Geometrie Diferenţială: 26 Mai 2021

Mircea Crâşmăreanu

Cuprins

Introducere

Deşi pare paradoxal având în vedere istoria bogată a subiectului, a compune o nouă carte de ”Geometrie a curbelor şi suprafeţelor” nu este un lucru facil. Chiar acest trecut glorios apasă cu o responsabilitate sporită pe umerii celui ce îşi propune o nouă scriere. Astfel, există câteva monografii excelente în domeniu şi de o parte din ele ne-au servit ca punct de plecare şi manieră de abordare. Faptul că ne-am încumetat la o nouă redactare se datoreză şi aspectului important că unele din aceste tratate sunt greu accesibile studenţilor precum şi necesităţii de a face o selectare foarte drastică a materialului necesar în conformitate cu numărul de ore alocate Cursului: 4 ore curs/3 ore seminar. Astfel, deşi am prezentat partea clasică a teoriei, a trebuit să facem un veritabil mixaj de subiecte, tehnici, exemple, şi în ideea unei oferte editoriale rezonabile (100 de pagini). De asemeni, am aţintit şi o privire spre partea de abordare cu ajutorul calculatorului a unor chestiuni computaţionale. Sunt incluse un mare număr de probleme (130) cu grade diverse de dificultate!

Un proiect de o asemenea amploare a beneficiat din plin de sprijinul a mai multor colegi. Suntem datori cu mulţimi domnişoarei asistent doctor Adina Balmuş, care, cu deosebită generozitate, a corectat anumite greşeli, erori, omisiuni. Mulţumim colegului conferenţiar doctor Marian-Ioan Munteanu pentru disponibilitatea de a ne ajuta în diverse aspecte ale tehnoredactării.

Cursul 1

Noţiunea de curbă. Geometria unei curbe

ACEST CURS RĂSPUNDE LA URMĂTOARELE ÎNTREBĂRI:

$\boxed{Q_1\text{: Ce este o curbă ?}}$

$\boxed{Q_2\text{: Ce înseamnă geometria unei curbe ?}}$

– –

Fixăm numărul natural $n \geq 2$. Scena întregii materii a acestui Curs va fi spaţiul n-dimensional $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ unde în acest produs cartezian avem n factori. Dat $i \in \{1, ..., n\}$ avem *proiecţia* $\pi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi^i(\bar{x}) = \pi^i(x^1, ..., x^n) = x^i$.

Definiţia 1.1 i) Numim *curbă parametrică* sau *curbă parametrizată* în $\mathbb{R}^n$ o aplicaţie $\bar{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ unde:
i1) $I = (a, b)$ este un interval real deschis,
i2) $\bar{r}$ este o funcţie netedă adică pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$ aplicaţia $x^i = \pi^i \circ \bar{r} : I \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă de clasă C^∞ (netedă).
ii) Mulţimea $C \subset \mathbb{R}^n$ o numim *curbă în* $\mathbb{R}^n$ dacă există o curbă parametrică $\bar{r} : I \to \mathbb{R}^n$ aşa încât $C = \bar{r}(I)$. Spunem că $\bar{r}$ este o *parametrizare* a lui C şi notăm:

$$\boxed{\text{C: } \bar{r} = \bar{r}(t), \quad t \in I.} \tag{1.1}$$

t se numeşte *parametru pe curba* C iar punctul $P = \bar{r}(t)$ al curbei îl notăm simplu $P(t)$ sau încă $P(\bar{r}(t))$. Relaţia (1.1) o numim *ecuaţia parametrică a curbei* C.

Observaţii 1.2 i) Este posibil ca intervalul I să nu fie deschis; atunci vom presupune existenţa perechii $(J, \bar{R})$ cu J interval real deschis conţinând I şi $\bar{R} : J \to \mathbb{R}^n$ netedă aşa încât $\bar{r}$ este restricţia la I a lui $\bar{R}$. Mai spunem că $C = \bar{r}(I)$ este *arc al curbei* $\bar{C} = \bar{R}(J)$.
Spre exemplu, domeniul de definiţie al *cercului unitate* S^1 pentru o parametrizare injectivă nu este deschis:

$$S^1 : \bar{r}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi) \tag{1.2}$$

şi bineînţeles că avem $\bar{R}(t) = (\cos t, \sin t)$ netedă pe $J = \mathbb{R}$.
ii) Dacă $n = 2$ atunci spunem că C este o *curbă în plan* iar pentru $n = 3$ spunem că C este o

curbă în spaţiu. Dacă C este o curbă în spaţiu dar situată într-un plan π atunci vom spune că C este o *curbă plană*.

Exemple 1.3 i) Dreapta d conţinând punctul $M(\bar{r}_0)$ şi având vectorul director $\bar{a} \neq \bar{0}$ este (conform Cursului Geometrie 1):

$$d : \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

ii) Axa Ox din $\mathbb{R}^3$ este o curbă în spaţiu. Trei parametrizări pentru această curbă sunt:

$$Ox : \bar{r}_1(t) = (t, 0, 0), \quad \bar{r}_2(t) = (t^3 + 2t, 0, 0), \quad \bar{r}_3(t) = (t^5, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Din ultimul exemplu vedem că o curbă oarecare are mai multe parametrizări. Pentru a realiza o legătură între două astfel de parametrizări reamintim:

Definiţia 1.4 Fie intervalele reale I şi J şi funcţia $\varphi : J \to I$, $s \to \varphi(s) = t$. Spunem că φ este *difeomorfism* dacă φ este bijecţie cu φ şi φ^{-1} netede. Fie $Diff(J, I)$ mulţimea nevidă a acestor difeomorfisme.

Fie $s_0 \in J$ fixat şi $t_0 = \varphi(s_0)$. Reamintim derivata lui φ^{-1} în t_0:

$$(\varphi^{-1})'(t_0) = \frac{1}{\varphi'(s_0)} \tag{1.4}$$

deci φ' nu se anulează în niciun punct!

Definiţia 1.5 Curbele parametrizate $\bar{r} : I \to \mathbb{R}^n$, $\bar{h} : J \to \mathbb{R}^n$ se numesc *echivalente* şi notăm $\bar{r} \sim \bar{h}$ dacă există $\varphi \in Diff(J, I)$ aşa încât $\bar{h} = \bar{r} \circ \varphi$. Spunem că φ este o *schimbare de parametru* şi că $\bar{h}$ este o *reparametrizare* a lui $\bar{r}$.

Să observăm din definiţia precedentă că $\bar{r}$ şi $\bar{h}$ au aceeaşi imagine geometrică C deoarece φ este bijecţie; deci $\bar{r}$ şi $\bar{h}$ sunt parametrizări ale aceleiaşi curbe C.

Propoziţia 1.6 $\sim$ *este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea parametrizărilor unei curbe* C.

Demonstraţie 1) (Reflexivitatea) $\bar{r} \sim \bar{r}$ cu $\varphi = 1_I$.
2) (Simetria) Presupunem că $\bar{r}_1 \sim \bar{r}_2$ via φ. Atunci $\bar{r}_2 \sim \bar{r}_1$ via φ^{-1}.
3) (Tranzitivitatea) Presupunem că $\bar{r}_1 \sim \bar{r}_2$ via φ şi $\bar{r}_2 \sim \bar{r}_3$ via ψ. Atunci $\bar{r}_1 \sim \bar{r}_3$ via $\varphi \circ \psi$. Să obsevăm că dacă $\varphi \in Diff(J, I)$ şi $\psi \in Diff(K, J)$ atunci $\varphi \circ \psi \in Diff(K, I)$. $\square$

Acest rezultat ne permite introducerea noţiunii principale a acestui Curs:

Definiţia 1.7 Se numeşte *proprietate* (*mărime*) *geometrică* sau *invariant* al curbei C o proprietate (mărime) ce nu depinde de parametrizările dintr-o clasă de echivalenţă fixată a lui C. Mulţimea proprietăţilor şi mărimilor geometrice constituie *geometria* lui C.

Cu Propoziţia 1.6 o curbă C va fi considerată ca o clasă de echivalenţă de curbe parametrice şi o proprietate geometrică este o proprietate comună tuturor curbelor parametrice echivalente; dar bineinţeles că din punct de vedere computaţional vom lucra cu un reprezentant fixat, adică cu o parametrizare dată, de aceea în cele ce urmează vom considera doar curbe paramerizate. Un prim exemplu de proprietate geometrică este dat de:

Definiţia 1.8 Fie $C : \bar{r} = \bar{r}(t), t \in I$ şi $t_0 \in I$ fixat. Punctul $M_0(t_0)$ al lui C este numit:
i) *singular* dacă $\bar{r}'(t_0) = \bar{0}$,

ii) *regulat* dacă nu este singular.
O curbă cu toate punctele regulate se numeşte *regulată*.

Propoziţia 1.9 *Regularitatea (şi deci singularitatea) este o proprietate geometrică.*

Demostraţie Fie $\varphi : J \to I$ o schimbare de parametru pe C şi $u_0 \in J$ aşa încât $t_0 = \varphi(u_0)$. Fie $\bar{R}(u) = \bar{r} \circ \varphi(u)$ noua parametrizare a lui C. Avem:

$$\frac{d\bar{R}}{du}(u_0) = \frac{d\bar{r}}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\varphi}{du}(u_0). \tag{1.5}$$

Cum $\varphi' \neq 0$ pe J avem $\bar{r}'(t_0) \neq 0$ dacă şi numai dacă $\bar{R}'(u_0) \neq \bar{0}$. $\Box$

Observaţii 1.10 Parametrizările $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$ ale axei Ox sunt regulate dar parametrizarea $\bar{r}_3$ are punctul singular $t = 0$ corespunzător originii $O(0,0,0)$; putem spune că originea este o singularitate aparentă a axei Ox. Atenţie: aplicaţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t^3 + 2t$ este un difeomorfism al dreptei reale deoarece $\varphi'(t) = 3t^2 + 2 > 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Deci $\bar{r}_1 \sim \bar{r}_2$.

În concluzie, dreapta cu parametrizarea $\bar{r}_1$ (echivalent $\bar{r}_2$) are o anumită geometrie diferită de geometria dreptei cu parametrizarea $\bar{r}_3$! $\Box$

În continuare, vom considera **doar curbe parametrizate regulate**! Dacă vom compara $\bar{r}_1$ cu $\bar{r}_2$ ale exemplului precedent observăm că $\bar{r}_1'$ are norma constantă (egală cu 1, deci este versor) în timp ce $\bar{r}_2'$ are norma variabilă $3t^2+2$. Este clar ca din punct de vedere al calculelor este preferabilă prima parametrizare. Următorul concept formalizează acest aspect important:

Definiţia 1.11 Curba $C : \bar{r} = \bar{h}(s), s \in J$ se numeşte *parametrizată unitar* sau (*canonic*) dacă $\|\bar{h}'(s)\| = 1$ pentru toţi $s \in J$. Atunci s se numeşte *parametru natural* sau *canonic* pe C.

Teorema 1.12 *Fie $C : \bar{r} = \bar{r}(t), t \in I$ o curbă regulată.*
1) *Există o reparametrizare canonică a lui C.*
2) *Fie $\bar{r} \circ \varphi_1$ şi $\bar{r} \circ \varphi_2$ două parametrizări canonice ale lui C cu $\varphi_i : I_i \to I$. Atunci $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : I_1 \to I_2$ are expresia $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(s) = \pm s + s_0$ cu $s_0 \in \mathbb{R}$.*

Demonstraţie 1) Fie $I = (a,b)$ şi fixăm $t_0 \in I$ un punct numit *origine*. Definim $L : (t_0, b) \to \mathbb{R}$, $L(t) = \int_{t_0}^{t} \|\bar{r}'(u)\| du$. Această funcţie este netedă cu $L'(t) = \|\bar{r}(t)\| > 0$ pe (t_0, b) din regularitate. Deci, L este strict crescătoare deci injectivă. Cu $J = L((t_0, b))$ rezultă că $L : (t_0, b) \to J$ este bijecţie netedă. Fie acum $\varphi = L^{-1} : J \to (t_0, b), s \to \varphi(s) = t(s)$; deci φ este un difeomorfism adică schimbare de parametru pe C. Fie $\bar{h} : J \to \mathbb{R}^n$ noua parametrizare a lui C dată de $\bar{h} = \bar{r} \circ \varphi$. Avem:

$$\frac{d\bar{h}}{ds}(s) = \frac{d\bar{r}}{dt}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \bar{r}'(t) \cdot t'(s) = \bar{r}'(t) \cdot \frac{1}{L'(t)} = \frac{\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|}.$$

În concluzie, $\|\bar{h}'(s)\| = 1$ pentru toţi $s \in J$.
2) Fie $\varphi_1 : I_1 \to I$, $s \to t = \varphi_1(s)$ şi $\varphi_2 : I_2 \to I$, $u \to t = \varphi_2(u)$. Din $\bar{h}_i = \bar{r} \circ \varphi_i$ parametrizări unitare ale lui C rezultă:

$$1 = \|\frac{d(\bar{r} \circ \varphi_i)}{ds}(s)\| = \|\bar{r}'(\varphi_i(s)) \cdot \varphi_i'(s)\| = \|\bar{r}'(\varphi_i(s))\| \cdot |\varphi_i'(s)|$$

adică:

$$\varphi_1'(s) = \pm\frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|} = \varphi_2'(u).$$

Atunci:

$$(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)'(s) = (\varphi_2^{-1})'(t) \cdot \varphi_1'(s) = \frac{\varphi_1'(s)}{\varphi_2'(u)} = \pm 1$$

şi o integrare dă concluzia. $\square$

Definiţia 1.13 i) Funcţia $L : (t_0, b) \to \mathbb{R}$:

$$\boxed{L(t) = \int_{t_0}^{t} \|\bar{r}'(u)\| du} \tag{1.6}$$

se numeşte *lungimea de arc* pe $[t_0, t]$ pentru curba C.
ii) Presupunem că $a > -\infty$ (deci $a \in \mathbb{R}$) şi ca urmare facem alegerea $t_0 = a$. Numărul real pozitiv $L(C) := L(b)$ este *lungimea curbei* C (deci presupunem că $L(C) < +\infty$).

Exemplul 1.14 Pentru cercul centrat în originea planului şi de rază R avem:

$$C(O, R) : \bar{r}(t) = R(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]. \tag{1.7}$$

Atunci $\|\bar{r}'(u)\| = R$ şi $L(t) = Rt$. Inversăm funcţia $s(t) = Rt$ şi avem $t = s/R$ de unde rezultă parametrizarea canonică a acestui cerc:

$$C(O, R) : \bar{h}(s) = R\left(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right), s \in [0, L(2\pi) = 2\pi R]. \tag{1.8}$$

Folosind formula schimbării de variabilă în integrala definită avem:

Propoziţia 1.15 *Lungimea unei curbe este un invariant în teoria curbelor.*

Demonstraţie Reamintim formula schimbării de variabile în calculul integralelor: fie $\varphi : J = (c, d) \to I = (a, b), u \to \varphi(u) = t$ cu $\varphi \in C^1(J, I)$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă atunci:

$$\int_c^d f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du = \int_a^b f(t) dt. \tag{1.8}$$

Fie acum parametrizările $\bar{r}$ şi $\bar{h} = \bar{r} \circ \varphi$ date de Definiţia 1.5 şi presupunem, pentru simplificare, φ crescătoare i.e. $\varphi' > 0$ pe J. Conform formulei (1.5) avem:

$$\bar{h}'(u) = \bar{r}'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \tag{1.9}$$

şi deci aplicând formula (1.8) cu $f = \|\bar{r}'\|$ avem:

$$\int_c^d \|\bar{h}'(u)\| du = \int_c^d \|\bar{r}'(\varphi(u))\| \cdot \varphi'(u) du = \int_a^b \|\bar{r}'(t)\| dt$$

ceea ce voiam. $\square$

SEMINARUL 1

S1.1 Să se reobţină formula distanţei euclidiene dintre punctele $M_1(\bar{r}_1)$, $M_2(\bar{r}_2)$ din $\mathbb{R}^n$.

Rezolvare Fie dreapta $d = M_1 M_2$:

$$d : \bar{r}(t) = \bar{r}_1 + t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1), t \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Segmentul $[M_1M_2]$ este descris de $t \in [0,1]$ şi deci:

$$d(M_1, M_2) = \int_0^1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\| dt = \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|. \tag{1.11}$$

A se vedea şi Definiţia 3.3 din Cursul 3.

S1.2 (*Grafice de funcţii*) Fie $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}$ de clasă C^k cu $k \geq 1$. Graficul lui f este curba în plan:

$$G_f : \bar{r}(t) = (t, f(t)), t \in I. \tag{1.12}$$

Se cere lungimea acestei curbe.

Rezolvare Cum $\bar{r}'(t) = (1, f'(t))$ avem din (1.6):

$$L(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \tag{1.13}$$

formulă ce apare de altfel în Manualul de Analiză Matematică de clasa a XII-a!

S1.3 Se cere lungimea arcului $[0, 2\pi]$ a *cicloidei*:

$$\bar{r}(t) = R(t - \sin t, 1 - \cos t), t \in \mathbb{R} \tag{1.14}$$

unde $R > 0$ este o constantă dată.

Rezolvare Avem: $\bar{r}'(t) = R(1 - \cos t, \sin t)$ şi deci: $\|\bar{r}'(t)\| = R\sqrt{1 - 2\cos t + 1} = 2R|\sin \frac{t}{2}|$. Avem:

$$L(C|_{[0,2\pi]}) = 2R \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4R \cos \frac{t}{2}|_0^{2\pi} = 8R.$$

S1.4 Se cere lungimea arcului $[0, \frac{\pi}{2}]$ a *astroidei*:

$$\bar{r}(t) = R(\cos^3 t, \sin^3 t), t \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Rezolvare avem: $\bar{r}'(t) = 3R(-\cos^2 t \sin t, \sin^2 t \cos t)$ şi deci: $\|\bar{r}'(t)\| = 3R|\cos t \sin t| = \frac{3R}{2}|\sin 2t|$. Deci:

$$L(C|_{[0,\frac{\pi}{2}]}) = \frac{3R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{3R}{4} \cos 2t|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3R}{2}.$$

S1.5 Pentru *spirala logaritmică*:

$$\bar{r}(t) = R(e^{kt} \cos t, e^{kt} \sin t), t \in \mathbb{R} \tag{1.16}$$

cu $R > 0, k > 0$ constante date se cere:
i) să se arate că unghiul dintre $\bar{r}(t)$ şi $\bar{r}'(t)$ este constant,
ii) notând cu l_n lungimea arcului $[2n\pi, 2(n+1)\pi]$ să se arate că raportul $\frac{l_{n+1}}{l_n}$ este constant.

Rezolvare i) Avem: $\bar{r}'(t) = Re^{kt}(k \cos t - \sin t, k \sin t + \cos t)$ şi deci: $\|\bar{r}'(t)\| = Re^{kt}\sqrt{k^2 + 1}$, $\|\bar{r}(t)\| = Re^{kt}$ şi $< \bar{r}(t), \bar{r}'(t) >= R^2 k e^{2kt}$. Rezultă:

$$\cos \measuredangle(\bar{r}(t), \bar{r}'(t)) = \frac{< \bar{r}(t), \bar{r}'(t) >}{\|\bar{r}(t)\| \|\bar{r}'(t)\|} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

ii) Avem:

$$l_n = R\sqrt{k^2+1}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^{kt}dt = \frac{R\sqrt{k^2+1}}{k}(e^{2(n+1)k\pi} - e^{2nk\pi})$$

de unde rezultă: $\frac{l_{n+1}}{l_n} = e^{2k\pi}$ care este o constantă strict mai mare decât 1.

S1.6 Se cere lungimea arcului $[0,2]$ al curbei: $\bar{r}(t) = (t - \frac{1}{2}sh2t, 2cht), t \in \mathbb{R}$.

Rezolvare Avem $\bar{r}^{prime}(t) = (1 - cht, 2sht)$ şi $1 - ch2t = 1 - \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2} = -\frac{(e^t-e^{-t})^2}{2} = -2sh^2t$. Deci: $\bar{r}'(t) = 2sht(-sht, 1)$ şi rezultă: $\|\bar{r}'(t)\| = 2shtcht = 2\frac{(e^t-e^{-t})(e^t+e^{-t})}{4} = \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} = sh2t$. Lungimea cerută este:

$$L(C|_[0,2]) = \int_0^2 sh2tdt = \frac{1}{2}ch2t|_0^2 = \frac{ch4-1}{2}.$$

S1.7 Se cere lungimea arcului $[0,\sqrt{2}]$ a curbei: $\bar{r}(t) = (8Rt^3, 3R(2t^2 - t^4))$, $R > 0$.

Rezolvare Avem $\bar{r}'(t) = 12R(2t^2, t - t^3)$ şi deci:

$$\|\bar{r}'(t)\| = 12R\sqrt{t^2 + 2t^4 + t^6} = 12R(t^3 + t)$$

de unde rezultă:

$$L(C|_[0,\sqrt{2}]) = 12R\int_0^{\sqrt{2}}(t^3+t)dt = 12R(\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2})|_0^{\sqrt{2}} = 12R(\frac{4}{4} + \frac{2}{2}) = 24R.$$

− − − − − − − − − − − − − − −

Pentru exerciţiile următoare reamintim coordonatele polare în plan:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{1.17}$$

şi deci curbă în plan va avea ecuaţia în coordonate polare:

$$C : \rho = \rho(\varphi), \varphi \in I = (a,b) \subseteq \mathbb{R} \tag{1.18}$$

S1.8 Se cere lungimea curbei în coordonate polare.

Rezolvare Deoarece avem ecuaţia vectorială:

$$C : \bar{r}(\varphi) = (\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi), \varphi \in I \tag{1.19}$$

rezultă:

$$\bar{r}'(\varphi) = (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi, \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi) \tag{1.20}$$

şi deci:

$$\|\bar{r}'(\varphi)\| = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}$$

ccea ce implică:

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho')^2(\varphi)}d\varphi. \tag{1.21}$$

S1.9 *Spirala lui Arhimede*: $\rho(\varphi) = R\varphi, \varphi \in \mathbb{R}$, cu $R > 0$ o constantă dată.

Rezolvare Avem din (1.21):

$$L(C|_{[a,b]}) = R\int_a^b \sqrt{1+\varphi^2}d\varphi.$$

Reamintim:

$$\int \sqrt{1+t^2} = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+1} + \ln(t+\sqrt{t^2+1})\right)$$

şi deci:

$$L(C|_{[a,b]}) = \frac{R}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1})\right)|_a^b.$$

Rezultă:

$$L(C|_{[0,b]}) = \frac{R}{2}\left(b\sqrt{b^2+1} + \ln(b+\sqrt{b^2+1})\right).$$

S1.10 Să se reobţină lungimea cercului $C(O,R)$ folosind coordonatele polare.

Rezolvare Ecuaţia lui $C(O,R)$ în coordonate polare: $\rho = constant = R$. Din (1.21) avem:

$$L(C(O,R)) = \int_0^{2\pi} Rd\varphi = 2\pi R. \tag{1.22}$$

S1.11 Se cere lunigimea arcului $[0, 2\pi]$ a curbei: $r(\varphi) = R(1+\cos\varphi), R > 0$

Rezolvare Avem $r'(\varphi) = -R\cos\varphi$ şi deci:

$$\sqrt{r^2+(r')^2} = R\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi} = R\sqrt{2+2\cos\varphi} = 2R|\cos\frac{\varphi}{2}|.$$

Prin urmare:

$$L(C|_[0,2\pi]) = 2R(\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2} - \int_\pi^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}) = 4R(\sin\frac{\varphi}{2}|_0^\pi - \sin\frac{\varphi}{2}|_\pi^{2\pi}) = 4R(1-0-0+1) = 8R.$$

S1.12 (*Conice nedegenerate*) $C : \rho(\varphi) = \frac{p}{1-e\cos\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$, unde $e \in [0, +\infty]$ reprezintă *excentricitatea* conicei. Avem: $e \in [0,1)$ pentru *elipsă* ($e = 0$ pentru *cerc*), $e = 1$ pentru *parabolă* şi $e > 1$ pentru *hiperbolă*. Se cere lungimea unui arc al curbei.

Temă individuală !

$- - - - - - - - - - - - - - -$

Exemple de calcul a lungimii cu MATLAB

S1.13 ([6, p. 172]) Fie $\bar{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\bar{r}(t) = (t+2, \frac{t^2}{2}+1)$ şi vrem lungimea arcului $[0, 2]$.

Rezolvare

$$L(C|_{[0,2]}) = \int_0^2 \sqrt{t^2+1}dt = \frac{1}{2}[t\sqrt{t^2+1} + \ln(t+\sqrt{t^2+1})]|_0^2 = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}).$$

Liniile MATLB sunt astfel:

$>> symst;$
$>> f = [t+2 \quad t^2/2+1];$
$>> df = diff(f,t); v = sqrt(df(1)^2 + df(2)^2);$
$>> s = int(v,t,0,2); eval(s)$ (+ Enter)

Answer: $s = 2.9579$.

