}) = |\psi_1(z,\overline{z})|^2 + |\psi_2(z,\overline{z})|.$$

Curbura totală este:

$$K = -\frac{1}{D^2}\Delta(\log D)$$

iar curbura medie este:

$$H = \frac{2U}{D}$$

de unde rezultă pentru cazul particular $U = 0$ condiţia $(*)$.

Sistemul $(**)$ admite scrierea: $\mathcal{D}\psi = 0$ unde:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\partial} \\ -\partial & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

cu $\partial = \frac{\partial}{\partial z}, \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$. Operatorul $\mathcal{D}$ este numit *operator Dirac* cu potentialul U.

Reprezentarea Weierstrass generalizată $(**)$ este extinsă la suprafeţe în $I\!R^4$ în lucrările:

1) Konopelchenko, B. G., *Weierstrass representation for surfaces in 4D spaces and their integrable deformations via DS hierarchy*, math.DG/9807129

2) Konopelchenko, B. G., Landolfi, G., *Induced surfaces and their integrable dynamics. II. Generalized Weierstrass representations in 4D spaces and deformations via DS hierarchy*, math.DG/9810138.

(iii) O altă reprezentare de tip Weierstrass pentru suprafeţe de curbură medie constantă nenulă apare în:

Kenmotsu, K., *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann., 245(1979), 89-99.

Parametrizarea Kenmotsu este dată de formula:

$$\overline{X} = \mathrm{Re}\left(\int_\gamma \eta\overline{\varphi}dz'\right)$$

unde $\overline{\varphi} = \left(1 - f^2, i\left(1 + f^2\right), 2f\right)$ iar funcţiile f, η satisfac condiţia de "compatibilitate":

$$\frac{\partial \log \eta}{\partial \overline{z}} = -\frac{2\overline{f}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}{1 + |f|^2}.\ (\#)$$

Pentru această parametrizare curbura medie este:

$$H=-\frac{2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}{\overline{\eta}\left(1+|f|^2\right)^2}.$$

Reprezentarea Kenmotsu şi cea generalizată Weierstrass (∗∗) sunt echivalente şi legatura între perechile $(f,\eta),(\psi_1,\psi_2)$ este:

$$f=i\frac{\overline{\psi}_1}{\psi_2},\eta=i\psi_2^2$$

respectiv:

$$U=-\frac{\eta\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}{\sqrt{\eta\overline{\eta}}\left(1+|f|^2\right)}.$$

Deşi echivalente, reprezentarea Kenmotsu este mai dificilă în practică datorită condiţiei (#).

7.41 La problema anterioară am obţinut forma I-a fundamentală şi aplicaţia Gauss în funcţie de datele (w,h) ale reprezentării Weierstrass.

Se arată, prin calcul, că pentru o metrică conformă $ds^2=e^{2\omega}|dz|^2$ avem curbura Gauss:

$$K=-\frac{1}{2e^{2\omega}}\Delta\left(\log e^{2\omega}\right)=-\frac{2}{e^{2\omega}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\log e^{2\omega}\right).$$

Aplicând formula (7) de la exerciţiul anterior rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\log e^{2\omega}\right)=2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\log|h|\right)+2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\log\left(1+|w|^2\right)\right)\overset{\log|h|=armonic}{=}$$

$$=2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{w'\overline{w}}{1+|w|^2}=2\frac{w'\overline{w}'\left(1+|w|^2\right)-w'\overline{w}w\overline{w}'}{\left(1+|w|^2\right)^2}=\frac{2|w'|^2}{\left(1+|w|^2\right)^2}$$

şi deci:

$$K=-\frac{16|w'|^2}{|h|^2\left(1+|w|^2\right)^4}=-\left[\frac{4|w'|}{|h|\left(1+|w|^2\right)^2}\right]^2.$$

Forma a II-a fundamentală este:

$$\begin{cases} b_{11}=<\frac{\partial^2 X}{\partial x^2},\overline{N}>=<\mathrm{Re}\left(f^{1\prime},f^{2\prime},f^{3\prime}\right),\overline{N}> \\ b_{22}=-b_{11} \\ b_{12}=<\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y},\overline{N}>=-<\mathrm{Im}\left(f^{1\prime},f^{2\prime},f^{3\prime}\right),\overline{N}> \end{cases}.$$