S1.14

Cursul 2

Reperul Frenet şi curburi

Fixăm în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ curba parametrică $C : \bar{r} = \bar{r}(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Definiţia 2.1 Numim *câmp vectorial de-a lungul lui C* o aplicaţie $X : I \to \mathbb{R}^n, X = (X^1, ..., X^n)$ cu proprietatea că $X^i : I \to \mathbb{R}$ este aplicaţie netedă pentru toţi $i \in \{1, ..., n\}$. Fie $\mathscr{X}(C)$ mulţimea acestor câmpuri vectoriale.

Observaţii 2.2 i) $\mathscr{X}(C)$ este mulţime nevidă deoarece câmpul vectorial *nul* este element al acestei mulţimi.
ii) Cum C este regulată (am fixat această ipoteză încă din Cursul 1) aplicaţia $T : I \to \mathbb{R}^n$ dată de:

$$T(t) = \frac{\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|} \tag{2.1}$$

este un element din $\mathscr{X}(C)$. $\square$

Definiţia 2.3 $T = T(t)$ se numeşte *câmpul vectorial tangent* al curbei C.

Exemplul 2.4 Reamintim cercul de rază R centrat în origine
$C(O, R) : \bar{r}(t) = R(\cos t, \sin t), t \in \mathbb{R}$. Avem:

$$T(t) = (-\sin t, \cos t). \tag{2.2}$$

Se obţine imediat că: $< \bar{r}(t), T(t) >= R(-\cos t \sin t + \sin t \cos t) = 0$ adică rezultatul binecunoscut: tangenta este perpendiculară pe rază în punctul de tangenţă.

Observaţia 2.5 i) Reamintim că $\mathbb{R}^n$ este spaţiu vectorial real de dimensiune n. Fixăm un sistem de vectori $S = \{v_1, ..., v_k\}$ din $\mathbb{R}^n$ cu $1 \leq k \leq n$. Cel mai mic subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$ ce conţine pe S se notează *spanS* sau *span*$\{v_1, ..., v_k\}$ şi este intersecţia tuturor subspaţiilor vectoriale ale lui $\mathbb{R}^n$ ce conţin pe S.
ii) Fie $S_1 = \{v_1, ..., v_k\}$ şi $S_2 = \{v'_1, ..., v'_k\}$ ca mai sus. Presupunem că pentru orice $i \in \{1, ..., k\}$ avem descompunerea: $v'_i = a^j_i v_j$ unde în membrul drept am folosit *regula Einstein* (a indicelui mut) de sumare: repetarea unui indice sus şi jos semnifică sumarea după toate valorile posibile ale acelui indice. Fie $A = (a^j_i)_{i,j=\overline{1,k}} \in M_k(\mathbb{R})$ matricea asociată acestor sisteme de vectori via descompunerea precedentă. Putem scrie global:

$$(v'_1, ..., v'_k) = (v_1, ..., v_k) \cdot A$$

reamintind convenţia de înmulţire a matricilor:

$$U \cdot V = (u^i_j) \cdot (v^j_l) = W = (w^i_l).$$

Deci: indicele superior indică linia iar indicele inferior indică coloana !

Definiţia 2.6 i) Sistemele S_1, S_2 se numesc *la fel orientate* dacă $\det A > 0$ respectiv *contrar orientate* dacă $\det A < 0$.
ii) Sistemul $S = \{v_1, ..., v_n\}$ îl numim *pozitiv orientat* dacă este la fel orientat cu *baza canonică* $B_c = \{e_1, ..., e_n\}$ din $\mathbb{R}^n$. Reamintim că $e_i = (0, ..., 1, .., 0)$ cu 1 doar pe locul i. Dacă S este contrar orientat lui B_c spunem că S este *negativ orientat*.
iii) Pentru $n = 2$ folosim notaţia $B_c = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ iar pentru $n = 3$ notaţia $B_c = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Observaţii 2.7 i) Dacă S este orientat pozitiv sau negativ atunci S este sistem liniar independent. Fiind exact n vectori cât este dimensiunea spaţiului $\mathbb{R}^n$ avem că S este chiar bază în $\mathbb{R}^n$.
ii) Reamintim că dimensiunea unui spaţiu vectorial este numărul maxim de vectori liniar independenţi din acel spaţiu şi că un sistem de exact n vectori liniar independenţi (sau sistem de generatori) într-un spaţiu vectorial n dimensional este obligatoriu bază în acel spaţiu vectorial.

Următoarea noţiune fundamentală a teoriei curbelor este:

Definiţia 2.8 Numim *bază Frenet* pentru curba parametrică C un sistem $\{X_1, ..., X_n\} \in \mathscr{X}(C)$ satisfăcând pentru orice $t \in I$ proprietăţile următoare:
F1) $< X_i(t), X_j(t) >= \delta_{ij}$ pentru toţi $i, j \in \{1, ..., n\}$. Reamintim că (δ_{ij}) este *simbolul Kronecker* fiind 1 pentru $i = j$ şi 0 în rest.
F2) $span\{X_1(t), ..., X_k(t)\} = span\{\frac{d\bar{r}}{dt}(t), ..., \frac{d^k\bar{r}}{dt^k}(t)\}$ pentru toţi $k \in \{1, ..., n-1\}$.
F3) Sistemele de vectori din F2 sunt la fel orientate.
F4) Sistemul de vectori $\{X_1(t), ..., X_n(t)\}$ este pozitiv orientat.
Ansamblul $RF(\bar{r}(t)) = \{\bar{r}(t); X_1(t), ..., X_n(t)\}$ se numeşte *reperul Frenet în punctul* $P(\bar{r}(t)) \in C$. O curbă ce admite bază Frenet se numeşte *curbă Frenet*.

Observaţii 2.9 i) Condiţiile F1+F4 spun că $\{X_1(t), ..., X_n(t)\}$ este o *bază ortonormată* în $\mathbb{R}^n$ pentru orice $t \in I$.
ii) Pentru $k = 1$ din F2 avem că vectorii $X_1(T)$, $\bar{r}'(t)$ sunt *coliniari* deci există scalarul $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ aşa încât: $X_1(t) = \lambda(t)\bar{r}'(t)$. Condiţia F3 pentru $k = 1$ spune că $\lambda(t) > 0$. Cu alegerea $\lambda(t) = \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|}$ care este scalar strict pozitiv (motivată de ortonormare !) obţinem:

$$X_1(t) = T(t). \tag{2.3}$$

Conform discuţiei din Observaţia 2.7 suntem conduşi la introducerea următorului tip de curbe:

Definiţia 2.10 Curba C se numeşte *în poziţie generală* dacă pentru orice $t \in I$ sistemul $\{\frac{d\bar{r}}{dt}(t), ..., \frac{d^{n-1}\bar{r}}{dt^{n-1}}(t)\}$ este liniar independent. Pentru $n = 3$ folosim denumirea de *curbă biregulată.*

Observaţia 2.11 Pentru $n = 2$ poziţia generală este echivalentă cu regularitatea.

Un rezultat central al teoriei curbelor este:

Teorema 2.12 (de existenţă şi unicitate a bazei Frenet) *Dacă C este în poziţie generală atunci C este curbă Frenet. Mai mult, baza Frenet este unică.*

Nu vom demonstra acest rezultat general dar să observăm că dacă $X \in \mathscr{X}(C)$ atunci câmpul vectorial derivat $X' = (X'_1, ..., X'_n)$ aparţine lui $\mathscr{X}(C)$ şi mai general $X^{(k)} = (\frac{d^k X_1}{dt^k}, ..., \frac{d^k X_n}{dt^k}) \in \mathscr{X}(C)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$ cu convenţia $X^{(0)} = X$.

În continuare presupunem C în poziţie generală. Vectorul $X'_i(t)$ se descompune unic în baza $\{X_1(t), ..., X_n(t)\}$ şi deci există funcţiile $a_i^j : I \to \mathbb{R}$ date de:

$$X'_i(t) = a_i^j(t) X_j(t) \tag{2.4}$$

şi cum toate funcţiile ce intervin mai sus sunt netede rezultă că şi toate a_i^j sunt funcţii netede. Pentru o abordare globală introducem matricea de funcţii: $A(\cdot) = (a_i^j(\cdot))_{i,j=\overline{1,n}}$ şi atunci relaţiile (2.4) se scriu unitar:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}(t) = A(t)^t \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}(t) \tag{2.5}$$

cu A^t transpusa matricii A.

Propoziţia 2.17 *Matricea A satisface*:
i) *este antisimetrică, adică maricea transpusă satisface*: $A^t = -A$ *i.e.*:

$$a_i^j(t) = -a_j^i(t). \tag{2.6}$$

ii) *pentru $j > i+1$ avem*:

$$a_i^j \equiv 0. \tag{2.7}$$

Demonstraţie i) Derivăm F1 cu regula Leibniz şi avem:
$< X'_i(t), X_j(t) > + < X_i(t), X'_j(t) >= 0$ care este exact (2.6) scrisă: $a_i^j(t) + a_j^i(t) = 0$.
ii) Din F2 avem că: $X_i \in span\{\frac{d\bar{r}}{dt}(t), ..., \frac{d^i\bar{r}}{dt^i}(t)\}$ ceea ce implică:
$X'_i(t) \in span\{\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}(t), ..., \frac{d^{i+1}\bar{r}}{dt^{i+1}}(t)\} = span\{X_1(t), ..., X_{i+1}(t)\}$ şi această relaţie dă (2.7). □

Definiţia 2.13 Fie curba C în poziţie generală. Funcţiile $K_i : I \to \mathbb{R}$ date de:

$$K_i(t) = \frac{a_i^{i+1}(t)}{\|\bar{r}'(t)\|} \tag{2.8}$$

sunt netede pentru orice $i \in \{1, ..., n-1\}$ şi se numesc *curburile lui C în punctul $P(\bar{r}(t)) \in C$*.

Cazuri particulare

I) $n = 2$ deci avem curba regulată $C : \bar{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in I$. Avem:

$$X_1(t) = T(t) = \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|}(x'(t), y'(t)). \tag{2.9}$$

Versorul X_2 se notează N şi se numeşte *câmpul vectorial normal*.

Căutăm N de forma: $N(t) = (u(t), v(t))$. Condiţia F_1 devine:

$$\begin{cases} \|N(t)\|^2 = u^2(t) + v^2(t) = 1 \\ < T(t), N(t) >= x'(t)u(t) + y'(t)v(t) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Regularitatea înseamnă $(x')^2 + (y')^2 > 0$ şi vom presupune că $y' \neq 0$; în caz contrar avem $x' \neq 0$ şi în discuţia următoare schimbăm rolurile lui x şi y. Din a doua relaţie avem: $v = -\frac{x'}{y'}u$ care înlocuită în prima dă: $u^2\left(1 + \frac{x'^2}{y'^2}\right) = 1$ cu soluţia: $u = \frac{\varepsilon y'}{\|\bar{r}'\|}$ pentru $\varepsilon = \pm 1$. Revenind la v obţinem: $v = \frac{-\varepsilon x'}{\|\bar{r}'\|}$ şi deci:

$$N(t) = \frac{\varepsilon}{\|\bar{r}'(t)\|}(y'(t), -x'(t))$$

şi vom determina ε din F4. Astfel, matricea cu prima coloana $T(t)$ şi a doua coloană $N(t)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{x'}{\|\bar{r}'\|} & \frac{\varepsilon y'}{\|\bar{r}'\|} \\ \frac{y'}{\|\bar{r}'\|} & \frac{-\varepsilon x'}{\|\bar{r}'\|} \end{pmatrix}$$

trebuie să aibă determinantul pozitiv. Dar determinantul acestei matrici este $(-\varepsilon)$ şi deci: $\varepsilon = -1$. În concluzie:

$$N(t) = \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|}(-y'(t), x'(t)). \tag{2.11}$$

În fapt, expresia lui N se deduce pe o cale mai rapidă astfel: din condiţia de ortonormare în plan avem $N(t) = i \cdot T(t)$ cu i unitatea complexă, deoarece înmulţirea cu i semnifică o rotatţie de $90°$ în sens trigonometric=sensul anti-orar. Matricea A este:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1^2(t) \\ a_1^2(t) & 0 \end{pmatrix}$$

cu:

$$a_1^2(t) =< X_1'(t), X_2(t) >=< T'(t), N(t) > .$$

Derivăm câmpul vectorial tangent din (2.9) ca o fracţie:

$$T'(t) = \frac{\bar{r}''\|\bar{r}'\| - \bar{r}'\frac{d}{dt}(\|\bar{r}'\|)}{\|\bar{r}'\|^2} = \frac{\bar{r}''(t)}{\|\bar{r}'(t)\|} - T(t) \cdot \frac{d}{dt}(\ln \|\bar{r}'\|). \tag{2.12}$$

Cum $N(t)$ este ortogonal pe $T(t)$ rezultă:

$$a_1^2(t) =< \frac{\bar{r}''(t)}{\|\bar{r}'(t)\|}, N(t) >$$

şi din relaţia (2.11) obţinem:

$$a_1^2(t) = \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|^2} < (x''(t), y''(t), (-y'(t), x'(t)) > .$$

În concluzie, avem o singură curbură, notată k, cu expresia:

$$\boxed{k(t) = \frac{-x''(t)y'(t) + y''(t)x'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|^3}}. \tag{2.13}$$

Observăm că funcţia curbură poate avea orice semn; un punct $P(\bar{r}(t)) \in C$ se numeşte *inflexionar* dacă $k(t) = 0$ respectiv *vârf* dacă este punct critic al curburii i.e. $k'(t) = 0$.

II) $n = 3$, deci avem curba biregulată $C : \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$. Avem:

$$X_1(t) = T(t) = \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|}(x'(t), y'(t), z'(t)). \tag{2.14}$$

X_2 se notează tot N şi ca la curbe în plan se numeşte *câmpul vectorial normal* iar X_3 se notează B şi se numeşte *câmpul vectorial binormal*.

Din $< T(t), T(t) >= 1$ prin derivare cu regula Leibniz avem: $2 < T'(t), T(t) >= 0$ deci $T'(t)$ este perpendicular pe $T(t)$. Avem aceeaşi formulă (2.12) iar biregularitatea implică: $T'(t) \neq \bar{0}$. În concluzie:

$$\begin{cases} N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \\ B(t) = T(t) \times N(t) \end{cases} \tag{2.15}$$

unde $\times$ este produsul vectorial din $\mathbb{R}^3$.

Avem:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1^2(t) & 0 \\ a_1^2(t) & 0 & -a_2^3(t) \\ 0 & a_2^3(t) & 0 \end{pmatrix}$$

cu:

$$\begin{cases} a_1^2(t) =< T'(t), N(t) >= - < T(t), N'(t) > \\ a_2^3(t) =< N'(t), B(t) >= - < N(t), B'(t) > . \end{cases}$$

Astfel: $a_1^2(T) =< T'(t), \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} >= \|T'(t)\| > 0$. K_1 se numeşte *curbura* şi ca la curbe în plan se notează k iar K_2 se numeşte *torsiunea* şi se notează τ.

Avem prin derivarea primei relaţii următoare şi utilizarea lui (2.5):

$$\begin{cases} \bar{r}'(t) = \|\bar{r}'(t)\|T(t) \\ \bar{r}''(t) = \frac{d}{dt}(\|\bar{r}'(t)\|)T(t) + \|\bar{r}'(t)\|T'(t) = (...)T(t) + \|\bar{r}'(t)\|a_1^2(t)N(t) \\ \bar{r}''' = (.)T + (.)N + \|\bar{r}'\|a_1^2N' = (.)T + (.)N + \|\bar{r}'\|a_1^2a_2^3B. \end{cases} \tag{2.16}$$

Facem produsul vectorial al primelor două relaţii:

$$\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \|\bar{r}'(t)\|^2 a_1^2(t)B(t)$$

şi cum $B(t)$ este versor avem:

$$\boxed{k(t) = \frac{\|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\|}{\|\bar{r}'(t)\|^3}}. \tag{2.17}$$

Facem acum produsul mixt al vectorilor din (2.16):

$$(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = (\|\bar{r}'\|T, \|\bar{r}'\|a_1^2N, \|\bar{r}'\|a_1^2a_2^3B) = \|\bar{r}'\|^3(a_1^2)^2a_2^3$$

deoarece $(T, N, B) = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) = 1$. Obţinem:

$$a_2^3 = \frac{\|\bar{r}'\|^4(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''')}{\|\bar{r}'\|^3\|\bar{r}' \times \bar{r}''\|^2}$$

şi, în concluzie, expresia torsiunii este:

$$\boxed{\tau(t) = \frac{(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t))}{\|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\|^2}}. \tag{2.18}$$

Observăm că $k > 0$ dar torsiunea poate avea orice semn.

SEMINARUL 2

S2.1 Să se studieze $C(O,R)$ din punct de vedere Frenet.

Rezolvare Câmpul vectorial tangent este dat de (2.2) iar din (2.11) obţinem: $N = (-\cos t, -\sin t) = -\frac{\bar{r}(t)}{R}$. Deci câmpul vectorial normal este îndreptat spre interiorul cercului, mai precis spre originea planului, iar $< T, N >= 0$ este expresia analitică a faptului binecunoscut: raza este perpendiculară pe tangentă. Avem din (2.13):

$$k(t) = \frac{-(-R\cos t)R\cos t + (-R\sin t)(-R\sin t)}{R^3} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R} \tag{2.19}$$

în acord cu viziunea geometrică: cercul este "curbat" peste tot la fel !
Cercul nu are puncte de inflexiune dar toate punctele sale sunt vârfuri.

S2.2 Să se studieze dreapta în plan din punct de vedere Frenet.

Rezolvare Reamintim că avem ecuaţia dreptei în plan $d : \bar{r}(t) = (x_0 + ta, y_0 + tb)$ cu $M_0(x_0, y_0)$ un punct fixat al dreptei respectiv $\bar{u} = (a, b) \neq \bar{0}$ vectorul director al lui d. Rezultă: $\bar{r}'(t) = \bar{(u)}$ şi $\bar{r}'' \equiv \bar{0}$. Obţinem deci: $T(t) = \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}$=constant, $N(t) = \frac{1}{\|\bar{u}\|}(-b, a)$ respectiv $k \equiv 0$ în acord cu viziunea geometrică" dreapta nu este curbată deloc !

S2.3 Să se studieze dreapta în spaţiu din punct de vedere Frenet.

Rezolvare Deoarece $\bar{r}'' = \bar{0}$ (ca mai sus) rezultă că dreapta considerată în spaţiu nu este biregulată. Dar orice dreaptă din spaţiu este inclusă într-un plan π şi eventual aplicând o rotaţie şi o translaţie putem presupune că $\pi = xOy$ ceea ce conduce la problema anterioară.

S2.4 Să se arate că formula (2.17) se reduce la (2.13) pentru o curbă în plan.

Rezolvare Deoarece $\bar{r}(t) = (x(t), y(t)), 0$ rezultă:

$$\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -x''(t)y'(t) + y''(t)x'(t))$$

ceea ce dă concluzia (renunţând la ipoteza de pozitivitate din spaţiu). Obţinem astfel o nouă formulă pentru curbura unei curbe în plan:

$$k(t) = \frac{\det(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t))}{\|\bar{r}'(t)\|^3}. \tag{2.20}$$

S2.5 Se cere curbura *elipsei* $E : \bar{r}(t) = (a\cos t, b\sin t), t \in \mathbb{R}$ (sau $t \in [0, 2\pi]$) cu $a > 0, b > 0$.

Rezolvare Avem: $\bar{r}'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$ şi $\bar{r}''(t) = (-a\cos t, -b\sin t) = -\bar{r}$. Rezultă:

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.21}$$

şi deci elipsa nu are puncte inflexionare. Deoarece:

$$k'(t) = \frac{3ab(b^2 - a^2)\sin t\cos t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}} \tag{2.22}$$

rezultă că elipsa are 4 vârfuri, exact intersecţiile cu axele: $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$.

S2.6 Se cere curbura (ramurei pozitive a) *hiperbolei* $H : \bar{r}(t) = (acht, bsht), t \in \mathbb{R}$ cu $a > 0, b > 0$.

Rezolvare Avem: $\bar{r}'(t) = (asht, bcht)$ şi $\bar{r}''(t) = (acht, bsht) = \bar{r}(t)$. Rezultă:

$$k(t) = \frac{-ab}{(a^2sh^2t + b^2ch^t)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.23}$$

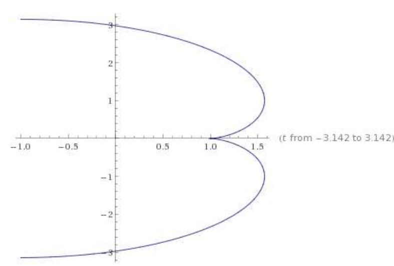
şi deci hiperbola nu are puncte de inflexiune. Deoarece:

$$k'(t) = \frac{-3ab(a^2 + b^2)shtcht}{(a^2sh^2t + b^2ch^t)^{\frac{5}{2}}} \tag{2.24}$$

rezultă că hiperbola are un singur vârf, intersecţia cu axa Ox: $t = 0$ unde se anulează funcţia sh. Reamintim că $cht \geq 1$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

S2.7 Se cere curbura curbei $C : \bar{r}(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t), t \in \mathbb{R}$.

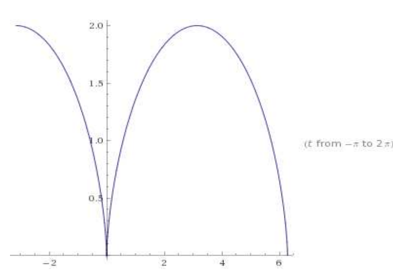
Rezolvare Avem: $\bar{r}(t) = (t\cos t, t\sin t)$ şi $\bar{r}''(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)$ de unde rezultă $k(t) = \frac{1}{t}$. Deci trebuie scos $t = 0$ din domeniul de definiţie, curba nu are puncte de inflexiune şi nici vârfuri.



Imaginea curbei.

S2.8 Se cere curbura cicloidei.

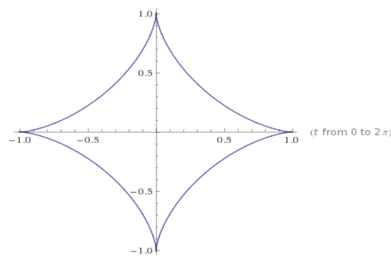
Rezolvare Avem: $\bar{r}''(t) = R(\sin t, \cos t)$ şi deci: $k(t) = \frac{-1}{4R\sin\frac{t}{2}}$ ceea ce spune că cicloida nu are puncte de inflexiune dar din domeniul de definiţie trebuie scoase punctele: $t_k = 2k\pi$ cu $k \in \mathbb{Z}$. Cum: $k'(t) = \frac{\cos\frac{t}{2}}{8r\sin^2\frac{t}{2}}$ rezultă că vârfurile cicloidei sunt: $t_k = (2k+1)\pi$ cu $k \in \mathbb{Z}$.



Imaginea cicloidei.

S2.9 Se cere curbura astroidei.

Rezolvare Avem: $\bar{r}''(t) = 3R(2\cos t \sin^2 - \cos^3 t, 2\sin t \cos^2 t - \sin^3 t)$ şi deci: $k(t) = \frac{-1}{3R\sin t \cos t}$ ceea ce spune că astroida nu are puncte de inflexiune dar din domeniul de definiţie trebuie scoase punctele: $t_k = \frac{k\pi}{2}$ cu $k \in \mathbb{Z}$. Scriind: $k(t) = \frac{-2}{3R\sin 2t}$ avem: $k'(t) = \frac{4\cos 2t}{3R\sin^2 2t}$ ceea ce spune că vârfurile astrodei sunt: $t_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ cu $k \in \mathbb{Z}$.



Imaginea astroidei.

S2.10 Se cere curbura spiralei logaritmice.

Rezolvare Avem: $\bar{r}''(t) = Re^{kt}(k^2\cos t - 2k\sin t + \cos t, k^2\sin t + 2k\cos t - \sin t)$ şi deci: $k(t) = \frac{e^{-kt}}{R\sqrt{k^2+1}}$. Spirala logaritmică nu are puncte de inflexiune şi nici vârfuri.

S2.11 (*Curbura în coordonate polare*) Pentru $C : \rho = \rho(\varphi)$ avem:

$$k(\varphi) = \frac{2(\rho')^2 + \rho^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.25}$$

Rezolvare Derivând (1.20) obţinem:

$$\bar{r}''(\varphi) = (\rho''\cos\varphi - 2\rho'\sin\varphi - \rho\cos\varphi, \rho''\sin\varphi + 2\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi) \tag{2.26}$$

şi un calcul imediat dă formula (2.25).

S2.12 Se cere curbura *lemniscatei* $C : \rho(\varphi) = R\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Rezolvare Cu formula (2.25) obţinem: $k(\varphi) = \frac{3}{R}\sqrt{\cos 2\varphi}$.

S2.13 (*Curbura graficelor*) Se dă curba grafic $C : \bar{r}(t) = (t, f(t)), t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Se cere curbura lui C.

Rezolvare Avem: $\bar{r}''(t) = (0, f''(t))$ ceea ce dă:

$$k(t) = \frac{f''(t)}{(1 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.27}$$

şi deci C are ca puncte de inflexiune zerourile lui f''.

S2.14 (*Curbura curbelor implicite*) Se dă curba definită implicit $C : F(x, y) = 0$. Se cere curbura lui C.

Rezolvare Vom parametriza curba C ca în exerciţiul precedent $C : \bar{r}(t) = (t, f(t)$; deci $F(t, f(t)) = 0$ şi derivând această relaţie obţinem: $F_x + F_y \cdot f' = 0$ ceea ce conduce la: $f' = -\frac{F_x}{F_y}$. Mai derivând odată avem:

$$f'' = -\frac{F_x^2 F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{xx}}{F_y^3}$$

şi înlocuind în formula (2.27) obţinem:

$$k(x,y) = -\frac{F_x^2 F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{xx}}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.28}$$

sau încă:

$$k(x,y) = \frac{-\Delta}{\|\nabla F\|^3} \tag{2.29}$$

unde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}.$$

S2.15 Să se reobţină curbura lui $C(O,R)$.

Rezolvare Din $F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$ rezultă: $\nabla F = 2(x,y)$ şi deci $\|\nabla F\| = 2R$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2x \\ 0 & 2 & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -8(x^2+y^2) = -8R^2.$$

S2.16 Se cere curbura:
i) elipsei $E : F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$,
ii) hiperbolei $H : F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

S2.17 Fie curba plană $C : \bar{r} = \bar{r}(t), t \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Definim curba *reverse* $C^r : \bar{R} = \bar{r}(-t)$, $t \in I$. Să se arate că între curburile acestor curbe avem relaţia: $k^r(t) = -k(-t)$, pentru orice $t \in I$.

Rezolvare Avem: $\bar{R}'(t) = -\bar{r}'(-t)$ şi $\bar{R}''(t) = \bar{r}''(t)$. Folosim formula (2.13) :

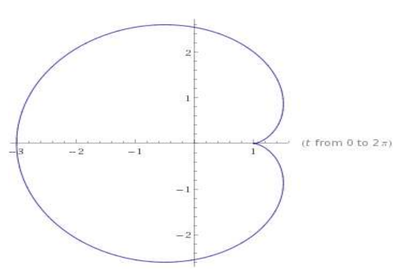
$$k^r(t) = \frac{(x^r)'(t)(y^r)''(t) - (y^r)'(t)(x^r)''(t)}{\|\bar{R}'(t)\|^3} = \frac{-x'(-t)y''(-t) + y'(-t)x''(-t)}{\| - \bar{r}'(t)\|^3} =$$

$$= -\frac{x'(-t)y''(-t) - y'(-t)x''(-t)}{\|\bar{r}'(t)\|^3} = -k(-t).$$

Rezultă imediat şi modificarea bazei Frenet: $T^r(t) = -T(-t)$ şi $N^r(-t) = -N(-t)$. Obţinem astfel şi o imagine geometrică pentru semnul curburii: dacă C se roteşte în sens trigonometric avem $k > 0$ iar dacă C se roteşte în sens orar avem $k < 0$!

S2.18 Se cere curbura pentru *curba cardioidă* $C : \bar{r}(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$, $t \in (0, 2\pi)$. Informaţii generale: http://en.wikipedia.org/wiki/Cardioid

Rezolvare Avem: $\bar{r}'(t) = 2(\sin 2t - \sin t, \cos t - \cos 2t)$, $\bar{r}''(t) = 2(2\cos 2t - \cos t, 2\sin 2t - \sin t)$ şi în final obţinem: $k(t) = \frac{3}{32 \sin \frac{t}{2}}$ ceea ce înseamnă că $\lim_{t \to 0, 2\pi} = +\infty$.



Imaginea cardioidei.

Cursul 3

Teorema fundamentală a curbelor

Fixăm curba C în $\mathbb{R}^n$ şi fie o parametrizare oarecare a sa $C : \bar{r} = \bar{r}(t), t \in I$. Pentru a studia geometria lui C fie $\varphi : J \to I$ un difeomeorfism şi ca în Cursul 1 notăm $t = \varphi(u)$. Considerăm noua parametrizare $C : \bar{R} = \bar{R}(u), u \in J$ cu $\bar{R} = \bar{r} \circ \varphi$. Reamintim relaţia (1.5):

$$\bar{R}'(u) = \varphi'(u) \cdot \bar{r}'(t) \tag{3.1}$$

şi tot ca în primul Curs, presupunem, pentru simplificare, că difeomorfismul φ este strict crescător. Trecând la norme în relaţia precedentă avem:

$$\|\bar{R}'(u)\| = \varphi'(u)\|\bar{r}'(t)\|. \tag{3.2}$$

Prin calcul obţinem imediat:

Propoziţia 3.1 *Dacă* $(X_1, ..., X_n)$ *este o bază Frenet pentru parametrizarea* $\bar{r}$ *atunci* $(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_n)$ *cu* $\bar{X}_i = X_i \circ \varphi$ *este o bază Frenet pentru parametrizarea* $\bar{R}$.

Prin urmare putem considera curburile $\bar{K}_i$ pentru parametrizarea $\bar{R}$. Un rezultat central al teoriei curbelor este:

Teorema 3.2 *Curburile sunt invarianţi geometrici ai lui* C *adică* $\bar{K}_i = K_i$ *pentru* $1 \leq i \leq n-1$.

Demonstraţie Avem:

$$\bar{K}_i(u) = \frac{\bar{a}_i^{i+1}(u)}{\|\bar{R}'(u)\|} = \frac{< \bar{X}_i'(u), \bar{X}_{i+1}(u) >}{\varphi'(u)\|\bar{r}'(t)\|} = \frac{< \varphi'(u)X_i'(t), X_{i+1}(t) >}{\varphi'(u)\|\bar{r}'(t)\|} = K_i(t)$$

ceea ce dă concluzia. $\square$

Definiţia 3.3 *Distanţa euclidiană* pe $\mathbb{R}^n$ este: $d(M_1(\bar{r}_1), M_2(\bar{r}_2)) = \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|$; perechea $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d)$ o numim *spaţiul euclidian* n*-dimensional* iar geometria sa o numim *geometria euclidiană* n*-dimensională*. Funcţia $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ o numim *izometrie* dacă este surjectivă şi invariază distanţele: $d(f(M_1), f(M_2)) = d(M_1, M_2)$ pentru orice puncte $M_i \in \mathbb{E}^n$. Fie $Izom(n)$ mulţimea izometriilor euclidiene.

Un rezultat fundamental al geometriei euclidiene este faptul că dată $f \in Izom(n)$ există un unic vector $f_0 \in \mathbb{R}^n$ şi o unică matrice $R_f \in O(n)$ aşa încât pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ avem:

$$f(x) = R_f \cdot x + f_0 \tag{3.3}$$

unde primul termen din membrul drept este înmulţirea dintre matricea pătratică R_f de ordin n şi vectorul coloană x! Deci $Izom(n) = O(n) \oplus \mathbb{R}^n$ unde $O(n)$ este grupul *matricilor ortogonale*:

$$R^t \cdot R = R \cdot R^t = I_n \tag{3.4}$$

unde I_n este matricea unitate de ordin n. Linia $i \in \{1, ..., n\}$ din relaţia (3.3) este:

$$f^i(x) = R^i_j x^j + f^i_0 \tag{3.5}$$

dacă $R_f = (R^i_j)_{i,j=\overline{1,n}}$ şi $f_0 = (f^i_0)_{i=\overline{1,n}}$.

Propoziţia 3.4 *Fie curba parametrică $\bar{r} = \bar{r}(t), t \in I$ şi $f \in Izom(n)$. Atunci $\bar{R} = f \circ \bar{r}(t), t \in I$ este o curbă parametrică cu proprietăţile*:
i) $\bar{R}' = R_f \cdot \bar{r}'$ *şi deci* $\bar{R}^{(k)} = R_f \cdot \bar{r}^{(k)}$ *pentru orice* $k \geq 1$,
ii) $\|\bar{R}^{(k)}\| = \|\bar{r}^{(k)}\|$,
iii) *dacă $\bar{r}$ este în poziţie generală atunci $\bar{R}$ este în poziţie generală.*

Demonstraţie i) Avem linia i:

$$(\bar{R}'(t))^i = \frac{df^i}{dx^j}(\bar{r}(t)) \cdot \frac{dx^j}{dt}(t) = R^i_j \cdot (\bar{r}'(t))^j = (R_f \cdot \bar{r}'(t))^i$$

ceea ce voiam. Pentru $k \geq 2$ derivăm prima relaţie din i).
ii) Cum R_f invariază norma avem concluzia.
iii) Un calcul imediat ce foloseşte i) şi ii). $\square$

Propoziţia 3.5 *Fie $\bar{r} = \bar{r}(t), t \in I$ o curbă în poziţie generală, $(X_1, ..., X_n)$ baza Frenet asociată şi $f \in Izom(n)$. Atunci*:
i) $(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_n)$ *cu* $\bar{X}_i = R_f \cdot X_i$ *este baza Frenet a curbei* $\bar{R} = f \circ \bar{r}$,
ii) $\bar{K}_i = K_i$ *pentru toţi* $i \in \{1, ..., n-1\}$.

Demonstraţie i) Un calcul imediat folosind propoziţia precedentă. Spre exemplu, pentru F1):

$$< \bar{X}_i(t), \bar{X}_j(t) >=< R_f X_i(t), R_f X_j(t) >=< X_i(t), X_j(t) >= \delta_{ij}.$$

ii) Avem:

$$\bar{a}^j_i(t) =< \bar{X}'_i(t), \bar{X}_j(t) >=< R_f X'_i(t), R_f X_j(t) >=< X'_i(t), X_j(t) >= a^j_i(t)$$

şi deci:

$$\bar{K}_i(t) = \frac{\bar{a}^{i+1}_i(t)}{\|\bar{R}'(t)\|} = \frac{a^{i+1}_i(t)}{\|\bar{r}'(t)\|} = K_i(t)$$

ceea ce dă concluzia. $\square$

Reciproca acestui rezultat este dată de:

Propoziţia 3.6 *Fie $\bar{r}, \bar{R} : I \to \mathbb{E}^n$ două curbe în poziţie generală satisfăcând pentru orice $t \in I$ identităţile*:

$$\begin{cases} \|\bar{r}'(t)\| = \|\bar{R}'(t)\| \\ K_i(t) = \bar{K}_i(t), 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Atunci există şi este unică o izometrie $f \in Izom(n)$ aşa încât: $\bar{R} = f \circ \bar{r}$.

Demonstraţie Vom arăta doar partea de existenţă, partea de unicitate rezultând din unicitatea soluţiei problemei Cauchy pentru un sistem diferenţial ordinar.

Fixăm $t_0 \in I$ şi fie bazele Frenet ale celor două curbe: $(X_1, ..., X_n)$ respectiv $(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_n)$. Există o unică matrice $R \in O(n)$ aşa încât pentru toţi $i \in \{1, ..., n\}$ să avem:

$$R \cdot X_i(t_0) = \bar{X}_i(t_0).$$

Există apoi o unică $f \in Izom(n)$ aşa încât: $R_f = R$ şi $f(\bar{r}(t_0)) = \bar{R}(t_0)$. f este izometria cerută. $\square$

Să observăm că izometria dată de Propoziţia precedentă este proprie ($\det R_f = +1$) deoarece bazele $(X_1(t_0), ..., X_n(t_0))$, $(\bar{X}_1(t_0), ..., \bar{X}_n(t_0))$ sunt ambele pozitiv orientate! Rezultatul central al teoriei curbelor este dat de:

Teorema 3.7 (**Teorema fundamentală a curbelor**) *Fie intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţiile netede $F_i : I \to \mathbb{R}$ cu $F_j > 0$ pentru $1 \leq j \leq n-2$. Atunci există o curbă parametrică $C : \bar{r} = \bar{r}(s), s \in I$, unică până la o izometrie proprie relativ la proprietăţile:*
1) $\|\bar{r}'(s)\| = 1$ *i.e. s este parametrul canonic al lui C,*
2) $K_i = F_i$ *pentru* $1 \leq i \leq n-1$.

Teorema fundamentală spune că, fiind fixat parametrul canonic, avem că funcţiile curburi sunt *toţi* invarianţii euclidieni ai unei curbe date. Spre exemplu, am calculat în S2.2 că dreapta în plan are curbura zero; în acord atunci şi cu S2.3 concluzionăm:

Propoziţia 3.8 *Curbele în plan şi spaţiu cu $k \equiv 0$ sunt doar dreptele. Altfel spus, o curbă în plan cu toate punctele inflexionare este obligatoriu o dreaptă.*

Analog, în S2.1 am arătat că curbura cercului este constantă. Deci:

Propoziţia 3.9 *Curbele în plan de curbură constantă strict pozitivă k sunt cercurile de rază $R = \frac{1}{k}$. Altfel spus, o curbă în plan cu toate punctele vârfuri este obligatoriu un cerc.*

Pagini Web utile:
1) http://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_curves
2) http://mathworld.wolfram.com/FundamentalTheoremofSpaceCurves.html
3) http://planetmath.org/FundamentalTheoremOfSpaceCurves.html

SEMINARUL 3

S3.1 (*Elicea circulară*) Se cer versorii Frenet, curbura şi torsiunea pentru $C : \bar{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$ cu $a > 0, b > 0$ constante date.

Rezolvare Avem:

$$\begin{cases} \bar{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \\ \bar{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0) \\ \bar{r}'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0) \\ \|\bar{r}'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = a(b\sin t, -b\cos t, a) \\ \|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\| = a\sqrt{a^2+b^2} \\ (\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t)) = a^2 b \end{cases}$$

ccea ce conduce la:

$$\begin{cases} T(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b), B(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a), N(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \\ k(t) = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \tau(t) = \frac{b}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Remarcăm că k şi τ sunt ambele constante (şi strict pozitive).

S3.2 Analog pentru curba $C : \bar{r}(t) = (1, t, \frac{t^2}{2}), t \in \mathbb{R}$. Ce conică este C şi în ce plan este situată?

Rezolvare Avem:

$$\begin{cases} \bar{r}'(t) = (0,1,t) \\ \bar{r}''(t) = (0,0,1) \\ \bar{r}'''(t) = (0,0,0) \\ \|\bar{r}'(t)\| = \sqrt{1+t^2} \\ \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = (1,0,0) \\ \|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\| = 1 \\ (\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t)) = 0 \end{cases}$$

ccea ce conduce la:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(0,1,t), B(t) = (1,0,0), N(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(0,-t,1), \quad k(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \tau(t) = 0.$$

C este o parabolă în planul $x = 1$.

S3.3 Analog pentru curba $C : \bar{r}(t) = \frac{1}{2}(t, \frac{1}{t}, \sqrt{2}\ln t), t \in \mathbb{R}^*_+$.

Rezolvare Avem: $\bar{r}'(t) = \frac{1}{2}(1, -\frac{1}{t^2}, \frac{\sqrt{2}}{t})$, $\bar{r}''(t) = \frac{1}{2}(0, \frac{2}{t^3}, -\frac{\sqrt{2}}{t^2})$, $\bar{r}'''(t) = \frac{1}{2}(0, -\frac{6}{t^4}, \frac{2\sqrt{2}}{t^3})$, $\|\bar{r}'(t)\| = \frac{t^2+1}{2t^2}$, $\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \frac{1}{4t^4}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}t^2, 2t)$, $\|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\| = \frac{\sqrt{2}(t^2+1)}{4t^4}$, $(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = -\frac{\sqrt{2}}{4t^6}$. Obţinem: $k(t) = -\tau(t) = \frac{2\sqrt{2}t^2}{(t^2+1)^2}$. Reperul Frenet:

$$T(t) = \frac{1}{t^2+1}\left(t^2, -1, \sqrt{2}t\right), \quad B(t) = \frac{1}{t^2+1}\left(-1, t^2, \sqrt{2}t\right), \quad N(t) = \frac{1}{t^2+1}\left(\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, 1-t^2\right).$$

S3.4 Analog pentru curba $C : \bar{r}(t) = (2t, \ln t, t^2), t \in (0, +\infty)$.

Rezolvare Avem: $\bar{r}'(t) = (2, \frac{1}{t}, 2t)$, $\bar{r}''(t) = (0, -\frac{1}{t^2}, 2)$, $\bar{r}'''(t) = (0, \frac{2}{t^3}, 0)$, $\|\bar{r}'(t)\| = \frac{2t^2+1}{t}$, $\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \frac{2}{t^2}(2t, -2t^2, -1)$, $\|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\| = \frac{2}{t^2}\left(2t^2+1\right)$, $(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = -\frac{8}{t^3}$. Obţinem: $k(t) = -\tau(t) = \frac{2t}{(2t^2+1)^2}$. Reperul Frenet:

$$T(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(2t, 1, 2t\right), \quad B(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(2t, -2t^2, 1\right), \quad N(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(1-2t^2, -2t, 2t\right).$$

S3.5 Analog pentru curba $C : \bar{r}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3), t \in \mathbb{R}$.

Rezolvare Avem: $\bar{r}'(t) = (1, 2t, 2t^2)$, $\bar{r}''(t) = (0, 2, 4t)$, $\bar{r}'''(t) = (0,0,4)$, $\|\bar{r}'(t)\| = 2t^2+1$, $\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = 2(2t^2, -2t, 1)$, $\|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\| = 2(2t^2+1)$, $(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = 8$. Obţinem: $k(t) = \tau(t) = \frac{2}{(2t^2+1)^2}$. Reperul Frenet:

$$T(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(1, 2t, 2t^2\right), \quad B(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(2t^2, -2t, 1\right), \quad N(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(-2t, 1-2t^2, 2t\right).$$

S3.6 Analog pentru curba $C : \bar{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4\cos\frac{t}{2}), t \in (0, 2\pi)$.

Rezolvare Avem:

$$\begin{cases} \bar{r}'(t) = (1-\cos t, \sin t, -2\sin\frac{t}{2}) \\ \bar{r}''(t) = (\sin t, \cos t, -\cos\frac{t}{2}) \\ \bar{r}'''(t) = (\cos t, -\sin t, \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}) \\ \|\bar{r}'(t)\| = 2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} \\ \bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t) = -2\sin^2\frac{t}{2}(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}, 1) \\ \|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)\| = 2\sqrt{2}\sin^2\frac{t}{2} \\ (\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t)) = \sin^3\frac{t}{2} \end{cases}$$

ccea ce conduce la:

$$\begin{cases} T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}, -1), B(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}, 1), N(t) = (\cos\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2}, 0) \\ k(t) = \tau(t) = \frac{1}{8\sin\frac{t}{2}}. \end{cases}$$

S3.7 Analog pentru curba $C : \bar{r}(t) = (a(\sin t + \cos t), a(\sin t - \cos t), be^{-t}), t \in \mathbb{R}$. **Temă!**

S3.8 Analog pentru curba $C : \bar{r}(t) = (ae^t\cos t, ae^t\sin t, be^t), t \in \mathbb{R}$. **Temă !**

Cursul 4

Ecuaţiile Frenet

Fixăm în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, curba parametrizată $C : \bar{r} = \bar{r}(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}$, în poziţie generală. Avem atunci reperul Frenet $RF(\bar{r}(t)) = \{\bar{r}(t); X_1(t) = T(t), ..., X_n(t)\}$ în punctul generic $P(\bar{r}(t)) \in C$. În Cursul 2 am dedus ecuaţiile de mişcare ale acestui reper; conform ecuaţiei (2.5) avem:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix} = \|\bar{r}'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & k_1(t) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_1(t) & 0 & k_2(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_2(t) & 0 & k_3(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & k_{n-1}(t) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -k_{n_1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Definiţia 4.1 Relaţiile (4.1) se numesc *ecuaţiile Frenet* ale lui C.

În cele ce urmează, pentru simplificarea scrierii, vom presupuse că C este parametrizată canonic şi vom rescrie aceste ecuaţii în dimensiuni mici:
I) $n = 2$

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

II) $n = 3$

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

O aplicaţie importantă a ecuaţiilor Frenet este determinarea de clase speciale de curbe, subiect ce va fi tratat în continuare.

Propoziţia 4.2 *Pentru curba C următoarele afirmaţii sunt echivalente*:
i) *ultima curbură este nulă,*
ii) *C este inclusă într-un hiperplan.*

Demonstraţie Vom arăta doar implicaţia i) $\Rightarrow$ ii) lăsând ca temă implicaţia cealaltă. Din ultima ecuaţie Frenet: $\frac{dX_n(s)}{ds} = -k_{n-1}(s)X_{n-1}(s)$, rezultă în baza ipotezei că X_n este un versor constant şi-l notăm $(A_1, ..., A_n)$. Integrând relaţia $< X_1(s), X_n >= 0$ avem:

$$A_1 x^1(s) + ... + A_n x^n(s) = A_{n+1}$$

care este ecuaţia unui hiperplan. $\square$

Reformulăm pentru $n = 3$:

Propoziţia 4.3 *Curba $C \subset \mathbb{R}^3$ este situată într-un plan dacă şi numai dacă torsiunea este nulă pe I.*

Tot pentru cazul $n = 3$ fie versorul fixat $W = (w^1, w^2, w^3) \in S^2$; notăm *sfera unitate n-dimensională* $S^n = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^{n+1}; \|\bar{u}\| = 1\}$.

Definiţia 4.4 i) Numim *unghiul de structură* dintre C şi W funcţia $\theta : I \to [0, \pi]$ dat de:

$$\cos\theta(s) =< T(s), W > . \tag{4.4}$$

ii) Curba C o numim *θ-elice* relativ la W dacă θ este un unghi constant.
iii) Fie C o θ-elice cu $\theta \notin \{0, \pi\}$. Numărul real:

$$Lancret(C) = ctg\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{4.5}$$

îl numim *invariantul Lancret* al lui C.

Următorul rezultat constituie o caracterizare a elicelor precum şi o exprimare a invariantului Lancret în funcţie de curbură şi torsiune:

Propoziţia 4.5 i) *Curba C diferită de dreaptă este o elice relativ la W dacă şi numai dacă $N(s) \perp W$ pentru orice $s \in I$.*
ii) (Lancret) *Pentru o θ-elice raportul $\frac{\tau(s)}{k(s)}$ este o constantă, mai precis*:

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = \pm Lancret(C). \tag{4.6}$$

iii) *Dacă pentru C diferită de dreaptă raportul $\frac{\tau}{k}$ este constant atunci C este o θ-elice cu $\theta = arcctg(\frac{\tau}{k})$.*

Demonstraţie i) Derivăm relaţia (4.4) în raport cu s:

$$-\theta' \sin\theta =< k(s)N(s), W > + < T(s), \bar{0} >= k(s) < N(s), W > .$$

Cum C nu este dreaptă avem $k(s) > 0$ şi deci membrul stâng se anulează dacă şi numai dacă $< N(s), W >= 0$ pentru orice s. Să obsevăm că anularea membrului drept este echivalent cu anularea lui θ'. În adevăr, dacă ar exista s_0 astfel încât $\theta'(s_0)$ ar fi nenul atunci din continuitate există o vecinătate U a lui s_0 cu $\theta' \neq 0$ pe U. Dar atunci $\sin\theta = 0$ pe U şi deci θ ar fi constantă pe U ceea ce este o contradicţie cu $\theta'|_U \neq 0$.
ii) Conform punctului precedent avem descompunerea următoare a lui W în reperul Frenet:

$$W = \cos\theta T(s) + (\pm\sin\theta)B(s). \tag{4.7}$$

Prin derivare rezultă:

$$\bar{0} = \cos\theta k(s)N(s) + (\pm\sin\theta)(-\tau(s))N(s) = (\cos\theta k(s) \mp \sin\theta\tau(s))N(s)$$

ceea ce duce la:

$$\cos\theta k(s) = \pm\sin\theta\tau(s).$$

Rezultă imediat concluzia.
iii) Fie deci $\theta = arcctg(\frac{\tau}{k})$ şi versorul $W = \cos\theta + \sin\theta B$. Avem: $k\cos\theta - \tau\sin\theta = 0$ şi deci:

$$k\cos\theta N(s) - \tau\sin\theta N(s) = \bar{0}$$

adică:

$$\cos\theta T'(s) + \sin\theta B'(s) = \bar{0}.$$

Prin integrare, avem $< T(s), W >= \cos\theta$=constant, ceea ce voiam. $\square$

Afirmaţia Lancret din rezultatul precedent conduce la o nouă noţiune:

Definiţia 4.6 Numim *elice generalizată* o curbă cu toate curburile constante.