Avem:

$$b_{11} =< \operatorname{Re}\left[\left(\frac{h'}{2}\left(1-w^2\right), \frac{ih'}{2}\left(1+w^2\right), h'w\right) + \left(-hww', ihww', hw'\right)\right], \overline{N} >=$$

şi după un calcul complicat:

$$b_{11} = -\operatorname{Re}\left(hw'\right).$$

Analog avem:

$$b_{12} = \operatorname{Im}\left(hw'\right)$$

de unde rezultă că pentru o suprafaţă minimală funcţia $b_{11} - ib_{12} = -hw'$ este o funcţie olomorfă. Deoarece:

$$(dz)^2 = (dx)^2 - (dy)^2 + 2idxdy$$

avem:

$$b_{11}(dx)^2 + b_{12}dxdy + b_{22}(dy)^2 = -\operatorname{Re}\left(hw'\right)\left((dx)^2 - (dy)^2\right) + 2\operatorname{Im}\left(hw'\right)dxdy =$$

$$= -\operatorname{Re}\left(hw'\right)\operatorname{Re}(dz)^2 + \operatorname{Im}\left(hw'\right)\operatorname{Im}(dz)^2 = -\operatorname{Re}\left[hw'(dz)^2\right] = -\operatorname{Re}(hdwdz).$$

Fie $V \in T_pS$ un vector tangent de normă 1 pe care-l vom scrie:

$$V = e^{-\omega}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right) = 2\operatorname{Re}\left(e^{-\omega}e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial z}\right) = e^{-\omega}e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial z}e^{-\omega}e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$

de unde rezultă:

$$II(V,V) = -e^{-2\omega}\operatorname{Re}\left(hw'e^{2i\theta}\right).$$

Obţinem astfel curburile principale:

$$k_1 = \max_{0\le\theta\le 2\pi} -e^{-2\omega}\operatorname{Re}\left(hw'e^{2i\theta}\right) = e^{-2\omega}|hw'| = \frac{4|w'|}{|h|\left(1+|w|^2\right)}$$

$$k_2 = \min_{0\le\theta\le \pi} -e^{-2\omega}\operatorname{Re}\left(hw'e^{2i\theta}\right) = -e^{-2\omega}|hw'| = -\frac{4|w'|}{|h|\left(1+|w|^2\right)}$$

şi din relaţia $K = k_1 \cdot k_2$ reobţinem formula lui K de mai sus.

Fie $r(t) = x(t) + iy(t)$ o curbă pe S. Cum $r'(t) = x'(t) + iy'(t)$ folosind expresia de mai sus a formei a II-a fundamentale avem:

$$II\left(r'(t), r'(t)\right) = -\operatorname{Re}\{h(r(t))\, w'(r(t))\left[r'(t)\right]^2\}(dt)^2 =$$

$$= -\operatorname{Re}\{d\left[w\left(r\left(t\right)\right)\right]h\left[r\left(t\right)\right]dr\left(t\right)\}.$$

Reamintim că această curbă $t \to r(t)$ este

(i) *linie asimptotică* dacă $II\left(r'\left(t\right), r'\left(t\right)\right) = 0$

(ii) *linie de curbură* dacă $r'(t)$ este direcţie principală adică dacă $\left[r'\left(t\right)\right]^{-2} II\left(r'\left(t\right), r'\left(t\right)\right)$ este o valoare minimă sau maximă a lui $II(v, v)$ pe mulţimea vectorilor unitari din $T_{r(t)}S$.

Cu relaţia precedentă obţinem caracterizările:

(i) $r(t)$ este linie asimptotică dacă şi numai dacă
$h\left[r\left(t\right)\right]w'\left[r\left(t\right)\right]\left[r'\left(t\right)\right]^2 \in i\mathbb{R}$

(ii) $r(t)$ este linie de curbură dacă şi numai dacă
$h\left[r\left(t\right)\right]w'\left[r\left(t\right)\right]\left[r'\left(t\right)\right]^2 \in \mathbb{R}$.

Calculele sunt prezentate după aceeaşi monografie folosită la problema precedentă.