Exemple de elice generalizată:
i) în plan avem cercul conform exerciţiului S2.1,
ii) în spaţiu este elicea circulară din exerciţiul S3.1.

Pagini Web utile:
1) http://en.wikipedia.org/wiki/Frenet%E2%80%93Serret_formulas
2) http://en.wikipedia.org/wiki/Helix
3) http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_geometry_of_curves.

SEMINARUL 4

S4.1 Să se arate că următoarele curbe sunt situate într-un plan π şi se cere π:
i) $\bar{r}(t) = (\sin t, 2\cos(\frac{\pi}{4} - t), 1 + \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$
ii) $\bar{r}(t) = (t^2 - 1, t^2, -\ln t)$, $t \in (0, +\infty)$,
iii) $\bar{r}(t) = (t^2(2t + 1), t(t - 2), t(t^2 + 1) - 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Remarcăm că această curbă este *algebrică* adică este definită prin polinoame !

Rezolvare Arătăm că $B(t)$ este vector constant obţinând astfel şi ecuaţia lui π; de altfel, dacă nu se cerea acest plan era suficient să arătăm anularea torsiunii.
i) $\bar{r}'(t) = (\cos t, 2\sin(\frac{\pi}{4} - t), -\sin t)$, $\bar{r}''(t) = -(\sin t, 2\cos(\frac{\pi}{4} - t), \cos t)$. Deci:

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$$

ceea ce dă: $\pi : \sqrt{2}x - y + \sqrt{2}z - \sqrt{2} = 0$.
ii) $\bar{r}'(t) = (2t, 2t, -\frac{1}{t})$, $\bar{r}''(t) = (2, 2, \frac{1}{t^2})$. Deci:

$$\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \frac{4}{t}(1, -1, 0)$$

de unde concluzia cu: $\pi : x - y + 1 = 0$.
iii) $\bar{r}'(t) = (6t^2 + 2t, 2t - 2, 3t^2 + 1)$, $\bar{r}''(t) = (12t + 2, 2, 6t)$. Deci:

$$\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = 2(3t^2 - 6t - 1)(1, -1, -2)$$

de unde concluzia cu: $\pi : x - y - 2z - 2 = 0$.

Definiţia 4.7 Planul prin punctul curent $P(\bar{r}(t)) \in C$ ce este perpendicular pe $B(t)$ se numeşte *planul osculator* în P şi-l notăm $\pi_{osc}(t)$.

S4.2 Pentru $C : \bar{r}(t) = e^t(\sin t, \cos t, 1)$ să se arate că tangent, normala şi binormala fac fiecare un unghi constant cu axa verticală Oz.

Rezolvare Fie θ, α, β unghiul format de tangenta, normala şi respectiv binormala cu versorul director $\bar{k}$ al dreptei Oz. Avem:

$$\begin{cases} \bar{r}'(t) = e^t(\sin t + \cos t, \cos t - \sin t, 1), \bar{r}''(t) = e^t(2\cos t, 2\sin t, 1), \|\bar{r}'(t)\| = \sqrt{3}e^t \\ \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = e^{2t}(\cos t + \sin t, \cos t - \sin t, -2), \|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\| = \sqrt{6}e^{2t} \\ (\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}''' = e^{3t}(3(\cos t - \sin t), -3(\cos t + \sin t), 0), \|(\bar{r} \times \bar{r}'') \times \bar{r}'''\| = 3\sqrt{2}e^{3t}. \end{cases}$$

Rezultă:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{<\bar{r}', \bar{k}>}{\|\bar{r}'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\alpha = \frac{<(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}''', \bar{k}>}{\|(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}'''\|} = 0 \\ \cos\beta = \frac{<\bar{r}' \times \bar{r}'', \bar{k}>}{\|\bar{r}' \times \bar{r}'')\|} = -\frac{2}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

Prin urmare, C este o $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$-elice relativ la direcţia verticală $\bar{k}$.

S4.3 Se cer unghiurile dintre axele de coordonate şi tangenta la curba $C : \bar{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin\frac{t}{2})$, $t \in \mathbb{R}$.

Rezolvare Fie $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ unghiul făcut de tangenta $\bar{r}'(t)$ cu versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Avem: $\bar{r}'(t) = (1 - \cos t, \sin t, 2\cos\frac{t}{2})$ şi $\|\bar{r}'(t)\| = 2$ de unde rezultă: $\cos\alpha(t) = \sin^2\frac{t}{2}$, $\cos\beta(t) = \frac{1}{2}\sin t$, $\cos\gamma(t) = \cos\frac{t}{2}$.

S4.4 Să se arate că dreptele tangente la curba $C : \bar{r}(t) = (a\cos t, -a\sin t, be^t)$, $t \in \mathbb{R}$ intersectează planul orizontal xOy după un cerc.

Rezolvare Cum $\bar{r}'(t) = (-a\sin t, -a\cos t, be^t)$ rezultă că ecuaţia dreptei tangente este:

$$\frac{x - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{y + a\sin t}{-a\cos t} = \frac{z - be^t}{be^t}.$$

Cu $z = 0$ obţinem intersecţia cerută de ecuaţii:

$$\begin{cases} x(t) = a(\cos t + \sin t) \\ y(t) = a(\cos t - \sin t) \end{cases}$$

care ecuaţia cercului $x^2 + y^2 = 2a^2$.

S4.5 Să se arate că locul geometric al punctelor de intersecţie dintre planul xOy şi dreptele tangente la curba algebrică $C : \bar{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ este o conică.

Rezolvare Dreapta tangentă la C într-un punct generic are ecuaţia:

$$\frac{x - t}{1} = \frac{y - t^2}{2t} = \frac{z - t^3}{3t^2}$$

şi prin intersecţie cu planul xOy obţinem: $x(t) = \frac{2t}{3}$, $y(t) = \frac{t^2}{3}$. Eliminând parametrul t din aceste ecuaţii obţinem parabola $P : y = \frac{3}{4}x^2$.

S4.6 Se cer punctele curbei $C : \bar{r}(t) = (\frac{t^4}{2}, -\frac{t^3}{3}, t^2)$ în care tangenta este paralelă cu planul $\pi : 3x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Rezolvare Normala la planul π este $\bar{N} = (3, -2, -2)$ şi deci trebuie ca tangenta la curbă, i.e. $\bar{r}'(t) = (2t^3, -t^2, 2t)$ să fie perpendiculară pe acest vector. Din $< \bar{N}, \bar{r}'(t) >= 0 = 2t(3t^2 + t - 2)$ avem soluţiile: $t_1 = 0$, $t_2 = -1$, $t_3 = \frac{2}{3}$. Să observăm că punctul $\bar{r}(t_1)$ este singular deoarece $\bar{r}'(t_1) = \bar{0}$; deci reţinem doar $P_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1)$ şi $P_3(\frac{8}{81}, -\frac{8}{81}, \frac{4}{9})$.

S4.7 Se cere planul osculator în punctul $M(1, 1, 1)$ la curba dată implicit
$C : y^2 = x, x^2 = z$.

Rezolvare Cu $y = t$ se obţine parametrizarea $C : \bar{r}(t) = (t^2, t, t^4)$. În final se obţine $\pi_{osc}(M) : 6x - 8y - z + 3 = 0$.

Cursul 5

Noţiunea de suprafaţă. Geometria unei suprafeţe

Fie U o mulţime deschisă în planul $\mathbb{R}^2$ ale cărei elemente le notăm $\bar{u} = (u^1, u^2) = (u^)_{i=1,2}$. Fixăm aplicaţia netedă $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de forma:

$$\varphi(\bar{u}) = (\varphi^1(\bar{u}), \varphi^2(\bar{u}), \varphi^3(\bar{u})) = (\varphi^\alpha(\bar{u}))_{\alpha=1,2,3}. \tag{5.1}$$

Prin urmare, în continuare vom folosi indicii $i, j, k, ... \in \{1, 2\}$ respectiv $\alpha, \beta, \gamma, ... \in \{1, 2, 3\}$.

Definiţia 5.1 Numim *matricea Jacobiană* a lui φ în $\bar{u} \in U$ matricea:

$$J\varphi(\bar{u}) = \left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^i}\right)_{\alpha=1,2,3;i=1,2} \in M_{3,2}(\mathbb{R}). \tag{5.2}$$

Spunem că φ este *imersie* în $\bar{u}$ dacă $J\varphi(\bar{u})$ are rangul maxim posibil i.e. 2. Dacă φ este imersie în orice punct spunem că φ este *imersie pe* U.

Coloanele matricii Jacobiene:

$$J\varphi(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \varphi^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi^3}{\partial u^3} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

sunt exact vectorii derivaţi $\varphi_1(\bar{u})$ respectiv $\varphi_2(\bar{u})$ şi atunci condiţia de imersie în $\bar{u}$ fixat revine la faptul geometrică că avem vectorul nenul $\varphi_1(\bar{u}) \times \varphi_2(\bar{u}) \neq \bar{0}$ adică aceşti vectori sunt necoliniari !

Obiectul teoriei suprafeţelor este dat de:

Definiţia 5.2 Fie mulţimea conexă $S \subset \mathbb{R}^3$.
1) S o numim *suprafaţă regulată* (sau *scufundată*) dacă pentru orice $P \in S$ există tripletul (U, φ, W) cu $U \subseteq \mathbb{R}^2$ deschis, $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ imersie pe U şi W deschis în $\mathbb{R}^3$ astfel încât: i) i) $\varphi(U) = S \cap W$, ii) $P \in \varphi(U)$,
iii) φ este *homeomorfism* de la U la $\varphi(U)$ considerat cu topologia indusă din $\mathbb{R}^3$ i.e.
$\varphi : U \to \varphi(U)$ este bijecţie cu φ şi φ^{-1} continue.
Perechea (U, φ) o numim *parametrizare locală a lui S în jurul lui P* şi o notăm:

$$\bar{r} = \varphi(\bar{u}), \bar{u} \in U \tag{5.4}$$

iar perechea $h = (\varphi(U) \subset S, \varphi^{-1})$ o numim *hartă locală pe S în jurul lui P.*
2) Datorită existenţei funcţiei $\varphi^{-1} : \varphi(U) \subset S \to U$ putem introduce funcţiile $(u^1(.), u^2(.)) = \varphi^{-1}$ numite *funcţii coordonate* pe S în jurul lui $P \in S$. Pentru $j \in \{1, 2\}$ curba $C_j : t \to \varphi(\bar{u}_0 + t\bar{e}_j) \in S$ se numeşte *curba j-coordonată pe S prin $P = \varphi(\bar{u}_0)$.*
3) Numim *atlas* pe suprafaţa regulată S o familie $\mathscr{A} = \{(U_a, {}_a\varphi); a \in A\}$ de parametrizări locale pentru care $S = \cup_{a \in A} a\varphi(U_a)$. Dacă atlasul are o unică parametrizare spunem că avem o *parametrizare globală.*
4) Numim *geometria lui S* studiul proprietăţilor lui S relativ la un atlas fixat !

Observaţii 5.3 i) Definiţia spune că o suprafaţă regulată "arată" local ca un deschis din plan şi această identificare locală nu este doar la nivel de mulţimi amorfe ci şi topologic ! Mai mult, putem face un calcul local pe S ce imită pe cel din $\mathbb{R}^2$ datorită lui φ.
ii) Renotând eventual pentru simplitate $\bar{u} = (u, v)$ va rezulta că P este imaginea prin φ a lui $\bar{u}_0 = (u_0, v_0)$. Atunci curbele de coordonate pe S prin P sunt date de:
ii1) $C_1 : v = v_0$=constant şi o putem renota C_{v_0},
ii2) $C_2 : u = u_0$=constant şi o putem renota C_{u_0}.

Avem imediat următoarele metode de obţinere de noi parametrizări locale din una dată:

Propoziţia 5.4 *Fie parametrizarea locală (U, φ) pe S în jurul lui P.*
1) *Dacă $V \subseteq \mathbb{R}^2$ este un deschis în plan şi $\rho : V \to U$ este difeomorfism atunci $(V, \bar{\varphi})$ cu $\bar{\varphi} = \varphi \circ \rho$ este parametrizare locală pe S în jurul lui P.*
2) *Dacă $V \subset U$ este un deschis cu $\bar{u}_0 \in V$ atunci $(V, \varphi|_V)$ este parametrizare locală pe S în jurul lui P.* (Deci putem obţine parametrizări locale cu domeniul arbitrar de "mic".)

Prezentăm în continuare câteva exemple fundamentale de suprafeţe regulate pentru care, în general, vom verifica condiţia de imersie, celelalte aspecte din definiţii fiind lăsate ca Temă.

Exemple 5.5
1) (Plane) Fie punctul $P_0(\bar{r}_0) \in \mathbb{R}^3$ şi vectorii necoliniari $\bar{a}$, $\bar{b}$. Atunci există un unic plan π ce conţine pe P_0 şi este generat de vectorii $\bar{a}$ and $\bar{b}$:

$$\pi : \bar{r}(u, v) := \bar{r}_0 + u\bar{a} + v\bar{b}, (u, v) \in \mathbb{R}^2. \tag{5.5}$$

π admite parametrizarea globală $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ unde $\varphi(u^1, u^2) = \bar{r}_0 + u^1\bar{a} + u^2\bar{b}$. Deoarece $\varphi_1 = \bar{a}$, $\varphi_2 = \bar{b}$ sunt vectori necoliniari rezultă că planele sunt suprafeţe regulate.
2) (Mulţimi deschise în plan) Fie U un deschis în $\mathbb{R}^2$. U admite parametrizarea globală (U, φ) unde $\varphi(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0)$. Avem că $\varphi_1 = \bar{\imath}$, $\varphi_2 = \bar{\jmath}$ sunt vectori necoliniari şi deci U este suprafaţă regulată.
În fapt, rezultă din Propoziţia 5.4ii) că orice submulţime deschisă a unei suprafeţe regulate este suprafaţă regulată.
3) (Grafice de funcţii) Fie $f : U \to \mathbb{R}$ netedă. Graficul lui f este $Gr(f) = \{(x, f(x); x \in U\} \subset \mathbb{R}^3$. $Gr(f)$ admite parametrizarea globală (U, φ) unde $\varphi(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$ şi avem $\varphi_1 = (1, 0, f_1)$ respectiv $\varphi_2 = (0, 1, f_2)$. Avem $\varphi_1 \times \varphi_2 = (-f_1, -f_2, 1) \neq \bar{0}$ deci $Gr(f)$ este o suprafaţă regulată numită *suprafaţă Monge*. Ecuaţia:

$$S : z = f(x, y) \tag{5.6}$$

se numeşte *ecuaţia explicită* a suprafeţei S.

Multţimile compacte din $\mathbb{R}^3$ fiind închise nu pot fi homeomorfe cu un deschis şi deci pentru exemple de suprafeţe compacte nu vom avea niciodată atlase cu o singură parametrizare.

Exemplul 5.7 (*Sfera unitate*) Mulţimea versorilor din spaţiul fizic constituie sfera:

$$S^2 = \{P(\bar{r}) \in \mathbb{R}; \|\bar{r}\| = 1\}. \tag{5.7}$$

Fie bila deschisă din plan $U = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^2; \|\bar{u}\| < 1\}$ şi atlasul $\mathscr{A} = \{(U, {}_1\varphi), ..., (U, {}_6\varphi)\}$ unde:

$$\begin{cases} {}_1\varphi(\bar{u}) = (u^1, u^2, \sqrt{1 - \|\bar{u}\|^2}), \\ {}_2\varphi(\bar{u}) = (u^1, u^2, -\sqrt{1 - \|\bar{u}\|^2}), \\ {}_3\varphi(\bar{u}) = (u^1, \sqrt{1 - \|\bar{u}\|^2}, u^2), \\ {}_4\varphi(\bar{u}) = (u^1, -\sqrt{1 - \|\bar{u}\|^2}, u^2), \\ {}_5\varphi(\bar{u}) = (\sqrt{1 - \|\bar{u}\|^2}, u^1, u^2), \\ {}_6\varphi(\bar{u}) = (-\sqrt{1 - \|\bar{u}\|^2}, u^1, u^2). \end{cases} \tag{5.8}$$

Un calcul imediat arată că $(U, {}_a\varphi; a = 1, ..., 6)$ sunt parametrizări locale pe S^2 ce acoperă sfera; deci S^2 este suprafaţă regulată.

SEMINARUL 5

S5.1 Pe suprafaţa S considerăm parametrizarea globală $\bar{r} = (u^1 + u^2, u^1 - u^2, u^1u^2)$. Se cer:
i) coordonatele carteziene ale punctelor $P_1(u^1 = 2, u^2 = 1)$, $P_2(u^1 = 1, u^2 = 2)$,
ii) să se stabilească dacă punctele $P_3(4, 2, 3)$, $P_4(1, 4, -2)$ aparţin lui S,
iii) ecuaţia implicită şi să se reia punctul anterior. Recunoaşteţi pe S?

Rezolvare i) $P_1(3, 2, 1)$, $P_2(3, -1, 2)$. ii) $P_3 \in S$ deoarece sistemul: $u + v = 4, u - v = 2, uv = 3$ are soluţia $u = 3, v = 1$. $P_4 \notin S$ deoarece sistemul $u + v = 1, u - v = 4, uv = -2$ este incompatibil. iii) Din ecuaţiile: $x = u + v, y = u - v$ rezultă: $u = \frac{x+y}{2}, v = \frac{x-y}{2}$ şi deci $z = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$. Prin urmare, avem $S : x^2 - y^2 - 4z = 0$ iar cerinţa de la punctul ii) se verifică imediat pentru P_3 respectiv P_4. S este o porţiune de cuadrică.

S5.2 Pe suprafaţa S se dă parametrizarea globală $\bar{r} = (u^2 + v, u^2 - v, uv)$. Să se arate că:
i) curbele $u = u_0$ sunt drepte iar curbele $v = v_0$ sunt curbe plane,
ii) curba $u = v$ este o curbă plană.

Rezolvare i) Avem $C_{u_0} : \bar{r}(v) = (u_0^2 + v, u_0^2 - v, u_0v)$ care este o dreaptă ce trece prin punctul $M_0(u_0^2, u_0^2, 0)$ şi are vectorul director $\bar{a} = (1, -1, u_0) \neq \bar{0}$.
Avem $C_{v_0} : \bar{r}(u) = (u^2 + v_0, u^2 - v_0, uv_0)$ ce dă $\frac{d^3}{du^3}\bar{r} = \bar{0}$ ceea ce confirmă concluzia.
ii) $C_{u=v} : \bar{r}(u) = (u^2 + u, u^2 - u, u^2)$ şi aplicăm acelaşi argument ca mai sus.

S5.3 Pe suprafaţa S se consideră parametrizarea globală $\bar{r} = (u^2 + u + v, v^2 + u - v, u - v)$. Să se arate că curbele de coordonate sunt curbe plane.

Rezolvare Exact ca la problema anterioară.

S5.4 Se cere ecuaţia implicită a suprafeţei S având parametrizarea globală
$\bar{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin v, v \cos 2u)$.

Rezolvare $S : (x^2 - y^2)^2 = z^2(x^2 + y^2)$.

S5.5 Aceeaşi problemă pentru S cu $\bar{r}(u, v) = (vtgu, vctgu, v)$.

Rezolvare $S : z^2 = xy$. S este un con.

Definiţia 5.8 O suprafaţă S pentru care una din curbele coordonate este o dreaptă (sau segment de dreaptă) se numeşte *suprafaţă riglată*. Dreapta respectivă o numim *generatoarea lui* S.

Presupunând că C_{u_0} este dreaptă rezultă că o suprafaţă riglată are harta globală:

$$h : \varphi(u, v) = \bar{a}(u) + v\bar{b}(u); \quad \bar{b}(u) \neq \bar{0}, \forall u \tag{5.9}$$

iar condiţia de imersie este: $(\bar{a}_u + v\bar{b}_u) \times \bar{b} \neq \bar{0}$. Generatoarea dată de u_0 are ecuaţia:

$$G : \bar{r}(v) = \bar{a}(u_0) + v\bar{b}(u_0) \tag{5.10}$$

şi este o dreaptă prin punctul $P(\bar{a}(u_0))$ având vectorul director $\bar{b}(u_0) \neq \bar{0}$.

Definiţia 5.9 Fie suprafaţa riglată S.
i) Curba din spaţiu $C : \bar{r} = \bar{a}(t)$ se numeşte *curba directoare* a lui S.
ii) Dacă toate generatoarele trec prin punctul $V \in \mathbb{R}^3$ spunem că S este un *con generalizat* cu vârful V.
iii) Dacă generatoarele sunt paralele între ele spunem că S este un *cilindru generalizat.*

Dacă $\bar{b}(u) = u\bar{b}_0$ cu $\bar{b}_0 \neq \bar{0}$ şi $u \neq 0$ rezultă că avem cilindru generalizat. Condiţia de imersie revine atunci la $\bar{a}_u \times \bar{b}_0 \neq \bar{0}$ adică $\bar{a}_u$ trebuie să fie mereu necoliniar cu $\bar{b}_0$.

S5.6 Suprafaţa S de la exerciţiul S5.2 este o suprafaţă riglată (ce nu este con generalizat şi nici cilindru generalizat).

Rezolvare S este suprafaţă riglată cu: $\bar{a}(u) = (u^2, u^2, 0)$ şi $\bar{b}(u) = (1, -1, u)$. S nu este cilindru generalizat deoarece funcţia $\bar{b}(u)$ nu are expresia $u\bar{b}_0$. Generatoarele sunt:

$$G_u : \bar{r}(v) = (u^2 + v, u^2 - v, uv).$$

şi presupunem că două generatoare G_u, $G_{\tilde{u}}$ au un punct comun. Din egalarea primelor două componente ale ecuaţiei lui G_u şi $G_{\tilde{u}}$ rezultă $u^2 = \tilde{u}^2$. Prin urmare, generatoarele $G_{\hat{u}}$ cu $\hat{u} \neq \pm u$ nu vor avea puncte comune cu generatoarele $G_{\pm u}$ deci S nu-i un con generalizat.

S5.7 Se dau două suprafeţe cu parametrizările globale $\bar{r}_1 = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}, \frac{1}{u^2+v^2}\right)$, $\bar{r}_2 = (u\cos v, u\sin v, u^2)$. Să se arate că avem aceeaşi suprafaţă.

Rezolvare Avem acceaşi suprafaţă $S : z = x^2 + y^2$.

Cursul 6

Planul tangent şi normala

Fie punctul $P \in \mathbb{R}^n$ oarecare. Considerăm mulţimea $T_P\mathbb{R}^n = \{(P, \bar{r}); \bar{r} \in \mathbb{R}^n\}$ pe care definim operaţiile $+$ şi $\cdot$ astfel:

$$\begin{cases} (P, \bar{r}_1) + (P, \bar{r}_2) = (P, \bar{r}_1 + \bar{r}_2), \\ \lambda(P, \bar{r}) = (P, \lambda\bar{r}), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Se obţine imediat că $(T_P\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ este spaţiu vectorial real. Dimensiunea lui $T_P\mathbb{R}^n$ este n deoarece o bază este $\{(P, \bar{e}_1), ..., (P, \bar{e}_n)\}$ cu $\{\bar{e}_i; i = 1, ..., n\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 6.1 $T_P\mathbb{R}^n$ se numeşte *spaţiul tangent la* $\mathbb{R}^n$ *în* P.

Fie acum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un deschis şi $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ netedă. Fie $P(\bar{u}_0) \in U$.

Definiţia 6.2 *Diferenţiala lui* φ *în* P este aplicaţia $d\varphi(\bar{u_0}) : T_P\mathbb{R}^n \to T_{\varphi(P)}\mathbb{R}^m$ dată de:

$$d\varphi(P)(P, \bar{r}) = (\varphi(P), J\varphi(P) \cdot \bar{r}) \tag{6.2}$$

unde $J\varphi(P)$ este matricea Jacobiană definită în Cursul precedent: $J\varphi(P) = (\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial u^i}(\bar{u}_0)) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\alpha = 1, ..., m$, $i = 1, ..., n$.

Rezultă imediat că $d\varphi(P)$ este transformare liniară între cele două spaţii tangente. Din definiţie, identificând $T_P\mathbb{R}^n$ cu $\mathbb{R}^n$ (via $(P, \bar{r}) \leftrightarrow \bar{r}$) şi $T_{\varphi(P)}\mathbb{R}^m$ cu $\mathbb{R}^m$ avem $d\varphi(P) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\bar{r} \to J\varphi(\bar{u_0}) \cdot \bar{r}$ ceea ce spune că matricea acestei transformări liniare este tocmai $J\varphi(P)(\bar{u}_0)$.