7.42 (i)

I) *Catenoidul*

Se obţine luând: $w(z) = z, h(z) = \frac{1}{z^2}$. Avem deci, în notaţiile problemei 7.41:

$$f(z) = \left(\frac{1-z^2}{2z^2}, \frac{i\left(1+z^2\right)}{2z^2}, \frac{1}{z}\right).$$

Curbura totală este $K = -4\pi$. Catenoidul este o suprafaţă de rotaţie şi efectuând calculele obţinem ecuaţia sa implicită:

$$x^2 + y^2 = ch^2 z$$

şi deci ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = chu\cos v \\ y = chu\sin v \\ z = u \end{cases}.$$

Forma I-a fundamentală este:

$$I = ch^2u\left(du^2 + dv^2\right)$$

iar forma a II-a fundamentala:

$$II = -du^2 + dv^2.$$

Fig.7 Catenoidul.

Se arată că singurele suprafeţe minimale de rotaţie sunt planul şi catenoidul.

II) *Elicoidul*

Dată suprafaţa minimală S cu reprezntarea Weierstrass $\overline{X} = \operatorname{Re}\left(\int\limits_{\gamma} f dz'\right)$ putem asocia lui S o întreagă familie de suprafeţe minimale $S_{\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ cu reprezentarea Weierstrass:

$$\overline{X}_{\theta} = \operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\int\limits_{\gamma} f dz'\right).$$

Suprafaţa $S_{\frac{\pi}{2}}$ se numeşte *suprafaţa conjugată* suprafeţei minimale S.

Elicoidul este suprafaţa minimală conjugată catenoidului şi deci are reprezentarea Weierstrass dată de:

$$f(z) = \left(\frac{i\left(1 - z^2\right)}{2z^2}, -\frac{1 + z^2}{2z^2}, \frac{i}{z}\right).$$

Pentru geometria elicoidului a se vedea problema 7.16. Se arată că singurele suprafeţe minimale riglate sunt planul şi elicoidul.

III) *Suprafaţa Enneper*

Luăm $h = 1, w(z) = z$ şi deci avem în reprezentarea Weierstrass:

$$f(z) = \left(\frac{1 - z^2}{2}, \frac{i\left(1 + z^2\right)}{2}, z\right).$$

Pentru geometria suprafeţei Enneper a se vedea problema 7.15.

IV) *Elicoidul răsucit* ("Twisted Elicoid")

Conform lucrării:

Nitsche, J. C. C., *A characterization of the catenoid*, J. Math. Mech., 11(1962), 293-301,

această suprafaţă are parametrizarea:

$$S: \begin{cases} x = u\cos v \\ y = \int\limits_1^u \frac{w^2 dw}{\Delta(w)} + u\sin v \\ z = \int\limits_1^u \frac{dw}{\Delta(w)} \end{cases} \quad \text{unde } \Delta(w) = \sqrt{w^4 - 1}.$$

Avem:

	x	y	z
$\overline{r}_u$	$\cos v$	$\frac{u^2}{\sqrt{u^4-1}} + \sin v$	$\frac{1}{\sqrt{u^4-1}}$
$\overline{r}_v$	$-u\sin v$	$u\cos v$	0
$\overline{r}_{uu}$	0	$-\frac{2u}{(u^4-1)^{\frac{3}{2}}}$	$-\frac{2u^3}{(u^4-1)^{\frac{3}{2}}}$
$\overline{r}_{uv}$	$-\sin v$	$\cos v$	0
$\overline{r}_{vv}$	$-u\cos v$	$-u\sin v$	0
$\overline{N}$	$-\frac{u\cos v}{\sqrt{(EG-F^2)(u^4-1)}}$	$-\frac{u\sin v}{\sqrt{(EG-F^2)(u^4-1)}}$	$\frac{u\sqrt{u^4-1}+u^3\sin v}{\sqrt{(EG-F^2)(u^4-1)}}$

de unde rezultă:

$$E = \frac{2u^2 \sin v}{\sqrt{u^4-1}} + \frac{2u^4}{u^4-1}, F = \frac{u^3\cos v}{\sqrt{u^4-1}}, G = u^2$$

$$L = \frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{2u^2\sin v}{u^4-1} + \frac{2u^4}{(u^4-1)^{\frac{3}{2}}}\right), M = 0, N = \frac{u^2}{\sqrt{(EG-F^2)(u^4-1)}}$$

şi deci:

$$(EN - 2FM + GL)\sqrt{EG-F^2} =$$

$$= \frac{u^2}{\sqrt{u^4-1}}\left(\frac{2u^2\sin v}{\sqrt{u^4-1}} + \frac{2u^4}{u^4-1}\right) - u^2\left(\frac{2u^2\sin v}{u^4-1} + \frac{2u^4}{(u^4-1)^{\frac{3}{2}}}\right) = 0$$

deci această suprafaţă este minimală! Propunem cititorului găsirea reprezentării Weierstrass asociate!

V) *Suprafaţa lui Scherk*

$$S: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \ln\frac{\cos v}{\cos u} \end{cases}.$$

Pentru această suprafaţă avem:

	x	y	z
$\overline{r}_u$	1	0	$-tgu$
$\overline{r}_v$	0	1	$-tgv$
$\overline{r}_{uu}$	0	0	$-\frac{1}{\cos^2 u}$
$\overline{r}_{uv}$	0	0	0
$\overline{r}_{vv}$	0	0	$-\frac{1}{\cos^2 v}$
$\overline{N}$	$\frac{tgu}{\sqrt{\Delta}}$	$\frac{tgv}{\sqrt{\Delta}}$	$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$

$$\begin{cases} E = \frac{1}{\cos^2 u}, F = tgutgv, G = \frac{1}{\cos^2 v}, \Delta := EG - F^2 = \frac{1-\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} \\ L = \frac{-1}{\cos^2 u\sqrt{\Delta}}, M = 0, N = \frac{-1}{\cos^2 v\sqrt{\Delta}} \end{cases}$$

şi deci:

$$H = \frac{\frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{-1}{\cos^2 v} - \frac{1}{\cos^2 v} \cdot \frac{-1}{\cos^2 u}}{2\Delta^{3/2}} = 0$$

ceea ce voiam.

VI) *Suprafaţa lui Catalan*

$$S : \begin{cases} x = u - \sin uchv \\ y = 1 - \cos uchv \\ z = 4\sin \frac{u}{2} sh\frac{v}{2} \end{cases}$$

VII) *Suprafaţa lui Henneberg*

$$S : \begin{cases} x = 2shu\cos v - \frac{2}{3}sh\,(3u)\cos\,(3v) \\ y = 2shu\sin v + \frac{2}{3}sh\,(3u)\sin\,(3v) \\ z = 2ch\,(2u)\cos\,(2v) \end{cases}$$

(ii) Avem 3 definiţii echivalente ale suprafeţelor minimale:

(a) imaginea unei imersii conforme armonice

(b) suprafaţă având curbura medie nulă (definiţia cu caracter geometric). Să notăm:

-curbura totală a fost introdusă de Gauss(1777-1855) în 1828

-curbura medie a fost introdusă de Sophie Germain în 1831 şi este folosită, spre exemplu, în teoria elasticităţii

-o altă curbură a fost introdusă de fizicianul român Emanoil Bacaloglu într-un articol din "Zeitschrift der Mathematik und Physik" în 1859.

(c) punct de minim al funcţionalei arie (prima definiţie din punct de vedere istoric, constituie aşa numita *problemă Plateau*).

Legătura între (a) şi (b) este dată de relaţia (6) de la exerciţiul 7.40, a se vedea şi începutul ex. 7.41. Avem deci ecuaţia suprafeţelor minimale,

$H = 0$, sau deoarece:

$$H = \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \tag{$*$}$$

avem ecuaţia:

$$b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} = 0. \tag{1}$$

Să demonstrăm relaţia $(*)$. Reamintim că $H = Tr\left(II \cdot I^{-1}\right)$ şi din:

$$II = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

rezultă:

$$I^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$$

$$II \cdot I^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} b_{11}g_{22} - b_{12}g_{12} & -b_{11}g_{12} + b_{12}g_{11} \\ b_{12}g_{22} - b_{22}g_{12} & b_{22}g_{11} - b_{12}g_{12} \end{pmatrix}$$

de unde concluzia. Cu notaţiile lui Gauss relaţia (1) se scrie:

$$G \cdot L - 2F \cdot M + E \cdot N = 0. \tag{$1'$}$$

Punctul de pornire al teoriei suprafeţelor minimale îl constituie studiul lui Lagrange (1736-1813) din 1760 al punctelor de minim ale funcţionalei arie, deci definiţia (c) de mai sus, ceea ce dă şi explicaţia denumirii de ”minimale”. El consideră suprafaţa ca fiind dată explicit $z = f(x, y)$ şi prelucrând ecuaţia Euler-Lagrange a funcţionalei arie ajunge la ecuaţia:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{w}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{w}\right) = 0$$

unde p şi q sunt notaţiile Monge, a se vedea ex. 2.17, iar $w = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$. În final, se ajunge la ecuaţia cu derivate parţiale:

$$f_{xx}\left(1 + f_y^2\right) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}\left(1 + f_x^2\right) = 0. \tag{2}$$

Astfel, Lagrange observă că o funcţie liniară în x şi y satisface (2) datorită derivatelor de ordin 2 şi deci planul este suprafaţă minimală. În 1915 S. Berstein demonstrează că dată funcţia f de clasă C^2 al cărei grafic este o suprafaţă minimală atunci f este liniară!