Fie acum mulţimea oarecare $S \subset \mathbb{R}^n$ şi $P(\bar{r}_0) \in S$.

Definiţia 6.3 Vectorul $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ îl numim *tangent la* S *în* P dacă există o curbă netedă $\bar{r} : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ aşa încât $\bar{r}(I) \subset S$, $\bar{r}(0) = P = \bar{r}_0$ şi $\bar{r}'(0) = \bar{v}$. Fie T_PS mulţimea acestor vectori tangenţi la S în P.

Introducem şi:

Definiţia 6.4 Fie spaţiul vectorial real V şi $C \subset V$ submulţime nevidă. Spunem că C este *con* în V dacă pentru orice $v \in C$ şi orice $\lambda \in \mathbb{R}$ avem $\lambda v \in C$.

Această noţiune permite formularea următorului rezultat:

Propoziţia 6.5 *T_PS este un con în $T_P\mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie Vectorul nul $\bar{0} \in T_P\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ aparţine lui T_PS deoarece considerăm curba constantă $\bar{r} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, $\bar{r}(t) \equiv \bar{r}_0$ pentru orice t. Fie acum $\lambda \in \mathbb{R}^*$ şi $\bar{v} \in T_PS$ nenul; deci există curba netedă $\bar{r}$ ca în Definiţia 6.3. Considerăm $\bar{r}_\lambda : I_\lambda = (-\frac{\varepsilon}{|\lambda|}, \frac{\varepsilon}{|\lambda|}) \to \mathbb{R}^n$ dată de $\bar{r}_\lambda(t) = \bar{r}(\lambda t)$. Rezultă că $\bar{r}_\lambda$ este curbă netedă cu $\bar{r}(I_\lambda) = \bar{r}(I) \subset S$ şi $\bar{r}_\lambda(0) = \bar{r}(0) = P$. Deoarece $\bar{r}'_\lambda(t) = \lambda \bar{r}'(t)$ rezultă că $\bar{r}'_\lambda(0) = \lambda \bar{v}$ ceea ce arată că $\lambda \bar{v} \in T_P S$. $\Box$

Definiţia 6.6 $T_P S$ este numit *conul tangent la* S *în* P.

Să presupunem acum că $n = 3$ şi S este suprafaţă regulată. Vom utiliza o metodă standard în teoria suprafeţelor: definim ceva la modul general (cum este $T_P S$) dar pentru a obţine informaţii (calitative) utilizăm o parametrizare locală a lui S în jurul lui P de forma (U, φ). Ca în Cursul precedent fie $\bar{u}_0 = \varphi^{-1}(\bar{r}_0) \in U$ imaginea inversă a lui P pe domeniul U.

Teorema 6.7 *Diferenţiala* $d\varphi(\bar{u}_0) : T_{\bar{u}_0}\mathbb{R}^2 \to T_P\mathbb{R}^3 = T_{\bar{r}_0}\mathbb{R}^3$ *este bijecţie de la* $T_{\bar{u}_0}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ *la* $T_P S$.

Demonstraţie Din condiţia de imersie avem că $d\varphi(\bar{u}_0)$ este injectivă. Mai avem de arătat că $d\varphi(\bar{u}_0) : \mathbb{R}^2 \to T_P S$ este surjectivă.
1) Arătăm incluziunea $d\varphi(\bar{u}_0)(T_{\bar{u}_0}\mathbb{R}^2) \subseteq T_P S$. Fie $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ oarecare. Putem găsi $\varepsilon > 0$ aşa încât $\bar{u}_0 + t\bar{v} \in U$ pentru orice $t \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Fie atunci curba $\bar{r} : I \to \mathbb{R}^3$, $\bar{r}(t) = \varphi(\bar{u}_0 + t\bar{v})$. Această curbă este netedă, avem $\bar{r}(I) \subset U \subset S$ şi $\bar{r}(0) = \varphi(\bar{u}_0) = P$. De asemeni:

$$\bar{r}'(t) = \frac{d}{dt}(\varphi^\alpha(\bar{u}_0 + t\bar{v})) = \left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^i}(\bar{u}_0 + t\bar{v}) \cdot v^i\right) = d\varphi(\bar{u}_0 + t\bar{v})(\bar{v})$$

şi pentru $t = 0$ rezultă: $d\varphi(\bar{u}_0)(\bar{v}) = \bar{r}'(0) \in T_P S$.
2) Arătăm incluziunea $T_P S \subseteq d\varphi(\bar{u}_0)(\mathbb{R}^2)$. Fie $\bar{v} \in T_P S$ şi curba netedă care-l produce, $\bar{r} : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ cu $\bar{r}(I) \subset S$, $\bar{r}(0) = P = \bar{r}_0$ şi $\bar{r}'(0) = \bar{v}$. Eventual micşorând pe ε putem presupune $\bar{r}(I) \subset U$. Fie curba $\bar{R} : I \to \mathbb{R}^2$, $\bar{R} = \varphi^{-1} \circ \bar{r}$. Avem în mod evident că $\bar{R}$ este netedă fiind compunere de aplicaţii netede şi $\bar{R}(0) = \varphi^{-1}(\bar{r}_0) = \bar{u}_0$. Prin urmare, $\bar{V} := \bar{R}'(0) \in T_{\bar{u}_0}\mathbb{R}^2$. Cu un calcul asemănător celui de mai sus avem:

$$d\varphi(\bar{u}_0)(\bar{V}) = \frac{d}{dt}\varphi \circ \bar{R}|_{t=0} = \bar{r}'(0) = \bar{v}$$

adică ceea ce voiam. $\Box$

Corolarul 6.8 $T_P S$ *este subspaţiu vectorial* 2*-dimensional al lui* $T_P\mathbb{R}^3$.

Demonstraţie $d\varphi(\bar{u}_0)$ fiind bijecţie va transporta structura de spaţiu vectorial 2-dimensional a lui $T_{\bar{u}_0}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ pe $T_P S$ devenind astfel un izomorfism liniar. $\Box$

Definiţia 6.9 $T_P S$ se numeşte *spaţiul vectorial tangent la* S *în* P. Planul prin punctul P având pe $T_P S$ ca plan vectorial director se numeşte *planul tangent la* S *în* P şi-l notăm $\pi_P S$.

Un izomorfism liniar transportă o bază din spaţiul vectorial de plecare în bază în spaţiul vectorial imagine. Prin urmare, în $T_P S$ avem *baza canonică relativ la parametrizarea* (U, φ), $\{\frac{\partial}{\partial u^1}|_P := d\varphi(\bar{u}_0)(\bar{e}_1), \frac{\partial}{\partial u^2}|_P := d\varphi(\bar{u}_0)(\bar{e}_2)\}$. Mai precis:

$$\frac{\partial}{\partial u^1}|_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \varphi^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi^3}{\partial u^3} \end{pmatrix} (\bar{u}_0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \varphi^3}{\partial u^1} \end{pmatrix} (\bar{u}_0) = \varphi_1(\bar{u}_0) \tag{6.3}$$

respectiv:

$$\frac{\partial}{\partial u^2}|_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \varphi^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi^3}{\partial u^3} \end{pmatrix} (\bar{u}_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \varphi^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} (\bar{u}_0) = \varphi_2(\bar{u}_0). \tag{6.4}$$

În concluzie: $\frac{\partial}{\partial u^i}|_P = \varphi_i(\bar{u}_0)$ iar condiţia de imersie spune că aceştia sunt vectori necoliniari deci generează un subspaţiu vectorial 2-dimensional !

Cum spaţiul fizic $\mathbb{R}^3$ are trei dimensiuni (grade de libertate) şi am "ocupat" două dintre acestea cu $T_P S$ a mai rămas un grad de libertate descris de:

Definiţia 6.10 i) Versorul:

$$\bar{N}(P) = \frac{\varphi_1(\bar{u}_0) \times \varphi_2(\bar{u}_0)}{\|\varphi_1(\bar{u}_0) \times \varphi_2(\bar{u}_0)\|} \tag{6.5}$$

se numeşte *versorul normalei* în P la S. Ansamblul $\{P; \frac{\partial}{\partial u^1}|_P, \frac{\partial}{\partial u^2}|_P, \bar{N}(P)\}$ se numeşte *reperul Gauss* al lui S în P.
ii) Dreapta prin P cu vectorul director $\bar{N}(P)$ o numim *normala la S în P*.

În general, reperul Gauss (spre deosebire de reperul Frenet al curbelor) nu este ortonormat şi nici măcar ortogonal; ştim doar că $\bar{N}(P)$ este versor ortogonal pe $\frac{\partial}{\partial u^1}|_P$ şi $\frac{\partial}{\partial u^2}|_P$. Problema ortonormalităţii (ortogonalităţii) acestui reper va fi studiată în Cursul următor. Importante noţiuni topologico-diferenţiale din teoria suprafeţelor sunt date de:

Definiţia 6.11 i) Mulţimea $TS = \cup_{P \in S} T_P S$ a tuturor spaţiilor tangente la S o numim *fibratul tangent al lui S*.
ii) O aplicaţie $X : S \to TS$ cu proprietatea că $X(P) \in T_P S$ pentru orice punct $P \in S$ se numeşte *câmp vectorial tangent la S*; fie $\mathscr{X}(S)$ mulţimea câmpurilor vectoriale tangente.
iii) Numim *câmp vectorial normal la S* o aplicţie $\bar{N}_o : S \to S^2$ cu proprietatea că $\bar{N}_o(P) = \pm\bar{N}(P)$ pentru orice punct $P \in S$.
iv) Suprafaţa S se numeşte *orientabilă* dacă admite un câmp vectorial normal *continuu*; în caz contrar S o numim *neorientabilă*.

Exemple 6.12 i) Aplicaţiile $\frac{\partial}{\partial u^1}|_{(\cdot)}$, $\frac{\partial}{\partial u^2}|_{(\cdot)}$ sunt elemente din $\mathscr{X}(S)$; mai precis din $\mathscr{X}(U)$, considerând în ii) şi domenii de definiţie deschişi $U \subset S$.
ii) (fundamental) *Banda lui Möbius* este suprafaţă neorientabilă:

$$BM : \bar{r}(u, v) = \left((2 - v \sin\frac{u}{2}) \sin u, (2 - v \sin\frac{u}{2}) \cos u, v \cos\frac{u}{2}\right), (u, v) \in \mathbb{R} \times (-1, 1). \tag{6.6}$$

Avem, din periodicitatea funcţiilor trigonometrice: $\bar{r}(u+2\pi, -v) = \bar{r}(u, v)$ şi prin diferenţiere: $\bar{r}_u(u+2\pi, -v) = \bar{r}_u(u, v)$ respectiv: $\bar{r}_v(u+2\pi, -v) = -\bar{r}_v(u, v)$. Prin urmare, $\bar{N}(u+2\pi, -v) = -\bar{N}(u, v)$ şi în particular: $\bar{N}(u + 2\pi, 0) = -\bar{N}(u, 0)$. Să presupunem că există $\bar{N}_o(u, 0) = \varphi(u)\bar{N}(u, 0)$; atunci $\varphi(u + 2\pi) = -\varphi(u)$, în particular $\varphi(2\pi) = -\varphi(0)$. Dar am cerut $\varphi(u) = \pm 1$ şi deci φ nu poate fi continuă; ar trebui să ia atunci şi valoarea zero ceea ce este imposibil!

Observaţii 6.13 i) O suprafaţă orientabilă are exact două "orientări": $\bar{N}_o^1 = +\bar{N}$ respectiv $\bar{N}_o^2 = -\bar{N}$. Deci banda lui Möbius are o singură faţă!
ii) *Criteriu de orientabilitate*: Suprafaţa conexă (adică alcătuită dintr-o singură "bucată") este orientabilă dacă şi numai dacă pentru orice curbă închisă $C : (a, b) \to S$ $(C(a) = C(b))$ şi orice câmp vectorial normal $\bar{N}_o$ de-a lungul lui C avem $\bar{N}_o(a) = \bar{N}_o(b)$!

Exemple 6.14 1) (plane) $\pi : \bar{r}(u, v) = \bar{r}_0 + u\bar{a} + v\bar{b}, (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Avem că $\pi_P S$ este planul prin P generat de vectorii necoliniari $\varphi_1 = \bar{a}$, $\varphi_2 = \bar{b}$ şi deci $\pi_P S = \pi$! $\bar{N}$ este versorul constant $\frac{\bar{a} \times \bar{b}}{\|\bar{a} \times \bar{b}\|}$ al normalei la planul π.
2) (mulţimi deschise din plan) $U : \bar{r}(u, v) = (u, v, 0), (u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$. Avem $\varphi_1 = \bar{i}$, $\varphi_2 = \bar{j}$

şi deci $\pi_P S$ este planul xOy iar $\bar{N} = \bar{k}$ este din nou versor constant.
Mai general, fie $U \subset S$ deschis; din Cursul precedenta vem că şi U este suprafaţă regulată. Fie $P \in U$, atunci $T_P U = T_P S$!
3) (suprafeţe Monge) $S : \bar{r}(u,v) = (u, v, f(u,v)), (u,v) \in U$; deci $P \in S$ generic are coordonatele $(u_0, v_0, f(u_0, v_0))$. Cum $\varphi_1 = (1, 0, f_u)$ respectiv $\varphi_2 = (0, 1, f_v)$ avem ecuaţia planului tangent:

$$\pi_P S : \begin{vmatrix} x - u_0 & y - v_0 & z - f(u_0, v_0) \\ 1 & 0 & f_u(u_0, v_0) \\ 0 & 1 & f_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{6.7}$$

sau, dezvoltând determinantul după prima linie:

$$\pi_P S : -f_u(u_0, v_0)(x - u_0) - f_v(u_0, v_0)(y - v_0) + z - f(u_0, v_0) = 0. \tag{6.8}$$

Versorul normalei este:

$$\bar{N}(P) = \frac{(-f_u(u_0, v_0), -f_v(u_0, v_0, 1))}{\sqrt{1 + f_u^2(u_0, v_0) + f_v^2(u_0, v_0)}}. \tag{6.9}$$

Introducem o nouă clasă remarcabilă de suprafeţe. Mai întâi considerăm următoarea noţiune.

Definiţia 6.15 Fie $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un deschis şi funcţia netedă $F : V \to \mathbb{R}$. Punctul $P \in V$ îl numim *critic pentru* F dacă diferenţiala $dF(P) : T_P\mathbb{R} \to T_{F(P)}\mathbb{R}$ nu este surjectivă. Dacă P este punct critic atunci $F(P)$ se numeşte *valoare critică*. Numărul real $a \in F(V)$ ce nu este valoare critică îl numim *valoare regulată*.

Observaţia 6.16 $P \in V$ este punct critic penru F dacă şi numai dacă $dF(P) = 0 \in \mathbb{R}$ sau echivalent, *gradientul* lui F în P:

$$\nabla F(P) = (F_1(P), ..., F_n(P)) = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}(P), ..., \frac{\partial F}{\partial x^n}(P)\right) \tag{6.10}$$

este vectorul nul.

Dăm fără demonstraţie următorul procedeu de obţinere de suprafeţe regulate:

Teorema 6.17 *Fie $a \in \mathbb{R}$ valoare regulată pentru $F : V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Atunci orice componentă conexă S a mulţimii de nivel $F^{-1}(a)$ este suprafaţă regulată.*

Definiţia 6.18 S o numim *suprafaţă de nivel* a lui F şi relaţia:

$$S : F(x, y, z) = a \tag{6.11}$$

o numim *ecuaţia implicită* a lui S.

Fie punctul $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ oarecare şi $\bar{r} : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ o curbă pe S prin P ca în Definiţia 6.3; deci $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$ pentru orice $t \in I$. Derivăm această relaţie şi facem $t = 0$; obţinem:

$$F_x(P) \cdot x'(0) + F_y(P) \cdot y'(0) + F_z(P) \cdot z'(0) = 0$$

ceea ce spune că $\nabla F(P)$ este versor perpendicular pe $T_P S$ adică:

$$\bar{N}(P) = \frac{\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|}. \tag{6.11}$$

Avem şi:

$$\pi_P S : F_x(P)\cdot(x-x_0)+F_y(P)\cdot(y-y_0)+F_z(P)\cdot(z-z_0)=0. \tag{6.12}$$

Exemplul 6.19 Sfera de rază R centrată în origine este:

$$S(O,R) : x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{6.13}$$

Pentru $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ avem câmpul vectorial gradient $\nabla F=2(x,y,z)$ şi deci F are o singură valoare critică şi anume 0. Cum $R>0$ rezultă că sferele sunt suprafeţe regulate. Fixăm polul nord $N=(0,0,R)$. Cum:

$$\nabla F(N)=2(0,0,R)$$

rezultă:

$$\pi_N S(O,R) : 2R(z-R)=0.$$

În concluzie: $\pi_N S(O,R) : z=R$ ceea ce este în acord cu viziunea geometrică !

SEMINARUL 6

S6.1 Fie S o suprafaţă riglată şi $P(u_0,v_0)\in S$. Atunci $\pi_P S$ conţine generatoarea prin P.

Rezolvare Conform Seminarului anterior vectorul director al generatoarei prin P este: $\bar{b}(u_0)$ iar vectorul normalei este: $\bar{N}(P)=(\bar{a}_u(u_0)+v_0\bar{b}_u(u_0))\times\bar{b}(u_0)$. Cum $\bar{N}(P)\perp\bar{b}(u_0)$ avem concluzia.

S6.2 Se cere planul tangent $\pi_P S$ şi normala la suprafaţa $S : z(x^2+y^2)=1$ în punctul $P(1,1,\frac{1}{2})$.

Rezolvare Observăm mai întâi că $P\in S$. Cu notaţia din Curs: $F(x,y,z)=z(x^2+y^2)$, avem $\nabla F=(2xz,2yz,x^2+y^2)$ şi deci $\bar{N}(P)=\nabla F(P)=(1,1,2)$ adică normala: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{2z-1}{4}$. Obţinem $\pi_P S : x+y+2z-3=0$.

S6.3 Aceeaşi cerinţă pentru suprafaţa S cu parametrizarea globală $\bar{r}(u,v)=(\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2},\frac{u^3+v^3}{u^2+v^2},\frac{uv-1}{u^2+v^2})$ în punctul $P(u=1,v=1)$.

Rezolvare Avem $P(0,1,0)$ şi:

$$\bar{r}_u=\left(\frac{4uv^2}{u^2+v^2},\frac{u(u^3+3uv^2-2v^3)}{(u^2+v^2)^2},\frac{-u^2v+2u+v^3}{(u^2+v^2)^2}\right)$$

$$\bar{r}_v=\left(\frac{-4u^2v}{(u^2+v^2)},\frac{v(v^3+3u^2v-u^3)}{(u^2+v^2)^2},\frac{-uv^2+2v+u^3}{(u^2+v^2)^2}\right)$$

de unde rezultă: $\bar{r}_u(P)=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\bar{r}_v(P)=(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Prin urmare:

$$\pi_P S : \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=0$$

adică: $\pi_P S : y-z-1=0$. Rezultă că axa Ox este paralelă cu $\pi_P S$! Normala este: $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$.

S6.4 Se consideră curba C de intersecţie a suprafeţelor $S_1 : x^2+y^2+z^2 = 3$ (sferă centrată în origine), $S_2 : 2x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ (con cu vârful în origine). Se cere dreapta tangentă în $P(1, 1, 1)$ la C.

Rezolvare Observăm mai întî că $P \in C = S_1 \cap S_2$; deci tangenta căutată este $d_P C = \pi_P S_1 \cap \pi_P S_2$. Fie $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ şi $F_2(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2$. Avem:

$$\nabla F_1 = 2(x, y, z), \quad \nabla F_2 = 2(2x, y, -3z)$$

şi deci (până la un factor de proporţionalitate) avem: $\nabla F_1(P) = (1, 1, 1)$, $\nabla F_2(P) = (2, 1, -3)$. Rezultă: $\pi_P S_1 : x + y + z - 3 = 0$, $\pi_P S_2 : 2x + y - 3z = 0$ de unde avem concluzia:

$$d_P C : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

Altfel: vectorul director al dreptei tangente este $\nabla F_1(P) \times \nabla F_2(P) = (-4, 5, -1)$ şi deci $d_P C : \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{-1}$.

S6.5 Să se arate că suprafaţa S având parametrizarea globală $\bar{r}(u, v) = (u \cos v + \sin v, u \sin v - \cos v, u - v), (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ este regulată şi se cere $\pi_P S$ cu $P(u = \frac{\pi}{3}, v = 0)$.

Rezolvare Avem: $\bar{r}_u = (\cos v, \sin v, 1)$ şi $\bar{r}_v = (-u \sin v+\cos v, u \cos v+\sin v, -1)$ respectiv $\bar{r}_u \times \bar{r}_v = (-u \cos v - 2 \sin v, -u \sin v + 2 \cos v, u)$. Cum $\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|^2 = 2u^2 + 4 > 0$ avem regularitatea lui S. Obţinem: $\pi_P S : \pi x - 6y - \pi z - 6 = 0$ deoarece avem $P(\frac{\pi}{3}, -1, \frac{\pi}{3})$.

S6.6 Se dă funcţia netedă $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi suprafaţa Monge $S : z = x\varphi(\frac{y}{x})$ cu $x \neq 0$. Să se arate că toate planele tangente $\pi_P S$ trec prin origine.

Rezolvare Dacă P are coordonatele carteziene (x_0, y_0, z_0) atunci pentru o suprafaţă Monge avem formula (6.8). Obţinem $\pi_P S : [\varphi(\frac{y_0}{x_0}) - \frac{y_0}{x_0}\varphi'(\frac{y_0}{x_0})]x + \varphi'(\frac{y_0}{x_0})y - z = 0$. Avem că $(0, 0, 0)$ satisface această ecuaţie.

S6.7 Pentru S cu parametrizarea globală $\bar{r}(u, v) = (ue^v, ue^{-v}, 4uv)$ se cere $\pi_P S$ şi normala în $P(u = 2, v = 0)$.

Rezolvare Din:

$$\pi_P S : \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

rezultă: $\pi_P S : 2x - 2y - z = 0$. Normala este: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$.

S6.8 Pentru S cu parametrizarea globală $\bar{r}(u, v) = (u+v, u-v, uv)$ se cere $\pi_P S$ şi normala în $P(u = 2, v = 1)$.

Rezolvare Din:

$$\pi_P S : \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

rezultă: $\pi_P S : 3x - y - 2z - 4 = 0$. Normala este: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$.

S6.9 Pentru S cu parametrizarea globală $\bar{r}(u, v) = (u, u^2 - 2uv, u^3 - 3u^2v)$ se cere $\pi_P S$ şi normala în $P(1, 3, 4)$.

Rezolvare Avem că $P \in S$ având coordonatele: $u = 1$, $v = -1$. Din:

$$\pi_P S : \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-4 \\ 1 & 4 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

rezultă: $\pi_P S : 6x + 3y - 2z - 7 = 0$. Normala este: $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{-2}$.

S6.10 Pentru S cu parametrizarea globală $\bar{r}(u,v) = (2u - v, u^2 + v^2, u^3 - v^3)$ se cere $\pi_P S$ şi normala în $P(3,5,7)$.

Rezolvare Avem că $P \in S$ având coordonatele: $u = 2$, $v = 1$. Din:

$$\pi_P S : \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-7 \\ 1 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

rezultă: $\pi_P S : 18x + 3y - 4z - 41 = 0$. Normala este: $\frac{x-3}{18} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-4}$.

S6.11 Se cere $\pi_P S$ şi normala la suprafeţele următoare în punctul indicat:
i) $S : z = x^3 + y^3$, $P(1,2,9)$, ii) $S : x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$, $P(3,1,-1)$,
iii) $S = E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $P(x_0, y_0, z_0)$.

Rezolvare i) Avem $F(x,y,z) = x^3 + y^3 - z$ cu câmpul gradient $\nabla F(x,y,z) = (3x^2, 3y^2, -1)$, deci $\nabla F(P) = (3, 18, -1)$. Rezultă: $\pi_P S : 3x + 12y - z - 18 = 0$ şi normala $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-9}{-1}$.
ii) Avem $F(x,y,z) = x^2 - 2y^2 - 3z^2$ cu câmpul gradient $\nabla F(x,y,z) = (2x, -4y, -6z)$. Deci $\frac{1}{2}\nabla F(P) = (3, -2, 3)$ de unde rezultă: $\pi_P S : 3x - 2y + 3z - 4 = 0$ şi normala $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$.