Abia în 1776, Meusnier observă că interpretarea geometrică a relaţiei (2) este anularea a ceea ce mai târziu va fi numită curbura medie. Mai precis, un calcul imediat dă expresia:

$$H = \frac{f_{xx}\left(1+f_y^2\right) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}\left(1+f_x^2\right)}{2\left(1+f_x^2+f_y^2\right)^{3/2}} \tag{\#}$$

(a se vedea şi exerciţiul 7.17).

Să presupunem acum suprafaţa dată implicit $S : F(x, y, z) = 0$. Din relaţia $F(x, y, f(x, y)) = 0$ rezultă:

$$\begin{cases} f_x = -\frac{F_x}{F_z} \\ f_y = -\frac{F_y}{F_z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{xx} = \frac{F_x(F_{xz}F_z - F_{zz}F_x) - F_z(F_{xx}F_z - F_{xz}F_x)}{F_z^3} \\ f_{xy} = \frac{F_x(F_{yz}F_z - F_{zz}F_y) - F_z(F_{xy}F_z - F_{xz}F_y)}{F_z^3} \\ f_{yy} = \frac{F_y(F_{yz}F_z - F_{zz}F_y) - F_z(F_{yy}F_z - F_{yz}F_y)}{F_z^3} \end{cases}$$

şi înlocuind în (#) obţinem ecuaţia:

$$2(F_{xy}F_xF_y + F_{yz}F_yF_z + F_{zx}F_zF_x) =$$

$$F_{xx}\left(F_y^2+F_z^2\right) + F_{yy}\left(F_z^2+F_x^2\right) + F_{zz}\left(F_x^2+F_y^2\right). \tag{3}$$

Pentru alte amănunte relativ la ecuaţia suprafeţelor minimale a se vedea şi:

a) Griffin, Sarah Field, *Minimal surfaces: a derivation of the minimal surface equation for an arbitrary C^2 coordinate chart*, Missouri J. Math. Sci., 13(2001), no. 3, 145-153.

7.43 Fie în spaţiul $I\!R^n$ hipersuprafaţa S orientată, cu versorul normalei N. Dat $p \in S$ notăm T_pS spaţiul tangent în p la S şi atunci avem transformarea liniară $W : T_pS \to T_pS, W(v) = -\nabla_v N$ unde prin ∇_v am notat derivata relativ la $v \in T_pS$. Aplicaţia liniară W se numeşte *aplicaţia Weingarten* şi prin definiţie *curbura Gauss* a lui S este determinantul K al acestei aplicaţii liniare.

În cazul $n=2$ curbura Gauss K a unei curbe C este exact curbura uzuală k dacă luâm N ca fiind normala la C. În cazul înlocuirii lui N cu $(-N)$ avem $K=-k$. În cazul general, dacă n este impar atunci K nu depinde de alegerea lui N iar dacă n este par atunci K îşi schimbă semnul la schimbarea lui N.

Relativ la expresia lui K în cazul hipresuprafeţelor implicite, în lucrarea:

Shin-ichi Nishimura, Masao Hashiguchi, *On the Gaussian curvature of the indicatrix of a Lagrange space*, Rep. Fac. Sci., Kagoshima Univ., 24(1991), 33-41,
la pagina 37 este demonstrat următorul rezultat:

Propoziţie *Fie hipersuprafaţa* $S=\{x\in I\!R^n; f(x)=0, (\nabla f)(x)\neq 0\}$, *cu* $f\in C^\infty(I\!R^n)$ *şi versorul normalei* $N=-\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$. *Atunci curbura Gauss a perechii* (S,N) *este:*

$$K=-\frac{\begin{vmatrix} f_{ij} & f_i \\ f_j & 0 \end{vmatrix}}{\|\nabla f\|^{n+1}}$$

unde $f_i=\frac{\partial f}{\partial x^i}, f_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}$.

Pentru alte amănunte a se vedea şi lucrările:

(i) M. Hashiguchi, *On a Finsler-geometrical expression of the Gaussian curvature of a hypersurface in an Euclidian space*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ., 25(1992), 21-27.

7.44 (i) Fie suprafaţa oarecare S cu forma I-a fundamentală $I=(g_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ şi forma a II-a fundamentală $II=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$. Conform [**?**, p. 298] avem:
(i) ecuaţia Gauss:

$$\det II=\sum_{i=1}^{2} g_{1r}\{\frac{\partial\Gamma_{22}^r}{\partial u_1}-\frac{\partial\Gamma_{12}^r}{\partial u_2}+\sum_{m=1}^{2}(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^r-\Gamma_{12}^m\Gamma_{m2}^r)\}$$

(ii) ecuaţiile Codazzi:

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{12}}{\partial u_1}-\frac{\partial b_{22}}{\partial u_2}=\sum\limits_{r=1}^{2}(\Gamma_{11}^r l_{r2}-\Gamma_{12}^r lr1) \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial u_1}-\frac{\partial b_{12}}{\partial u_2}=\sum\limits_{r=1}^{2}(\Gamma_{12}^r l_{r2}-\Gamma_{22}^r lr_{r1}) \end{cases}.$$

Reamintim că pentru o suprafaţă conformă avem cf. ex. 7.42:

$$I=e^{2w}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$II = e^{2w}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{\partial w}{\partial u_1} \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{\partial w}{\partial u_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 = \frac{\partial w}{\partial u_2} \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial w}{\partial u_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 = -\frac{\partial w}{\partial u_1} \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial w}{\partial u_2} \end{cases}$$

şi deci avem:
(i) ecuaţia Gauss:

$$b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 = -e^{2w}\Delta w$$

(ii) ecuaţiile Codazzi:

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u_2} = -(b_{11} + b_{22})\frac{\partial w}{\partial u_2} \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u_2} = (b_{11} + b_{22})\frac{\partial w}{\partial u_1} \end{cases}.$$

Dar $b_{11} + b_{22} = 2H$ deci putem scrie ecuaţiile Codazzi:

$$\begin{cases} b_{12,1} - b_{11,2} = -2Hw_2 \\ b_{22,1} - b_{12,2} = 2Hw_1 \end{cases}$$

unde indicele inferior reprezintă variabila în raport cu care se derivează.

(ii) Dacă $H = 0$ ecuaţiile Codazzi devin:

$$\begin{cases} b_{12,1} = b_{11,2} \\ b_{12,2} = -b_{11,1} \end{cases} \tag{1}$$

care sunt exact ecuaţiile Cauchy-Riemann din teoria funcţiilor complexe. Deci există o funcţie armonică m astfel încât:

$$\begin{cases} b_{11} = -b_{22} = m_1 \\ b_{12} = m_2 \end{cases}.$$

Fie funcţiile A, φ aşa încât:

$$\begin{cases} b_{11} = m_1 = A\cos\varphi \\ b_{12} = m_2 = A\sin\varphi \end{cases}.$$

Ecuaţia Gauss devine:
$$A^2 = e^{2w}\Delta w. (*)$$

Ecuaţia (1_1) devine:

$$A_2 \cos\varphi - A\sin\varphi\varphi_2 - A_1 \sin\varphi - A\cos\varphi\varphi_1 = 0. \tag{2}$$

Exprimăm faptul că m este funcţie armonică:

$$m_{11} + m_{22} = (A\cos\varphi)_1 + (A\sin\varphi)_2 = 0$$

adică:
$$A_2 \sin\varphi + A\cos\varphi\varphi_2 + A_1 \cos\varphi - A\sin\varphi\varphi_1 = 0. \tag{3}$$

Înmulţind ec. (2) cu $\cos\varphi$, ec. (3) cu $\sin\varphi$ şi adunând avem: $A_2 - A\varphi_1 = 0$ adică:
$$\varphi_1 = \frac{A_2}{A}. \tag{4}$$

Analog, înmulţind ec. (2) cu $(-\sin\varphi)$, ec. (3) cu $\cos\varphi$ şi adunând avem: $A_1 + A\varphi_2 = 0$ adică:
$$\varphi_2 = -\frac{A_1}{A}. \tag{5}$$

Dar ecuaţiile $(4), (5)$ exprimă exact faptul că funcţiile φ şi $\ln A$ sunt armonice conjugate. Din $(*)$ avem:

$$\ln A = w + \frac{1}{2}\ln\Delta w.$$

Punctul (ii) urmăreşte articolul:

Amato, F., *Sulle superficie minime e le metriche isoterme*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5), 60(1974), 36-42.