Reamintim procedeul dedublării în punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ aparţinând unei cuadrice:

$$x^2 \to x_0 x, y^2 \to y_0 y, z^2 \to z_0 z, x \to \frac{1}{2}(x + x_0), y \to \frac{1}{2}(y + y_0), z \to \frac{1}{2}(z + z_0).$$

Suprafaţa dată este o cuadrică şi deci planul tangent într-un punct generic este: $\pi_P S : x_0 x - 2y_0 y - 3z_0 z - 4 = 0$.

iii) Cu dedublarea avem $\pi_P S : \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1 = 0$.

Cursul 7

Forma I-a fundamentală

Reamintim că în Cursul precedent am introdus, în fiecare punct al unei suprafeţe regulate scufundate, reperul Gauss şi problema care se pune în acest moment este caracterizarea ortonormalităţii (ortogonalităţii) acestui reper. În vederea soluţionării acestei chestiuni reamintim pe scurt câteva noţiuni de bază ale algebrei liniare.

Definiţia 7.1 Fie V un spaţiu vectorial real şi aplicaţia $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Atunci g se numeşte:
i) *formă biliniară* dacă: $g(\lambda x+\mu y, z) = \lambda g(x, z)+\mu g(y, z)$ şi $g(x, \lambda y+\mu z) = \lambda g(x, y)+\mu g(x, z)$ pentru orice $x, y, z \in V$ şi orice scalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
ii) *simetrică* dacă: $g(x, y) = g(y, x)$ pentru orice vectori $x, y \in V$,
iii) *pozitiv definită* dacă: $g(x, x) \geq 0$ pentru orice $x \in V$ şi $g(x, x) = 0$ implică x=vectorul nul din V,
iv) *produs scalar* dacă este formă biliniară simetrică şi pozitiv definită.

Exemplul 7.2 (fundamental) Fie $V = \mathbb{R}^n$ şi $<,>_e$ *produsul scalar euclidian*:

$$< x = (x^1, ..., x^n), y = (y^1, ..., y^n) >_e = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i. \tag{7.1}$$

Putem scrie matriceal:

$$< x, y >_e = x^t \cdot I_n \cdot y \tag{7.2}$$

unde $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ este *matricea unitate de ordin* n iar vectorii x, y sunt gândiţi ca vectori **coloană**!

Presupunem în cele ce urmează că V are dimensiunea $n \geq 2$ şi notăm acest fapt prin V_n. Fixăm o bază: $B = \{e_1, ..., e_n\}$.

Definiţia 7.3 Baza B se numeşte:
i) *ortogonală* dacă $g(e_i, g_j) =$ dacă $i \neq j$; altfel spus, vectorii din B sunt *ortogonali* doi câte doi,
ii) *ortonormată* dacă $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$; deci B este o bază ortogonală formată din versori.

Această definiţie ne conduce la introducerea matricii $g_B = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ dată de: $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Avem atunci caracterizarea:
-B este ortogonală dacă şi numai dacă elementele lui g_B din afara diagonalei principale sunt nule,
-B este ortonormată dacă şi numai dacă $g_B = I_n$.

Să considerăm acum o altă bază: $\tilde{B} = (\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)$ şi fie descompunerile: $\tilde{e}_i = s_i^j e_j$ pentru $i = 1, ..., n$. Obţinem astfel o matrice $S = (s_i^j) \in M_n(\mathbb{R})$ şi notăm: $\tilde{B} = S(B)$. Se arată imediat că S este inversabilă i.e. $S \in GL(n, \mathbb{R})$=*n-grupul liniar general*=$\{A \in M_n(\mathbb{R}); \det A \neq 0\}$, şi avem: $B = S^{-1}(\tilde{B})$.

Vrem relaţia dintre g_B şi $g_{\tilde{B}}$. Avem:

$$\tilde{g}_{ij} = g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = g(s_i^a e_a, s_j^b e_b) = s_i^a g_{ab} s_j^b \tag{7.3}$$

sau global:

$$g_{\tilde{B}} = S^t \cdot g_B \cdot S \tag{7.4}$$

şi relaţia (7.3) spune că ansamblul de numere reale (g_{ij}) este un *tensor de tip* $(0, 2)$ pe V_n.

Prin urmare, dacă B este ortonormată atunci $\tilde{B}$ va fi bază ortonormată dacă şi nuami dacă:

$$S^t \cdot S = I_n. \tag{7.5}$$

Suntem astfel conduşi la introducerea *n-grupului ortogonal*:

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A^t \cdot A = A \cdot A^t = I_n\} \tag{7.6}$$

care este subgrup în $GL(n, \mathbb{R})$. În concluzie:
-schimbarea bazelor generale se face cu matrici din $GL(n, \mathbb{R})$,
-schimbarea bazelor ortonormate se face cu matrici din $O(n)$.

Revenim acum la suprafaţa parametrică regulată S şi fixăm punctul generic $P(\bar{r}_0) \in S$; deci avem o parametrizare locală (U, φ) a lui S în jurul lui P; fie $\bar{u}_0 = \varphi^{-1}(P) = \varphi^{-1}(\bar{r}_0)$. În Cursul precedent am introdus *spaţiul tangent la S în P* ce este subspaţiu vectorial (2-dimensional) în $T_P\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$. Prin restricţie de la $T_P\mathbb{R}^3$ la T_PS putem introduce o noţiune principală în teoria suprafeţelor:

Definiţia 7.4 Numim *forma I-a fundamentală* a lui S setul de produse scalare indexate de punctele lui S:

$$I = \{<, >_P |_{T_PS}; P \in S\}. \tag{7.6}$$

Altfel spus, I este o aplicaţie:

$$I : P \in S \to I(P) : T_PS \times T_PS \to \mathbb{R}, I(P) =<, >_P |_{T_PS}. \tag{7.7}$$

Reamintim că T_PS admite, relativ la parametrizarea fixată (U, φ), o bază canonică $\{\frac{\partial}{\partial u^i}|_P = d\varphi(\bar{u}_0)(\bar{e}_i); i = 1, 2\}$ cu $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^2$; sau încă:

$$\frac{\partial}{\partial u^i}|_P = \varphi_i(\bar{u}_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(\bar{u}_0). \tag{7.8}$$

Fie $X, Y \in T_PS$ oarecare. Avem deci: $X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}|_P$ şi $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}|_P$. Din punct de vedere calculatoriu avem:

$$I(P)(X, Y) =< X^i \varphi_i(\bar{u}_0), Y^j \varphi_j(\bar{u}_0) >_e$$

şi din biliniaritate şi simetrie avem:

$$I(P)(X, Y) = X^i g_{ij}(P) Y^j \tag{7.9}$$

unde $g(P) = (g_{ij}(P)) \in M_2(\mathbb{R})$ este *matricea formei I-a fundamentale*. Rezultă că putem scrie (7.9) matriceal:

$$I(P)(X,Y) = X^t \cdot g(P) \cdot Y \tag{7.10}$$

reamintind că vectorii tangenţi $X, Y \in TPS$ sunt gânditi pe **coloană**. Altfel spus, avem:

$$I(P)(X,Y) = \begin{pmatrix} X^1(P) & X^2(P) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11}(P) & g_{12}(P) \\ g_{21}(P) & g_{22}(P) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^1(P) \\ Y^2(P) \end{pmatrix}. \tag{7.11}$$

Avem dependenţa de P a funcţiilor $g_{ij} : S \to \mathbb{R}$ unde:

$$g_{ij}(P) =< \varphi_i(\bar{u}_0), \varphi_j(\bar{u}_0) >_e . \tag{7.12}$$

Mai precis, funcţiile *coeficienţi* ai formei I-a fundamentale sunt:

$$\boxed{\begin{cases} g_{11} =< \varphi_1, \varphi_1 >_e = \|\varphi_1\|^2 \\ g_{12} = g_{21} =< \varphi_1, \varphi_2 >_e \\ g_{22} =< \varphi_2, \varphi_2 >_e = \|\varphi_2\|^2 \end{cases}} \tag{7.13}$$

unde am folosit deja simetria lui $g(P)$ ca fiind matrice asociată unui produs scalar:

$$(g(P))^t = g(P). \tag{7.14}$$

Pozitiva definire a a lui g se traduce prin:
$=X^t \cdot g \cdot X \geq 0$ pentru orice $X \in T_PS$,
-$X^t \cdot g \cdot X = 0$ implică X=vectorul nul din T_PS=$0 \cdot \varphi_1(\bar{u}_0) + 0 \cdot \varphi_2(\bar{u}_0)$.
Formula (7.10) spune că putem gândi forma I-a fundamentală ca aplicaţie matriceal-valuată:

$$I : P \in S \to I(P) = g(P) \in M_2(T_PS). \tag{7.15}$$

Există câteva notaţii tradiţionale, prima fiind atribuită chiar lui Gauss cel care a dezvoltat enorm teoria clasică a suprafeţelor:

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = g_{21} = F, \quad g_{22} = G \tag{7.16}$$

sau încă:

$$I = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \tag{7.17}$$

O altă proprietate remarcabilă a matricei g derivă din *identitatea Lagrange* a calculului vectorial:

$$< \bar{a}, \bar{a} >< \bar{b}, \bar{b} > - < \bar{a}, \bar{b} >^2 = \|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 \tag{7.18}$$

care este consecinţa relaţiei fundamentale: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Cu $\bar{a} = \varphi_1(\bar{u}_0)$ şi $\bar{b} = \varphi_2(\bar{u}_0)$ obţinem:

$$\det g(P) = E(P)G(P) - F(P)^2 = \|\varphi_1(\bar{u}_0) \times \varphi_2(\bar{u}_0)\|^2 > 0 \tag{7.19}$$

stricta pozitivitate fiind deci consecinţă a regularităţii lui S mai precis a ipotezei de imersie asupra aplicaţiei φ. Deci $g(P)$ este matrice inversabilă iar inversa sa o notăm:

$$g^{-1} = (g^{ij})_{i,j=\overline{1,2}} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \tag{7.20}$$

unde pentru simplitatea scrierii am renunţat la precizarea punctului P. Prin calcul se verifică imediat:

Propoziţia 7.5 i) *Funcţiile* $g_{ij}, g^{ij} : U \to \mathbb{R}$ *sunt netede pentru toţi* $i, j \in \{1, 2\}$.
ii) *Pentru orice câmpuri vectoriale* $X, Y \in \mathscr{X}(U)$ *aplicaţia*
$(u, v) : U \to g(X, Y)(u, v) = g_{ij}(u, v)X^i(u, v)Y^j(u, v) \in \mathbb{R}$ *este netedă.*

În continuare studiem comportarea formei I-a fundamentale la o schimbare de parametrizări locale pe S în jurul lui P. Fie deci o nouă parametrizare locală $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ a lui S în jurul lui P şi corespunzător $\tilde{u}_0 = (\tilde{\varphi})^{-1}(P)$. Mulţimea $V = \varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ este deschisă în $\mathbb{R}^3$ dar inclusă în S şi conţine pe P. Fie $h = (\varphi)^{-1} \circ \tilde{\varphi} : \tilde{\varphi}^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^2 \to \varphi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^2$. Această aplicaţie, numită *schimbare de parametrizări*, este netedă fiind compunerea a două aplicaţii netede, satisface $h(\tilde{u}_0) = \bar{u}_0$ şi are exprimarea de ecuaţii:

$$h : u^a = u^a(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), 1 \leq a \leq 2. \tag{7.21}$$

Avem: $\tilde{\varphi} = \varphi \circ h$ şi deci:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i}|_P = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{u}_0) = \frac{\partial \varphi \circ h}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{u}_0) = \frac{\partial u^a}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{u}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial u^a}|_P \tag{7.22}$$

ceea ce spune că elementele bazei $\{\frac{\partial}{\partial u^1}|_P, \frac{\partial}{\partial u^2}|_P\}$ sunt *câmpuri tensoriale pe* U *de tip* $(1, 0)$.

Relativ la forma I-a fundamentală avem:

$$\tilde{g}_{ij}(P) =< \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i}|_P, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j}|_P >_e =< \frac{\partial u^a}{\partial \tilde{u}^i}\frac{\partial}{\partial u^a}|_P, \frac{\partial u^b}{\partial \tilde{u}^j}\frac{\partial}{\partial u^b}|_P >_e = \frac{\partial u^a}{\partial \tilde{u}^i} g_{ab}(P) \frac{\partial u^b}{\partial \tilde{u}^j} \tag{7.23}$$

ceea ce spune că setul de funcţii $(g_{ij}(\cdot))$ este un *câmp tensorial de tip* $(0, 2)$ pe U.

SEMINARUL 7

Se cere forma I-a fundamentală pentru următoarele suprafeţe S cu parametrizări globale:
S7.1 de la S6.5.

Rezolvare $E = 2$, $F = 0$, $G = u^2 + 2$.

S7.2 planul determinat de punctul $P_0(\bar{r}_0)$ şi vectorii necoliniari $\bar{a}$, $\bar{b}$.

Rezolvare Din $\pi : \bar{r}(u, v) = \bar{r}_0 + u\bar{a} + v\bar{b}$ rezultă $\bar{r}_u = \bar{a}$, $\bar{r}_v = \bar{b}$. Deci: $E = \|\bar{a}\|^2$, $F =< \bar{a}, \bar{b} >$, $G = \|\bar{b}\|^2$. Putem cu procedeul Gram-Schmidt să alegem o bază ortonormată în π şi deci $E = G = 1$, $F = 0$.

S7.3 *suprafaţa Enneper* $S : \bar{r}(u, v) = (3u + 3uv^2 - u^3, 3v + 3u^2v - v^3, 3(u^2 - v^2))$.

Rezolvare Avem $\bar{r}_u = 3(1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u)$, $\bar{r}_v = 3(2uv, 1 + u^2 - v^2, -2v)$. Deci: $E = G = 9(1 + u^2 + v^2)^2$, $F = 0$.

S7.4 *elicoidul* $S : \bar{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, hv)$ cu $h > 0$ o constantă.

Rezolvare $\bar{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\bar{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, h)$, $E = 1$, $F = 0$, $G = u^2 + h^2$.

S7.5 suprafaţă Monge $S : z = f(x, y)$ folosind notaţiile: $p = f_x, q = f_y, r = f_{xx}, s = f_{xy}, z = f_{yy}$.

Rezolvare $\bar{r}_u = (1, 0, p), \bar{r}_v = (0, 1, q), E = 1 + p^2, F = pq, G = 1 + q^2$.

S7.6 *paraboloidul hiperbolic* $S : z = xy$ sau încă $P_h : \bar{r}(u,v) = (u, v, uv)$.

Rezolvare $p = y, q = x, E = 1 + y^2, F = xy, G = 1 + x^2$. În a doua parametrizare: $E = 1 + v^2$, $F = uv$, $G = 1 + u^2$.

S7.7 $S : \bar{r}(u,v) = (a(\cos u - v \sin u), a(\sin u + v \cos u), b(u + v))$ cu $a, b > 0$.

Rezolvare $\bar{r}_u = (-a(\sin u + v \cos u), a(\cos u - v \sin u), b), \bar{r}_v = (-a \sin u, a \cos v, b)$. Deci: $E = a^2(1 + v^2) + b^2$ şi $F = G = a^2 + b^2$.

S7.8 Se cere forma I-a fundamentală a următoarele suprafeţe de rotaţie; a se vedea exerciţiul S9.7 pentru expresia generală:

1) *sfera de rază* R *centrată în origine* $S(O, R)$: $\bar{r}(u,v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v)$.

Semnificaţia geometrică a coordonatelor: u=longitudinea iar v=latitudinea ! Avem $(u,v) \in U = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

2) *elipsoidul* $El : \bar{r}(u,v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, b \sin v)$; $El : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$.

3) *hiperboloidul cu o pânză* $H1 : \bar{r}(u,v) = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, b \sinh u)$.

4) *hiperboloidul cu două pânze* $H2 : \bar{r}(u,v) = (a \sinh u \cos v, a \sinh u \sin v, b \cosh u)$.

5) *paraboloidul eliptic* $P_e : \bar{r}(u,v) = (u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{2p})$ cu $p > 0$; $P_e : x^2 + y^2 - 2pz = 0$.

Rezolvare 1) $E = R^2 \cos^2 v$, $F = 0$, $G = R^2$, 2) $E = a^2 \cos^2 v$, $F = 0$, $G = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v$,
3) $E = a^2 \sinh^2 u + b^2 \cosh^2 u$, $F = 0$, $G = a^2 \cosh^2 u$; $H1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$,
4) $E = a^2 \cosh^2 u + b^2 \sinh^2 u$, $F = 0$, $G = a^2 \sinh^2 u$; $H2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} + 1 = 0$,
5) $E = 1 + \frac{u^2}{p^2}$, $F = 0$, $G = u^2$.

Cursul 8

Geometria intrinsecă a unei suprafeţe

Fixăm $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă regulată şi o parametrizare locală (U, φ) pe S. În Cursul precedent am introdus forma I-a fudamentală I având coeficienţii $(g_{11}(u,v), g_{12}(u,v), g_{22}(u,v)) = (E(u,v), F(u,v), G(u,v))$ în fiecare pucnt $P(\varphi(\bar{u})) \in \varphi(U) \subseteq S$, $\bar{u} = (u,v) = (u^1, u^2) = (u^i)_{i=1,2} \in U$.

Definiţia 8.1 O proprietate *intrinsecă* a lui S este o proprietate ce depinde doar de coeficienţii (g_{ij}) (şi derivatele lor parţiale în raport cu parametrii u, v). Totalitatea proprietăţilor intrinseci ale lui S constituie *geometria intrinsecă* a lui S.

Dedicăm acest Curs studierii câtorva proprietăţi intrinseci.

I. Lungimea unui arc de curbă pe S

Fie C o curbă în spaţiu, $C : \bar{r} = \bar{\rho}(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Presupunem că există un arc $[a,b] \subseteq I$ aşa încât $\bar{\rho}([a,b]) \subset \varphi(U) \subseteq S$. Fie $C_\varphi = \varphi^{-1} \circ \bar{\rho}$.

Curbă $C_\varphi : \bar{r} = \varphi^{-1} \circ \bar{\rho}(t), t \in [a,b]$ eset o curbă pe U deci o curbă plană. Prin urmare avem $C_\varphi : u = u(t), v = v(t), t \in [a,b]$ sau încă $C_\varphi : u^i = u^i(t), t \in [a,b], i = 1,2$. Cum $C = \varphi \circ C_\varphi$ rezultă că C are ecuaţia vectorială $C : \bar{r} = \varphi(u(t), v(t)) = \varphi(u^1(t), u^2(t)), t \in [a,b]$ şi deci vectorul tangent într-un punct generic $P(u(t), v(t)) \in \varphi(U) \subseteq S$ este:

$$\bar{r}'(t) = \varphi_1(P)u'(t) + \varphi_2(P)v'(t) = u'(t)\varphi_1(P) + v'(t)\varphi_2(P). \tag{8.1}$$

Pentru a folosi formula (1.6) a lungimii unui arc de curbă a lui C avem nevoie de norma acestui vector şi cu formulele din Cursul precedent rezultă:

$$\|\bar{r}'(t)\|^2 = <\bar{r}'(t), \bar{r}'(t)> = g_{11}(P)(u'(t))^2 + 2g_{12}(P)u'(t)v'(t) + g_{22}(P)(v')^2. \tag{8.2}$$

Avem atunci:

Propoziţia 8.2 *Lungimea arcului de curbă $[a,b]$ al curbei $C \subset S$ este:*

$$L(C|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(u(t), v(t))\frac{du^i}{dt}(t)\frac{du^j}{dt}(t)} =$$

$$= \int_a^b \sqrt{E(u(t),v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t),v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t),v(t))(v'(t))^2}. \tag{8.3}$$

Exemple 8.3 Considerăm liniile parametrice pe S:
i) $C_{u_0} : u = u_0, v = v(t) = v_0 + t, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Avem:

$$L(C_{u_0}|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}) = \int_a^b \sqrt{g_{22}(u_0, v_0 + t)}v'(t)dt. \tag{8.4}$$

ii) $C_{v_0} : u = u(t) = u_0 + t, v = v_0, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Avem:

$$L(C_{v_0}|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}) = \int_a^b \sqrt{g_{11}(u_0 + t, v_0)}dt. \tag{8.5}$$

II. Unghiul dintre două curbe pe S

Fie curbele pe S, $C_a : u = u_a(t), v = v_a(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}$ cu $a \in \{1, 2\}$ şi punctul lor comun P corespunzător lui $t_0 \in I$. Considerăm θ unghiul dintre tangenta $T_1(t_0)$ la C_1 în P şi tangenta $T_2(t_0)$ la C_2 în P. Ştim că unghiul dintre doi vectori nenuli este caracterizat de cosinusul său prin intermediul formulei:

$$\cos\theta = \frac{< T_1(t_0), T_2(t_0) >}{\|T_1(t_0)\|\|T_2(t_0)\|}. \tag{8.6}$$

Deoarece: $T_a(t_0) = u'_a(t)\varphi_1(P) + v'_a(t)\varphi_2(P)$ rezultă:

Propoziţia 8.4 *Unghiul dintre cele două curbe pe S în punctul lor comun este dat de*:

$$\cos\theta = \frac{E(P)u'_1(t_0)u'_2(t_0) + F(P)(u'_1(t_0)v'_2(t_0) + u'_2(t_0)v'_1(t_0)) + G(P)v'_1(t_0)v'_2(t_0)}{\sqrt{E(u'_1(t_0))^2 + 2Fu'_1(t_0)v'_1(t_0) + G(v'_1(t_0))^2}\sqrt{E(u'_2(t_0))^2 + 2Fu'_2(t_0)v'_2(t_0) + G(v'_2(t_0))^2}} \tag{8.7}$$

unde, şi la numitor, coeficienţii E, F, G sunt calculaţi tot în P.

Exemplul 8.5 Fie curbele de coordonate de la Exemplele 8.3 şi punctul lor comun $P(u_0, v_0)$. Avem: $(u'_1, v'_1) = (0, 1)$ respectiv $(u'_2, v'_2) = (1, 0)$ şi deci:

$$\cos\theta = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}. \tag{8.8}$$

Rezultă că liniile parametrice ale lui S sunt ortogonale într-un punct al lui S dacă şi numai dacă F se anulează în acel punct.

Mai general, reperul Gauss în $P \in S$ este: i) ortogonal dacă şi numai dacă $F(P) = 0$, ii) ortonormat dacă şi numai dacă $g(P) = I_2$.

III. Aria unui compact pe S

Fie $D \subseteq S$ o mulţime compactă (deci închisă şi mărginită). Folosind teoria integralei duble de la Cursul de Analiză Matematică se arată imediat că *aria* lui D este:

$$A(S) = \int\int_D \sqrt{\det g(u, v)}dudv. \tag{8.9}$$

Prin urmare:

$$A(D) = \int\int_D \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}dudv. \tag{8.10}$$

Izometrii

Definiţia 8.6 Fie $f : S \to \mathbb{R}$ şi $P \in S$. Spunem că f este *netedă în* P dacă există o parametrizare locală (U, φ) a lui S în jurul lui P astfel încât funcţia $f_\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_\varphi = f \circ \varphi$ este netedă. f se numeşte *netedă* dacă este netedă în orice punct din S.

Fie $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ o altă parametrizare a lui S în jurul lui P. Fie $V = \varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{(U)})$. V este mulţime deschisă fiind intersecţia a doi deschişi şi conţine pe P deci este nevidă. Fie aplicaţia:

$$h : \tilde{\varphi}^{-1}(V) \subseteq \tilde{(U)} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \varphi^{-1}(V) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^2, h = \varphi \circ \tilde{\varphi} \tag{8.11}$$

numită *schimbarea de parametrizări locale pe* S.

Propoziţia 8.7 *h este difeomorfism de la $\tilde{\varphi}^{-1}(V)$ la $\varphi^{-1}(V)$.*

Demostraţie h este bijecţie cu $h^{-1} = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$. Mai mult, din expresiile lor rezultă că h şi h^{-1} sunt netede deoarece φ şi $\tilde{\varphi}$ cu inversele lor sunt netede. $\square$

Avem: $f_\varphi = f \circ \varphi$, $f_{\tilde{\varphi}} = f \circ \tilde{\varphi} = f \circ 1_{\mathbb{R}^2} \circ \tilde{\varphi} = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} = f_\varphi \circ h$. Prin urmare, f_φ este netedă dacă şi numai dacă $f_{\tilde{\varphi}}$ este netedă ceea ce arată că noţiunea introdusă în Definiţia 8.6 nu depinde de parametrizarea locală aleasă !

Fie $F : S_1 \to S_2$ o aplicaţie între două suprafeţe şi $P \in S_1$ fixat.