7.45 (i) Deoarece g este constantă rezultă $\Gamma_{ij}^k = 0, 1 \leq i, j, k \leq 2$ şi deci ecuaţia Gauss devine: $\det b = 1 = 0$, fals.

(ii) Un calcul imediat, folosind formulele de la ex. 7.37, dă: $\Gamma_{11}^1 = \frac{u^1}{1+(u^1)^2}$ şi toţi ceilalţi simboli Christoffel sunt nuli. Ecuaţia Gauss devine: $\det b = u^1 = 0$, fals.

7.46 Fie $g = (g_{ij} =< \overline{r}_i, \overline{r}_j >)_{1\leq i,j\leq 2}$ forma I-a fundamentală şi $g^{-1} = \left(g^{ij}\right)_{1\leq i,j\leq 2}$ matricea inversa. Fie $\left(b_{ij} =< \overline{r}_{ij}, \overline{N} >\right)_{1\leq i,j\leq 2}$ forma a II-a fundamentală şi $\left(b_i^k = g^{ka}b_{ai}\right)_{1\leq i,k\leq 2}$ contracţia cu g^{-1}. Fie $\left(\Gamma_{ij}^k\right)_{1\leq i,j,k\leq 2}$ simbolii Christoffel, a se vedea ex. 7.37.

Prin derivarea în raport cu u^i a relaţiei $<\overline{N},\overline{N}>=1$ rezultă că vectorul $\overline{N}_i$ este perpendicular pe $\overline{N}$ deci $\overline{N}_i$ nu are componentă pe direcţia lui $\overline{N}$. Derivând în raport cu u^i relaţia $<\overline{N},\overline{r}_k>=0$ rezultă $<\overline{N}_i,\overline{r}_a>=-<\overline{N},\overline{r}_{ai}>=-b_{ai}$. Notând $\overline{N}_i=A_i^k\overline{r}_k$ rezultă prin înmulţirea scalară cu $\overline{r}_a$ că $A_i^k g_{ka}=-b_{ai}$ deci $A_i^k=-b_i^k$ şi în concluzie avem ecuaţia Weingarten.

Relativ la ecuaţia Gauss faptul că b_{ij} este coeficientul lui $\overline{r}_{ij}$ în direcţia lui $\overline{N}$ rezultă din definiţia formei a II-a fundamentale ţinând cont de faptul că $\overline{N}$ este versor. Fie deci relaţia $\overline{r}_{ij}=\Gamma_{ij}^k\overline{r}_k+b_{ij}\overline{N}$ şi să arătam că Γ_{ij}^k sunt exact coeficienţii Christoffel. Înmulţind scalar ultima relaţie cu $\overline{r}_a$ rezultă $\Gamma_{ij}^k g_{ka}=<\overline{r}_{ij},\overline{r}_a>$. Derivând în raport cu u^j relaţia $<\overline{r}_i,\overline{r}_a>=g_{ia}$ şi ţinând cont de ultima relaţie rezultă:

$$\Gamma_{ij}^k g_{ka}+\Gamma_{ja}^k g_{ki}=g_{ia,j}$$

relaţie în care permutând circular indicii $i\to j, j\to a, a\to i$ mai obţinem:

$$\Gamma_{ja}^k g_{ki}+\Gamma_{ai}^k g_{kj}=g_{ji,a}$$

$$-\Gamma_{ai}^k g_{kj}-\Gamma_{ij}^k g_{ka}=-g_{aj,i}$$

; adunând ultimele 3 relaţii, ţinând cont de simetria în indicii inferiori ai lui g şi Γ, rezultă:

$$2\Gamma_{ja}^k g_{ki}=g_{ia,j}+g_{ji,a}-g_{ja,i}$$

sau încă:

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{ka}\left(g_{aj,i}+g_{ia,j}-g_{ij,a}\right)$$

relaţia de definiţie a simbolilor Christoffel.

O scriere mai compacta a ecuaţiilor Gauss-Weingarten este:

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\begin{pmatrix}\overline{r}_1\\ \overline{r}_2\\ \overline{N}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma_{i1}^1 & \Gamma_{i1}^2 & b_{i1}\\ \Gamma_{i2}^1 & \Gamma_{i2}^2 & b_{i2}\\ -b_i^1 & -b_i^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{r}_1\\ \overline{r}_2\\ \overline{N}\end{pmatrix}.$$

7.47 Folosim notaţiile de la exerciţiul anterior. Fie deci curba $c: u^i=u^i(s)$, presupusă parametrizată canonic.Vectorul tangent este: $\frac{d}{ds}\overline{r}\circ c(s)=\overline{r}_i(c(s))\frac{du^i}{ds}(s)$. Vectorul acceleraţie este:

$$\frac{d^2}{ds^2}\overline{r}\circ c(s)=\overline{r}_k(c(s))\frac{d^2u^k}{ds^2}(s)+\overline{r}_{ij}(c(s))\frac{du^i}{ds}(s)\frac{du^j}{ds}(s)=$$

$$=\left(b_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\overline{N}+\left(\frac{d^2u^k}{ds^2}+\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\overline{r}_k$$

de unde rezultă ecuaţia geodezicelor

$$\frac{d^2u^k}{ds^2}(s) + \Gamma_{ij}^k\left(u^1(s), u^2(s)\right)\frac{du^i}{ds}(s)\frac{du^j}{ds}(s) = 0.$$

CAPITOLUL 8

Probleme de geometrie date la examenul de licenţă

Notă: Aceste probleme au fost date la Facultatea de Matematică a Universităţii "Al. I. Cuza" din Iaşi.

Iunie 2004

1) Se cer ecuaţiile canonice ale dreptei δ care trece prin punctul $M_0\left(1,-1,3\right)$, este paralelă cu planul $\pi : x-2y+z+7=0$ şi este concurentă cu dreapta $d : \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

2) Forma I-a fundamentală a unei suprafeţe. Lungimi, unghiuri şi arii pe o suprafaţă.

Februarie 2004

1) Se dau vectorii $v_1=(2,1,3)\,,v_2=(0,2,1)\,,v_3=(2,3,0)$.

(i) Să se arate că $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ este o bază în $\mathbb{R}^3$.

(ii) Se cere matricea schimbării de baze de la B la baza canonică.

(iii) Se cer coordonatele vectorului $v=(5,3,7)$ în baza B.

2) (i) Să se arate că ecuaţia $x^2+2xy+4y^2-4y=0$ reprezintă o elipsă şi să se determine diametrul ei conjugat direcţiei $\left(-1,1\right)$.

(ii) Să se arate că în familia de plane $\pi_\lambda : \lambda x+2y-4z-1=0, \lambda$ parametru real, există un unic plan perpendicular pe planul $\pi : x+y+z-1=0$ ce se cere determinat.

3) Forma I-a fundamentală a unei suprafeţe. Lungimea unei curbe pe o suprafaţă.

Iunie 2003

1) Fie suprafaţa $S : \overline{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u+v), (u,v) \in I\!R^2$. Să se arate că:

(i) planele tangente la curba $v = v_0$ =constant pe S formează un fascicol. Se cere planul din fascicol perpendicular pe planul $\pi : z = 0$.

(ii) curba de ecuaţie $u = u_0$ =constant pe S are curbura şi torsiunea constantă.

2) Spaţii punctual euclidiene, distanţa între două puncte, unghiuri, repere ortonormale.

Februarie 2003

1) Se dā planul $\pi : 6x + 2y - 9z + 121 = 0$ şi punctul $M(-12, -4, 18)$.

(i) Se cer coordonatele punctului M' simetricul lui M faţă de π şi să se arate că M' aparţine fiecărei conici din familia de conice $\Gamma_\lambda : x^2 + 2\lambda y^2 - x + y = 0, \lambda$ parametru real.

(ii) Discutaţi după parametrul λ natura conicelor din familia dată.

(iii) Să se reprezinte grafic conicele $\lambda = \frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{2}$.

2) Se dă suprafaţa $S : \overline{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, hv)$, h parametru real pozitiv.

(i) Se cer punctele lui S în care planul tangent este paralel cu vectorul $\overline{v} = (1,1,1)$ şi arătaţi că aceste puncte aparţin curbei $C : \overline{r}(t) = \left(\frac{h}{2}(1 + \cos 2t - \sin 2t), \frac{h}{2}(-1 + \cos 2t + \sin 2t), ht\right)$.

(ii) Să se arate că C are curbura şi torsiunea constantă.

3) Spaţii afine. Subspaţii afine, intersecţii şi uniuni.

****