Definiţia 8.8 F se numeşte *netedă în* P dacă există o parametrizare locală (U, φ) a lui S_1 în jurul lui P şi există o parametrizare locală (V, ψ) a lui S_2 în jurul lui $F(P)$ cu $F(\varphi(U)) \subseteq \psi(V)$ astfel încât funcţia $F_{\varphi,\psi} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \subseteq \mathbb{R}^2$, $F_{\varphi,\psi} = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ este netedă.

Fie $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ o altă parametrizare locală a lui S_1 în jurul lui P şi $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ o altă parametrizare locală a lui S_2 în jurul lui $F(P)$. Ca mai sus avem schimbările de parametrizări locale:

$$h_1 = \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}, \quad h_2 = \psi^{-1} \circ \tilde{\psi} \tag{8.12}$$

respectiv expresia lui F în cele două perechi de parametrizări:

$$F_{\varphi,\psi} = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi, \quad F_{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}} = \tilde{\psi}^{-1} \circ F \circ \tilde{\varphi}. \tag{8.13}$$

Avem:

$$F_{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}} = \tilde{\psi}^{-1} \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ F \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} = h_2^{-1} \circ F_{\varphi,\psi} \circ h_1$$

ceea ce arată că $F_{\varphi,\psi}$ este netedă dacă şi numai dacă $F_{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}}$ este netedă. Prin urmare, noţiunea din Definiţia 8.8 nu depinde de parametrizări locale !

Avem:

$$F_{\varphi,\psi} : \tilde{u} = F^1(u, v), \quad \tilde{v} = F^2(u, v). \tag{8.14}$$

Presupunem în continuare că F este netedă în P şi considerăm, ca în Cursul 6, o curba pe S_1 prin acest punct, $C : u = u(t), v = v(t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, deci $u(0) = u_0$ şi $v(0) = v_0$. Ştim că $T_P S_1$ este mulţimea tangentelor $\{u'(0)\varphi_1(P) + v'(0)\varphi_2(P)\}$ în P la toate aceste curbe.

Definiţia 8.9 *Diferenţiala* lui F în P este aplicaţia $dF_P : T_P S_1 \to T_{F(P)} S_2$ dată de:

$$dF_P(u'(0), v'(0)) = (\frac{d}{dt} F^1(u(t), v(t)), \frac{d}{dt} F^2(u(t), v(t)))|_{t=0}. \tag{8.15}$$

Putem gândi şi vectorial; dacă $C : \bar{r} = \bar{r}(t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ este ecuaţia lui C privită în spaţiul $\mathbb{R}^3$ atunci:

$$dF_P(\bar{r}'(0)) = (F \circ \bar{r})'(0) \tag{8.16}$$

unde şi f este gândită în spaţiul ambient $f:(x,y,z)\in S_1\subset\mathbb{R}^3\to(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\in S_2\subset\mathbb{R}^3$.

Proprietăţi ale diferenţialei 8.10
i) este transformare liniară:

$$dF_P(\lambda X+\mu Y)=\lambda dF_P(X)+\mu dF_P(Y).$$

ii) (regula lanţului) dacă S_3 este o a treia suprafaţă şi avem $G:S_2\to S_3$ netedă atunci:

$$d(G\circ F)_P=dG_{F(P)}\circ dF_P. \tag{8.17}$$

Definiţia 8.11 i) $F:S_1\to S_2$ se numeşte *difeomorfism* dacă este bijecţie şi F,F^{-1} sunt netede în orice punct. În acest caz, spunem că S_1 şi S_2 sunt *difeomerfe.*
ii) F se numeşte *izometrie în* P dacă este netedă în P şi invariază formele I-a fundamentale adică:

$$I_2(F(P))(dF_P(X),dF_P(Y))=I_1(P)(X,Y) \tag{8.18}$$

pentru orice $X,Y\in T_PS_1$.
iii) F se numeşte *izometrie locală* dacă pentru orice $P\in S_1$ există un deschis D pe S_1 cu $P\in D$ aşa încât F este izometrie în orice punct din D. F se numeşte *izometrie* dacă este izometrie locală şi difeomorfism.
iv) Suprafeţele S_1, S_2 se numesc *izometrice* dacă există o izometrie între ele.
v) Mulţimea $Izom(S)$ a izometriilor suprafeţei S constituie grup în raport cu operaţai de compunere a funcţiilor. $Izom(S)$ se numeşte *grupul izometriilor* lui S.

Observaţii 8.12 i) $Izom(S)$ este mulţime nevidă deoarece aplicaţia identică 1_S este izometrie. Diferenţiala sa este: $d(1_S)_P=1_{T_PS}$.
ii) $Izom(xOy)$ este exact $Izom(2)$ din Definiţia 3.3.
iii) Dat $A\in O(3)$ aplicaţia liniară asociată $T_A:x\in\mathbb{R}^3\to A\cdot x\in\mathbb{R}^3$ se restricţionează la o izometrie a lui S^2. Reciproc, dacă $f\in Izom(S^2)$ atunci există $A=A_f\in O(3)$ aşa încât $f=T_A$.

Exemplu 8.13 Fie S_1 planul xOy şi S_2 cilindrul $x^2+y^2=1$. Considerăm $F:S_1\to S_2$, $F(x,y,0)=(\cos x,\sin x,y)$. Avem că F este netedă în orice punct din S_1. Mai mult, F este izometrie locală deoarece S_1 şi S_2 au aceeaşi formă fundamentală $g=I_2$. Dar F nu este izometrie globală deoarece nu este injectivă !

SEMINARUL 8

S8.1 Pe suprafaţa (paraboloid) $S:x^2+y^2=2\rho z$ se dau curbele $C_1:x=y$, $C_2:z=a$ unde ρ şi a sunt constante reale strict pozitive. Se cere unghiul θ dintre curbe.

Rezolvare Parametrizăm suprafaţa $S:\bar{r}(u,v)=(u,v,\frac{1}{2\rho}(u^2+v^2))$ şi obţinem: $E=1+\frac{u^2}{\rho^2}$, $F=\frac{uv}{\rho^2}$, $G=1+\frac{v^2}{\rho^2}$. Punctul de intersecţie al curbelor este $P(\sqrt{\rho a},\sqrt{\rho a},a)$ şi deci $C_1:u_1(t)=v_1(t)=t+\sqrt{\rho a}$. Pentru a doua curbă din $u^2(t)+v^2(t)=2\rho a$ şi $u(0)=v(0)=\sqrt{\rho a}$ rezultă parametrizarea $C_2:u_2(t)=\sqrt{2\rho a}\cos(\frac{\pi}{4}-t),v_2(t)=\sqrt{2\rho a}\sin(\frac{\pi}{4}-t)$. Avem deci derivatele:

$$\begin{cases} u_1'=v_1'=1,\\ u_2'(t)=\sqrt{2\rho a}\sin(\frac{\pi}{4}-t),\quad v_2'(t)=-\sqrt{2\rho a}\cos(\frac{\pi}{4}-t)\end{cases}$$

ceea ce dă: $u_2'(0) = \sqrt{\rho a}$, $v_2'(0) = -\sqrt{\rho a}$. Numitorul fractiei (8.9) este:

$$(1+\frac{u(0)^2}{\rho^2})\sqrt{\rho a} + \frac{u(0)v(0)}{\rho^2}(-\sqrt{\rho a}+\sqrt{\rho a}) + (1+\frac{v(0)^2}{\rho^2})(-\sqrt{\rho a}) = \frac{\sqrt{\rho a}}{\rho^2}(u(0)^2 - v(0)^2)$$

care este zero datorită ecuaţiei curbei C_1. Deci cele două curbe sunt perpendiculare în punctul de intersecţie.

S8.2 Pentru suprafaţa $S : \bar{r}(u,v) = (u, v, u(1+v))$ se cere unghiul φ dintre curbele de coordonate respectiv unghiurile θ_1, θ_2 dintre curba $C : u + v = 0$ şi curbele de coordonate.

Rezolvare Se obţine imediat: $E = 1+(1+v)^2$, $F = u(1+v)$, $G = 1+u^2$. Dacă $P(u_0, v_0)$ este punctul generic al lui S atunci din formula (8.10) avem: $\cos\varphi = \frac{u_0(1+v_0)}{\sqrt{(1+u_0^2)[1+(1+v_0^2)]}}$. Punctul de intersecţie dintre C şi C_{u_0} este $P_1(u_0, -u_0)$ iar cel dintre C şi C_{v_0} este $P_2(-v_0, v_0)$.

În cele ce urmează prezentăm o formulă alternativă pentru (8.9). Astfel, dacă cele două curbe ce se intersectează au tangentele: $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$, $\delta\bar{r} = \bar{r}_u\delta u + \bar{r}_v\delta v$ atunci unghiul cerut este dat de:

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\cdot\sqrt{E\delta u^2 + F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \tag{8.18}$$

Revenind la problema dată pentru C_{u_0} avem: $du = 0$ iar pentru C_{v_0} avem $dv = 0$ în timp ce C este dată de $\delta v = -\delta u$. Folosind (8.18) rezultă:

$$\cos\theta_1 = \frac{Fdv\delta u + Gdv(-\delta u)}{\sqrt{G}dv\sqrt{E-2F+G\delta u}} = \frac{F-G}{\sqrt{G(E-2F+G)}} = \frac{u_0 - 2u_0^2 - 1}{\sqrt{(1+u_0^2)(4u_0^2 - 4u_0 + 3)}}$$

respectiv:

$$\cos\theta_2 = \frac{Edu\delta u + Fdu(-\delta u)}{\sqrt{E}du\sqrt{E-2F+G\delta u}} = \frac{E-F}{\sqrt{E(E-2F+G)}} = \frac{2v_0^2 + 3v_0 + 2}{\sqrt{(v_0^2+2v_0+2)(4v_0^2+4v_0+3)}}.$$

S8.3 Pentru $S : \bar{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u+v)$ se cere unghiul dintre curbele de coordonate.

Rezolvare $E = 2$, $F = 2$, $G = u^2+1$, $\cos\theta = \frac{1}{2(u_0^2+1)}$.

S8.4 Pentru suprafaţa S de la Exerciţiul S6.5 se cere forma I-a fundamentală.

Rezolvare Cum $\bar{r}_u = (\cos v, \sin v, 1)$, $\bar{r}_v = (-u\sin v + \cos v, u\cos v + \sin v, -1)$ rezultă: $E = 2$, $F = 0$, $G = u^2+2$.

Prin urmare putem scrie:

$$I(S) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+1 \end{pmatrix} = 2diag(1, u^2+1).$$

Conform exerciţiului S7.4 avem că forma I-a a elicoidului S_h este:

$$I(S_h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+h^2 \end{pmatrix} = diag(1, u^2+h^2).$$

Prin urmare avem $I(S)=2I(S_(h=1))$. Două suprafeţe cu metricile diferind printr-u factor se numesc *conform echivalente* iar două metrici se diferă printr-un factor se numesc *conforme*, factorul respectiv fiind factorul de conformalitate.

S8.5 Să se exprime metrica Euclidiană a spaţiului minus originea $g=ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ în coordonate sferice.

Rezolvare Legătura dintre coordonatele carteziene (x,y,z) şi coordonatele sferice (ρ,φ,θ) (numite şi *coordonate polare în spaţiu*) este dată de:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi. \end{cases}$$

Prin calcule rezultă:

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2+\rho^2\sin^2 d\theta^2. \tag{8.19}$$

S8.6 Să se exprime metrica Euclidiană a planului minus originea $g=ds^2=dx^2+dy^2$ în coordonate polare (r,φ).

Rezolvare Din: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ rezultă: $dx=\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi$ şi $dy=\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi$ ceea ce implică:

$$ds^2=dr^2+r^2 d\varphi^2. \tag{8.20}$$

Sub această formă, metrica este de tip *warped*; a se vedea şi exerciţiul 14.4 !

S8.7 Se cere aria şi volumul sferei $S(O,R)$.

Rezolvare Parametrizarea sferei este conform exerciţiului 7.7 şi folosim formula (8.10) cu $D=[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Din: $E=R^2\cos^2 v$, $F=0$, $G=R^2$ avem:

$$A(S(O,R))=R^2\int_0^{2\pi}du\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos v dv\right)=2\pi R^2\cdot\left(\sin v|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=2\pi R^2\cdot(1-(-1))=4\pi R^2. \tag{8.21}$$

Volumul este:

$$V(S(O,R))=\int_0^R A(S(O,r))dr=4\pi\cdot\int_0^R r^2 dr=4\pi\cdot\frac{r^3}{3}|_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3. \tag{8.22}$$

Un program C++ cu $u=\theta$ şi $v=\phi$.

```
#include"3dframe.CPP"
void draw_sphere()
{
int arr[4];
int rad=1500;
for(double i=0;i<=90;i=i+1)
{
double phi=((3.14159)/180)*i;
for(double j=0;j<90;j=j+0.005)
{
```

```
double theta, x, y, z;
theta=((3.14159)/180)*j;
x=rad*cos(theta)*cos(phi);
y=rad*sin(theta)*cos(phi);
z=rad*sin(phi);
putxyz(int(x),-int(y),(int)z,arr,BLUE);
putxyz(int(x),-int(y),-(int)z,arr, BLUE);
putxyz(-int(x),-int(y),(int)z,arr,MAGENTA);
putxyz(-int(x),-int(y),-(int)z,arr,MAGENTA);
}
}
for(i=0;i<=90;i=i+1)
{

double phi=((3.14159)/180)*i;
for(double j=0;j<90;j=j+0.005)
{
double theta, x, y, z;
theta=((3.14159)/180)*j;
x=rad*cos(theta)*cos(phi);
y=rad*sin(theta)*cos(phi);
z=rad*sin(phi);
putxyz(int(x),int(y),(int)z,arr,GREEN);
putxyz(int(x),int(y),-(int)z,arr,GREEN);
putxyz(-int(x),int(y),-(int)z,arr,RED);
putxyz(-int(x),int(y),(int)z,arr,RED);
}
}
}
void main()
{
int gd=DETECT,gm;
initgraph(&gd, &gm,"c:
tc
bgi");
DRAW3DFRAME();
cleardevice();
draw_sphere();
getch();
closegraph();
}
```

Cursul 9

Forma a II-a fundamentală

Fixăm suprafaţa regulată şi orientabilă $S \subset \mathbb{R}^3$ şi punctul generic $P \in S$. Din orientabilitate, avem că aplicaţia $\bar{N} : P \in S \to \bar{N}(P) \in S^2$ este continuă şi observăm din expresia sa într-o parametrizare locală că este chiar diferenţiabilă.

Definiţia 9.1 Funcţia $\bar{N} : S \to S^2$ se numeşte *aplicaţia sferică (Gauss)* a lui S.

Să observăm că T_PS şi $T_{\bar{N}(P)}S^2$ sunt plane în spaţiul fizic $\mathbb{R}^3$, ambele perpendiculare pe vectorul $\bar{N}(P)$ şi deci coincid ! Prin urmare, diferenţiala aoplicaţiei Gauss este: $d\bar{N}_P : T_PS \to T_{\bar{N}(P)}S^2 = T_PS$ şi deci o gândim ca endomorfism liniar al lui T_PS.

Definiţia 9.2 Endomorfismul liniar $A_P : T_PS \to T_PS$ dat de $A_P = -dN_P$ se numeşte *operatorul Weingarten* sau *operatorul shape* (formă) al lui S.

Fixăm o parametrizare locală (U, φ) a lui S în jurul lui P; deci $P = \varphi(\bar{u}_0)$ cu $\bar{u}_0 = (u_0, v_0) = (u_0^i)_{i=1,2}$. Vrem imaginea bazei canonice $\{\varphi_1(\bar{u}_0), \varphi_2(\bar{u}_0)\}$ a lui T_PS prin dN_P. Reamintim că:
i) $\varphi_1(\bar{u}_0)$ este vectorul tangent în P la linia parametrică $C_{v_0} : u = u_0 + t, v = v_0, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Notăm $\bar{r}_{v_0}(t) \in \mathbb{R}^3$ vectorul generic de poziţie al curbei C_{v_0},
ii) analog $\varphi_2(\bar{u}_0)$ este vectorul tangent în P la linia parametrică $C_{u_0} : u = u_0, v = v_0 + t$. Fie $\bar{r}_{v_0}(t) \in \mathbb{R}^3$ vectorul generic de poziţie al curbei C_{u_0}.

Propoziţia 9.3 *Avem*:

$$d\bar{N}_P(\varphi_1(\bar{u}_0)) = \bar{N}_u(\bar{u}_0), \quad d\bar{N}_P(\varphi_2(\bar{u}_0)) = \bar{N}_v(\bar{u}_0). \tag{9.1}$$

Demonstraţie Avem:

$$d\bar{N}_P(\varphi_1(\bar{u}_0)) = \frac{d}{dt}(\bar{N}(\bar{r}_{v_0}(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(N^1(u(t), v_0), N^2(u(t), v_0), N^3(u(t), v_0))|_{t=0} =$$

$$= (N_u^1(P)u'(0), N_u^2(P)u'(0), N_u^3(P)u'(0)) = \bar{N}_u(P).$$

Analog:

$$d\bar{N}_P(\varphi_2(\bar{u}_0)) = \frac{d}{dt}(\bar{N}(\bar{r}_{u_0}(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(N^1(u_0, v(t)), N^2(u_0, v(t)), N^3(u_0, v(t)))|_{t=0} =$$

$$= (N_v^1(P)v'(0), N_v^2(P)v'(0), N_v^3(P)v'(0)) = \bar{N}_v(P).$$

Deci avem concluzia cerută. $\square$

Propoziţia 9.4 *Operatorul shape este autoadjunct relativ la forma I-a fundamentală.*

Demonstraţie Trebuie să verificăm identitatea:

$$I(P)(A_P(X), Y) = I(P)(X, A_P(Y)) \tag{9.2}$$

pentru orice $X, Y \in T_PS$. Din liniaritatea lui A_P şi biliniaritatea lui $I(P)$ rezultă că este suficientă verificarea lui (9.2) pe perechile: 1) $(\varphi_1(\bar{u}_0), \varphi_1(\bar{u}_0))$, $(\varphi_2(\bar{u}_0), \varphi_2(\bar{u}_0))$, 2) $(\varphi_1(\bar{u}_0), \varphi_2(\bar{u}_0))$, 3) $(\varphi_2(\bar{u}_0), \varphi_1(\bar{u}_0)$. Pe perechile din 1) verificarea este trivială. Pentru perechea din 2) avem, datorită lui (9.1):

$$\begin{cases} I(P)(A_P(\varphi_1), \varphi_2) = I(P)(-\bar{N}_u, \varphi_v) = -< \bar{N}_u, \varphi_v >, \\ I(P)(\varphi_1, A_P(\varphi_2)) = I(P)(\varphi_u, -\bar{N}_v) = -< \varphi_u, \bar{N}_v > . \end{cases} \tag{9.3}$$

Derivăm relaţiile:

$$< \varphi_u, \bar{N} >= 0, < \varphi_v, \bar{N} >= 0$$

prima în raport cu v iar a doua în raport cu u:

$$\begin{cases} < \varphi_{uv}, \bar{N} > + < \varphi_u, \bar{N}_v >= 0, \\ < \varphi_{vu}, \bar{N} > + < \varphi_v, \bar{N}_u >= 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

Datorită comutării $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ rezultă:

$$< \varphi_u, \bar{N}_v >=< \varphi_v, \bar{N}_u > \tag{9.5}$$

şi revenind la (9.3) avem egalitatatea cerută. Analog pentru perechea 3). □

O altă noţiune esenţială în geometria suprafeţelor este:

Definiţia 9.5 Numim *forma a II-a fundamentală* a lui S setul de aplicaţii $(II(P))_{p\in S}$ cu $II(P) : T_PS \times T_PS \to \mathbb{R}$ dată de:

$$II(P)(X, Y) = I(P)(A_P(X), Y). \tag{9.6}$$

Proprietăţi:
i) $II(P)$ este formă biliniară pe T_PS deoarece $I(P)$ este formă biliniară iar A_P este operator liniar,
ii) $II(P)$ este simetrică datorită relaţiei (9.2),
iii) în general nu avem pozitiva definire a lui $II(P)$; deci $II(P)$ nu este produs scalar asemenea lui $I(P)$!

Cu aceleaşi argumente ca în Cursul 7 avem:

$$II(P)(X, Y)) = X^i b_{ij} Y^j \tag{9.7}$$

unde $b = (b_{ij}) \in M_n(T_PS)$ este *matricea formei II-a fundamentale*. Rezultă că putem scrie (9.7) matriceal:

$$II(P)(X, Y)) = X^t \cdot b \cdot Y \tag{9.8}$$

reamintind că vectorii tangenţi $X, Y \in TPS$ sunt gânditi pe **coloană**. Altfel spus, avem:

$$II(P)(X, Y)) = \begin{pmatrix} X^1(P) & X^2(P) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^1(P) \\ Y^2(P) \end{pmatrix} \tag{9.9}$$

relaţie în care pentru simplificarea notaţie am omis dependenţa de P a funcţiilor $b_{ij} : S \to \mathbb{R}$ unde:

$$b_{ij}(P) = II(P)(\varphi_i, \varphi_j) = I(P)(A_P(\varphi_i), \varphi_j). \tag{9.10}$$

Mai precis, funcţiile *coeficienţi* ai formei II-a fundamentale sunt:

$$\boxed{\begin{cases} b_{11} =< A_P(\varphi_1), \varphi_1 >_e= - < \bar{N}_1, \varphi_1 >=< \varphi_{11}, \bar{N} > \\ b_{12} = b_{21} =< A_P(\varphi_1), \varphi_2 >= - < \bar{N}_1, \varphi_2 >=< \varphi_{12}, \bar{N} > \\ b_{22} =< A_P(\varphi_2), \varphi_2 >= - < \bar{N}_v, \varphi_2 >=< \varphi_{22}, \bar{N} > \end{cases}} \tag{9.11}$$

unde am folosit deja simetria lui b:

$$b^t = b \tag{9.12}$$

şi relaţiile (9.4) respectiv analoagele:

$$\begin{cases} < \varphi_{uu}, \bar{N} > + < \varphi_u, \bar{N}_u >= 0, \\ < \varphi_{vv}, \bar{N} > + < \varphi_v, \bar{N}_v >= 0. \end{cases} \tag{9.13}$$

Puem scrie în mod unitar:

$$b_{ij} =< \varphi_{ij}, \bar{N} > . \tag{9.14}$$

Notaţia Gauss este:

$$b_{11} = L, \quad b_{12} = b_{21} = M, \quad b_{22} = N. \tag{9.15}$$

SEMINARUL 9

S9.1 Se cere forma a II-a fundamentală pentru S de la S6.5.

Rezolvare Avem: $\bar{N} = \frac{1}{\sqrt{2u^2+4}}(-u\cos v - 2\sin v, -u\sin v + 2\cos v, u)$ şi $\bar{r}_{uu} = \bar{0}$, $\bar{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$, $\bar{r}_{vv} = (-u\cos v - \sin v, -u\sin v + \cos v, 0)$. Rezultă: $L = 0$, $M = \sqrt{\frac{2}{u^2+2}}$, $N = \sqrt{\frac{u^2+2}{2}}$.

S9.2 Se cere forma a II-a fundamentală pentru planul S7.2.

Rezolvare Avem: $\bar{N} = \frac{\bar{a}\times\bar{b}}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}$ şi $\bar{r}_{uu} = \bar{r}_{uv} = \bar{r}_{vv} = \bar{0}$. Deci: $L = M = N = 0$.

S9.3 Se cere forma a II-a fundamentală pentru suprafaţa Enneper S9.3.

Rezolvare Avem: $\bar{N} = \frac{1}{1+u^2+v^2}(-2u, 2v, 1-u^2-v^2)$ şi $\bar{r}_{uu} = 6(-u, v, 1)$, $\bar{r}_{uv} = 6(v, u, 0)$, $\bar{r}_{vv} = 6(u, -v, -1)$. Rezultă: $L = 6$, $M = 0$, $N = -6$.

S9.4 Se cere forma a II-a fundamentală pentru elicoidul S7.4.

Rezolvare Avem: $\bar{N} = \frac{1}{\sqrt{u^2+h^2}}(h\sin v, -h\cos v, u)$ şi $\bar{r}_{uu} = \bar{0}$, $\bar{r}_{uv} = (-sinv, \cos v, 0)$, $\bar{r}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$. Rezultă: $L = 0$, $M = \frac{-h}{\sqrt{u^2+h^2}}$, $N = 0$.

S9.5 Se cere forma a II-a fundamentală pentru suprafaţa Monge S7.5.

Rezolvare Avem: $\bar{N} = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}(-p, -q, 1)$ şi $\bar{r}_{uu} = (0, 0, r)$, $\bar{r}_{uv} = (0, 0, s)$, $\bar{r}_{vv} = (0, 0, t)$. Rezultă: $L = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$, $M = \frac{s}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$, $N = \frac{t}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$.

S9.6 Se cere forma a II-a fundamentală pentru paraboloidul hiperbolic S7.6.

Rezolvare Deoarece $r = t = 0$, $s = 1$ aplicând exerciţiul precedent avem: $L = 0$, $M = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, $N = 0$.

S9.7 Se cer cele două forme fundamentale pentru o suprafaţă de rotaţie S având axa Oz ca axă de rotaţie şi curba meridian în planul xOz de forma $C : x = \varphi(u), z = \psi(u)$.

Rezolvare Efectuăm o rotaţie de unghi v în jurul axei de rotaţie şi obţinem ecuaţia vectorială a suprafeţelor de rotaţie:

$$S : \bar{r}(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u)). \tag{9.15}$$

Avem tabelul:

$\bar{r}$	x	y	z
$\bar{r}_u$	$\varphi' \cos v$	$\varphi' \sin v$	ψ'
$\bar{r}_v$	$-\varphi \sin v$	$\varphi \cos v$	0
$\bar{r}_{uu}$	$\varphi'' \cos v$	$\varphi'' \sin v$	ψ''
$\bar{r}_{uv}$	$-\varphi' \sin v$	$\varphi' \cos v$	0
$\bar{r}_{vv}$	$-\varphi \cos v$	$-\varphi \sin v$	0
$\bar{N}$	$\frac{-\psi' \cos v}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}}$	$\frac{-\psi' \sin v}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}}$	$\frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}}$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} E = (\varphi')^2 + (\psi')^2, \quad F = 0, \quad G = \varphi^2, \quad EG - F^2 = \varphi^2((\varphi')^2 + (\psi')^2), \\ L = \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{\varphi\psi'}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}}. \end{cases}$$

S9.8 Aceeaşi problemă pentru *cilindrul circular drept*: $\varphi(u) = 1$, $\psi(u) = Ru$ cu $R > 0$.

Rezolvare Din formulele precedente avem: $E = R^2$, $F = 0$, $G = 1$, $EG - F^2 = R^2$, $L = M = 0$, $N = 1$. Aplicaţia Gauss este: $\bar{N}(u, v) = -(\cos v, \sin v, 0)$ şi imaginea sa este cercul S^1=ecuatorul lui S^2.

S9.9 Aceeaşi problemă pentru curba meridian C parametrizată canonic.

Rezolvare Din parametrizarea canonică avem: $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$ şi deci: $E = 1$, $F = 0$, $G = \varphi^2$, $EG - F^2 = \varphi^2$, $L = \varphi'\psi'' - \varphi''\psi'$, $M = 0$, $N = \varphi\psi'$.

S9.10 Aceeaşi problemă pentru $S(O, R)$ dată de (5.12).

Rezolvare Avem: $\varphi(u) = R \cos u$, $\psi(u) = R \sin u$ şi aplicând formulele de la S9.7 avem: $E = R^2$, $F = 0$, $G = R^2 \cos^2 u$, $EG - F^2 = R^4 \cos^2 u$, $L = R$, $M = 0$, $N = R \cos^2 u$. Aplicaţia Gauss a sferei este:

$$\bar{N}(u, v) = -(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

şi se observă că nu depinde de raza sferei. Este exact aplicaţia antipodală şi imaginea este toată sfera S^2.

S9.11 Aceeaşi problemă pentru *pseudosfera*: $\varphi(u) = R \sin u$, $\psi(u) = R(\cos u + \ln tg \frac{u}{2})$.

Rezolvare $E = R^2 ctg^2 u$, $F = 0$, $G = R^2 \sin^2 u$, $EG - F^2 = R^4 \cos^2 u$, $L = -Rctgu$, $M = 0$, $N = R \sin u \cos u$. Aplicaţia Gauss este: $\bar{N}(u, v) = (-\cos u \cos v, -cosu \sin v, \sin u)$.

S9.12 Aceeaşi problemă pentru *tor*: $\varphi(u) = R + r \cos u$, $\psi(u) = r \sin u$.

Rezolvare $E = r^2$, $F = 0$, $G = (R+r\cos u)^2$, $EG-F^2 = r^2(R+r\cos u)^2$, $L = r$, $M = 0$, $N = \cos u(R + r\cos u)$. Cum $u, v \in [0, 2\pi]$ aria torului este:

$$A(T(r,R)) = r\int_0^{2\pi} dv \cdot \int_0^{2\pi}(R + r\cos u)du = 2\pi r \cdot (Ru + r\sin u)|_0^{2\pi} = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 rR \tag{9.16}$$

exact aria pătratului de laturi: $2\pi r$ şi $2\pi R$ sau încă, aria cilindrului de lungime $2\pi R$ şi rază r. Volumul torului este:

$$V(T(r,R)) = \int_0^r A(T(t,R))dt = 2\pi^2 R \cdot \int_0^r 2tdt = 2\pi^2 R \cdot t^2|_0^r = 2\pi^2 Rr^2. \tag{9.17}$$

S9.13 Aceeaşi problemă pentru *conul circular*: $\varphi(u) = u$, $\psi(u) = Ru$.

Rezolvare $E = 1 + R^2$, $F = 0$, $G = u^2$, $EG - F^2 = (1 + R^2)u^2$, $L = M = 0$, $N = \frac{Ru}{\sqrt{1+R^2}}$. Aplicaţia Gauss este:

$$\bar{N}(u,v) = \left(-\frac{R\cos v}{\sqrt{R^2+1}}, -\frac{R\sin v}{\sqrt{R^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{R^2+1}}\right)$$

deci a treia componentă z_N este o constantă (evident subunitară) şi $x_N^2+y_N^2 = \frac{R^2}{R^2+1}$=constant. Deci imaginea aplicaţiei Gauss constă într-un cerc pe S^2 la cota $z_N = \frac{1}{\sqrt{R^2+1}}$.

S9.14 Aceeaşi problemă pentru *catenoid*: $\varphi(u) = R\cosh u$, $\psi(u) = Ru$.

Rezolvare $E = G = R^2\cosh^2 u$, $F = 0$, $EG - F^2 = R^4\cosh^4 u$, $L = -N = -R$, $M = 0$. Aplicaţia Gauss este:

$$\bar{N}(u,v) = \left(-\frac{\cos v}{\cosh u}, -\frac{\sin v}{\cosh u}, \frac{\sinh u}{\cosh u}\right).$$

Cursul 10

Curbura normală. Curburi principale. Curbura medie şi totală

Fixăm suprafaţa regulată şi orientabilă $S \subset \mathbb{R}^3$ şi punctul generic $P \in S$. Deci, avem în punctul P formele fundamentale: $I(P)$, $II(P)$. Fie 0_P vectorul nul din spaţiul tangent T_PS.

Definiţia 10.1 Funcţia $k_P : T_PS \setminus \{0_P\} \to \mathbb{R}$ dată de:

$$k_P(X) = \frac{II(P)(X,X)}{I(P)(X,X)} \tag{10.1}$$

se numşte *curbura normală* a lui S în P.

Fixăm (U,φ) o parametrizare locală a lui S în jurul lui P; deci $P = \varphi(\bar{u})$ cu $\bar{u} = (u,v) = (u^1,u^2) = (u^i)_{i=12}$. Dacă $X = X^1\varphi_1 + X^2\varphi_2$ atunci:

$$k_P(X) = \frac{b_{ij}(\bar{u})X^iX^j}{g_{ij}(\bar{u})X^iX^j} = \frac{b_{11}(\bar{u})(X^1)^2 + 2b_{12}(\bar{u})X^1X^2 + b_{22}(\bar{u})(X^2)^2}{g_{11}(baru)(X^1)^2 + 2g_{12}(\bar{u})X^1X^2 + g_{22}(\bar{u})(X^2)^2}. \tag{10.2}$$

Din această relaţie rezultă o proprietate importantă a curburii normale şi anume invarianţa la scalări $X \to \lambda X$ cu λ număr real nenul:

$$k_P(\lambda X) = k_P(X). \tag{10.3}$$

Prin urmare, putem considera k_P ca fiind de fapt funcţia $k_P : S(T_PS) \to \mathbb{R}$:

$$k_P(X) = II(P)(X,X) \tag{10.4}$$

unde $S(T_PS)$ este sfera unitate din spaţiul vectorial euclidian $(T_PS, I(P))$ i.e. $S(T_PS) = \{X \in T_PS; I(P)(X,X) = 1\}$. Rezultă că $S(T_PS)$ este o mulţime mărginită şi închisă în $T_PS \simeq \mathbb{R}^2$; deci $S(T_PS)$ este o mulţime compactă! Reamintim un rezultat de Topologie: o funcţie continuă pe un compact este mărginită şi îşi atinge marginile! În concluzie, există k_1=minimul funcţiei continue k_P şi k_2=maximul lui k_P.

Definiţia 10.2 Numerele reale k_1, k_2 se numesc *curburile principale* ale lui S în P.

Un mod de caracterizare a curburilor pricipale este următorul: am demonstrat în Cursul precedent că operatorul shape $A_P = -dN_P$ este autoadjunct relativ la produsul scalar $I(P)$. Un rezultat foarte important al Algebrei Liniare spune că un operator liniar autoadjunct

$A : (\mathbb{R}^n, g) \to (\mathbb{R}^n, g)$ determină o bază g-ortonormată $\{e_1, ..., e_n\}$ în $(\mathbb{R}^n, g)$ formată din vectori proprii: $A(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, ...,$ cu (λ_i) valori proprii reale pentru A.

Prin urmare, A_P admite vectorii proprii $e_1, e_2 \in S(T_P S)$ cu $I(P)(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ şi corespunzător, valorile proprii λ_1, λ_2: $A_P(e_i) = \lambda_i e_i$. Presupunem $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Cum $\{e_1, e_2\}$ este o bază în $T_P S$ rezultă că orice $X \in S(T_P S)$ se descompune în mod unic:

$$X = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \tag{10.5}$$

unde θ este unghiul orientat dintre X şi e_1. Rezultă:

$$k_P(X) = II(P)(X, X) = I(P)(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, A_P(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2))$$

şi deci:

$$k_P(X) =< \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, \cos\theta\lambda_1 e_1 + \sin\theta\lambda_2 e_2 >= \lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta. \tag{10.6}$$

Propoziţia 10.3 *Funcţia* $f : [0, \pi]$, $f(\theta) = \lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta$ *admite pe* λ_1 *ca minim şi* λ_2 *ca maxim.*

Demonstraţie Avem: $f'(\theta) = -\lambda_1 2\cos\theta\sin\theta + \lambda_2 2\sin\theta\cos\theta = (\lambda_2 - \lambda_1)\sin 2\theta$ şi ecuaţia $f'(\theta) = 0$ admite soluţiile $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Rezultă că:
i) minimul lui f corespunde lui θ_1 şi $f(0) = \lambda_1$,
ii) maximul lui f corespunde lui θ_2 şi $f(\frac{\pi}{2}) = \lambda_2$. Avem deci concluzia. $\square$

Corolarul 10.4 k_1 *este valoarea proprie minimă a lui* A_P *iar* k_2 *este valoarea proprie maximă a lui* A_P.

Avem deci: $A_P(e_1) = k_1 e_1$ şi $A_P(e_2) = k_2 e_2$.

Definiţia 10.5 Vectorii proprii ai lui A_P, $e_1, e_2 \in S(T_P S)$ se numesc *direcţiile principale* ale lui S în P.

Curburile principale permit o clasificare a punctelor unei suprafeţe:

Definiţia 10.6 Punctul $P \in S$ se numeşte:
1) *umbilical* dacă $k_1 = k_2 \neq 0$ şi *planar* dacă $k_1 = k_2 = 0$,
2) *eliptic* dacă $k_1 \cdot k_2 > 0$, *hiperbolic* dacă $k_1 \cdot k_2 < 0$ şi *parabolic* dacă $k_1 \cdot k_2 = 0$ dar una din curburile principale este nenulă.

Noţiunile introduse în definiţia următoare sunt fundamentale în teoria suprafeţelor:

Definiţia 10.7 Numim:
1) *curbura medie* funcţia pe S:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \tag{10.7}$$

Suprafaţa S o numim *minimală* dacă are $H \equiv 0$.
2) *curbura totală* sau *Gauss* funcţia pe S:

$$K = k_1 \cdot k_2. \tag{10.8}$$

Suprafaţa S o numim *plată* dacă are $K \equiv 0$.

Pentru determinarea acestor curburi reamintim, conform Corolarului 10.4, că k_1, k_2 sunt exact valorile prorii ale operatorului shape A_P. Prin urmare, ele sunt soluţiile ecuţiei caracteristice:

$$\det(II(P) - \lambda I(P)) = 0. \tag{10.9}$$

Avem deci:

$$\begin{vmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ M-\lambda F & N-\lambda G \end{vmatrix} = 0$$

sau, prin dezvoltare:

$$(L-\lambda E)(N-\lambda G)-(M-\lambda F)^2 = 0.$$

Un calcul imediat dă ecuaţia finală a curburilor principale:

$$(EG-F^2)\lambda^2-(LG-MF+NE)\lambda+(LN-M^2)=0 \tag{10.10}$$

iar forumulele Viete dau concluzia:

$$H(P)=\frac{LG-MF+NE}{2(EG-F^2)}(P), \quad K(P)=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{\det II(P)}{\det I(P)}. \tag{10.11}$$

Invers, dacă ştim H şi K atunci curburile principale sunt soluţiile ecuaţiei:

$$\lambda^2-2H\lambda+K=0. \tag{10.12}$$

Această ecuaţiie având soluţiile reale va avea discriminantul pozitiv şi deci:

$$H^2-K\geq 0 \tag{10.13}$$

iar soluţiile sunt:

$$k_{1,2}=H\mp\sqrt{H^2-K}. \tag{10.14}$$

De asemeni, deoarece expresia operatorului shape în raport cu baza $\{e_1, e_2\}$ este:

$$A_P=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \tag{10.15}$$

obţinem:

$$H(P)=\frac{1}{2}TrA_P, \quad K(P)=\det A_P. \tag{10.16}$$

O caracterizare a tipurilor de puncte este:

Propoziţia 10.8 *Punctul* $P\in S$ *este*:
1) *eliptic dacă şi numai dacă* $K(P)>0$ şi *parabolic dacă şi numai dacă* $K(P)=0$,
2) *hiperbolic dacă şi numai dacă* $K(P)<0$,
3) *umbilical dacă şi numai dacă* $\frac{b_{11}(P)}{g_{11}(P)}=\frac{b_{12}(P)}{g_{12}(P)}=\frac{b_{22}(P)}{g_{22}(P)}=k_1(=k_2)$.

Demonstraţie Echivalenţele 1)-2) sunt evidente din definiţia lui K. Să arătăm 3). Avem în general: $k_1\leq k_P(X)\leq k_2$ pentru orice $X\in T_PS\setminus\{0_P\}$. Deci într-un punct umbilical funcţia curbură normală este constant egală cu k_1. Pentru $X=\bar{r}_u$ obţinem: $b_{11}(P)=k_1g_{11}(P)$ iar pentru $X=\bar{r}_v$ obţinem $b_{22}(P)=k_1g_{22}(P)$. Revenind apoi la $k_P(X)\equiv k_1$ rezultă $b_{12}(P)X^1X^2=k_1g_{12}(P)X^1X^2$ pentru orice pereche (X^1,X^2) de unde obţinem concluzia. □

SEMINARUL 10

Se cer curburile suprafeţelor următoare:

S10.1 de la S9.1.

Rezolvare $K = \frac{-1}{(u^2+2)^2}$ deci toate punctele sunt hiperbolice.

S10.2 de la S9.2.

Rezolvare $K = H = 0$. Toate punctele sunt planare şi parabolice.

S10.3 de la S9.3.

Rezolvare $H = 0$, $K = \frac{-4}{9(u^2+v^2+1)^2}$. Toate punctele sunt hiperbolice. Suprafaţa Enneper este minimală. Ecuaţia (10.10) a curburilor principale devine: $[2-3\lambda(1+u^2+v^2)][2+3\lambda(1+u^2+v^2)] = 0$ deci avem curburile principale: $k_{1,2} = \frac{\pm 2}{3(1+u^2+v^2)}$.

S10.4 de la S9.4.

Rezolvare $H = 0$, $K = \frac{-h^2}{(u^2+h^2)^2}$. Toate punctele sunt hiperbolice. Elicoidul este o suprafaţă minimală. În fapt, pentru elicoid ecuaţia (10.10) a curburilor principale este: $(u^2+h^2)\lambda^2 - \frac{h^2}{u^2+h^2} = 0$ şi deci avem curburile principale: $k_{1,2} = \frac{\pm h}{u^2+h^2}$.

S10.5 de la S9.5.

Rezolvare $H = \frac{(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$, $K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$

S10.6 de la S9.6.

Rezolvare $H = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $K = \frac{-1}{(1+x^2+y^2)^2}$. Toate punctele sunt hiperbolice.

S10.7 de la S9.7.

Rezolvare $H = \frac{\psi'((\varphi')^2+(\psi')^2)+\varphi(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')}{2\varphi((\varphi')^2+(\psi')^2)^{\frac{3}{2}}}$, $K = \frac{\psi'(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')}{\varphi((\varphi')^2+(\psi')^2)^2}$.

S10.8 de la S9.8.

Rezolvare $H = \frac{1}{2}$, $K = 0$. Toate punctele sunt parabolice. Cilindrul circular drept este o suprafaţă plată. Ecuaţia (10.10) a curburilor principale devine: $\lambda(1-\lambda) = 0$ deci avem curburile principale: $k_1 = 0$, $k_2 = 1$.

S10.9 de la S9.9.

Rezolvare $H = \frac{\psi'}{2\varphi} + \frac{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}{2}$, $K = \frac{\psi'(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')}{\varphi}$.

S10.10 de la S9.10.

Rezolvare $H = \frac{1}{R}$, $K = \frac{1}{R^2}$. Toate punctele sunt eliptice. Sfera are curbura medie constantă şi curbura totală constantă pozitivă! Ecuaţia (10.10) devine $(1-\lambda R)^2 = 0$ deci avem curburile principale: $k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$ şi toate punctele sunt ombilicale!

S10.11 de la S9.11.

Rezolvare $H = \frac{ctg 2u}{R}$, $K = -\frac{1}{R^2}$. Toate punctele sunt hiperbolice. Pseudosfera are curbura constantă negativă!

S10.12 de la S9.12.

Rezolvare $H = \frac{R+2r\cos u}{2r(R+r\cos u)}$, $K = \frac{\cos u}{r(R+r\cos u)}$.

S10.13 de la S9.13.

Rezolvare $H = \frac{R}{2u\sqrt{1+R^2}}$, $K = 0$. Deci conul circular este suprafaţă plată.

S10.14 de la S9.14.

Rezolvare $H = 0$, $K = -\frac{1}{R^2 \cosh^4 u}$. Deci catenoidul este suprafaţă minimală şi are curbura negativă dar neconstantă. În fapt, există doar două suprafeţe minimale de rotatie: planul şi catenoidul!

Putem determina curburile principale din ecuaţia (10.10) care devine:
$(R - \lambda R^2 \cosh^2 u)(R + \lambda R^2 \cosh^2 u) = 0$. Deci: $k_{1,2} = \frac{\pm 1}{R \cosh^2 u}$.

S10.15 *banda lui Möbius* $S : \bar{r}(u, v) = (\cos u(1 + v \sin \frac{u}{2}), \sin u(1 + v \sin \frac{u}{2}), v \cos \frac{u}{2})$.

Rezolvare $E = (1 + v \sin \frac{u}{2})^2 + \frac{v^2}{4}$, $F = 0$, $G = 1$.

Cursul 11

Derivata covariantă pe o suprafaţă. Simbolii Christoffel

Fixăm suprafaţa regulată, orientabilă şi scufundată $S : \bar{r} = \bar{\varphi}(u, v), (u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ şi punctul generic $P(u_0, v_0) \in S$. Fie funcţia $f : S \to \mathbb{R}$ gândită ca $f(P) = f(u, v)$ deci ca $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Asemănător Definiţiei 8.5 introducem:

Definiţia 11.1 f se numeşte *netedă* dacă este infinit derivabilă parţial în raport cu variabilele u şi v. Fie $C^\infty(S)$ mulţimea acestor funcţii netede numite de către fizicieni *câmpuri scalare*.

Observaţia 11.2 $C^\infty(S)$ este inel comutativ relativ la operaţiile de adunare şi înmulţire.

Fixâm acum $X \in T_P S$ şi două curbe pe S, reprezentanţi pentru X ca în Cursul 5, $c^i(t) = (u^i(t), v^i(t)), t \in (-\varepsilon, \varepsilon), i = 1, 2$. Deci $c^i(0) = (u_0, v_0)$ şi $\frac{dc^i}{dt}(0) = (X^1, X^2)$ dacă $X = X^1 \bar{r}_u(P) + X^2 \bar{r}_v(P)$. Prin urmare:

$$\frac{du^1}{dt}(0) = \frac{du^2}{dt}(0) = X^1, \quad \frac{dv^1}{dt}(0) = \frac{dv^2}{dt}(0) = X^2. \tag{11.1}$$

Următorul rezultat arată independenţa derivatei unui câmp scalar f de-a lungul curbelor ce-l reprezintă pe X:

Propoziţia 11.3 *În condiţiile precedente avem*: $(f \circ c^1)'(0) = (f \circ c^2)'(0)$.

Demonstraţie Fie $F_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ funcţia netedă (fiind compunere de funcţii netede) $F_i(t) = (f \circ c^i)(t) = f(u^i(t), v^i(t))$. Avem $F_i(0) = f(P)$ şi prin derivare compusă obţinem:

$$F_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial u}(P)\frac{du^i}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial v}(P)\frac{dv^i}{dt}(0).$$

Datorită relaţiilor (11.1) avem concluzia: $F_1'(0) = F_2'(0)$. $\square$

Acest rezultat permite introducerea următoarei noţiuni fundamentale:

Definiţia 11.4 Pentru $f \in C^\infty(S)$ şi $X \in T_P S$ numim *derivata direcţională* a lui f în $P \in S$ relativ la direcţia X numărul real:

$$\tilde{\nabla}_X f = (f \circ c)'(0) \tag{11.2}$$

unde $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ este o curbă pe S prin P cu $c'(0) = X$.

Proprietăţile acestui număr sunt date de:

Propoziţia 11.5 *Fie $X, Y \in T_P S$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ şi $f, f_1, f_2 \in C^\infty(S)$. Atunci*:
i) $\tilde{\nabla}_{\lambda X+\mu Y} f = \lambda \tilde{\nabla}_X f + \mu \tilde{\nabla}_Y f$,
ii) $\tilde{\nabla}_X(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \tilde{\nabla}_X f_1 + \mu \tilde{\nabla}_X f_2$,
iii) (*Leibniz*) $\tilde{\nabla}_X(f_1 f_2) = \tilde{\nabla}_X f_1 \cdot f_2(P) + f_1(P) \cdot \tilde{\nabla}_X f_2$.

În contrapartidă cu noţiunea de câmp scalar introducem şi:

Definiţia 11.6 Numim *câmp vectorial* pe S o aplicaţie $Z : S \to \mathbb{R}^3$ constituită din 3 câmpuri scalare: $Z = (Z^1, Z^2, Z^3)$.

Dacă în particular avem că $Z(P) \in T_P S$ pentru orice $P \in S$ reobţinem noţiunea de câmp vectorial tangent la S din Definiţia 6.4ii). Extindem derivata direcţională la câmpuri vectoriale:

Definiţia 11.7 Dat $X \in T_P S$ şi câmpul vectorial Z pe S numim *derivata direcţională* a lui Z în P relativ la direcţia X ansamblul:

$$\tilde{\nabla}_X Z = (\tilde{\nabla}_X Z^1, \tilde{\nabla}_X Z^2, \tilde{\nabla}_X Z^3). \tag{11.3}$$

Proprietăţile acestei derivate sunt date de:

Propoziţia 11.8 *Fie $X, Y \in T_P S$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(S)$ şi câmpurile vectoriale Z, W. Avem*:
i) $\tilde{\nabla}_{\lambda X+\mu Y} Z = \lambda \tilde{\nabla}_X Z + \mu \tilde{\nabla}_Y Z$,
ii) $\tilde{\nabla}_X(\lambda Z + \mu W) = \lambda \tilde{\nabla}_X Z + \mu \tilde{\nabla}_X W$,
iii) (*Leibniz*) $\tilde{\nabla}_X(fZ) = \tilde{\nabla}_X f \cdot Z(P) + f(P) \cdot \tilde{\nabla}_X Z$,
iv) (*compatibilitatea cu metrica euclidiană*)

$$\tilde{\nabla}_X(< Z, W >)(P) =< \tilde{\nabla}_X Z, W(P) > + < Z(P), \tilde{\nabla}_X W > . \tag{11.4}$$

Ultimul tip de derivare după o direcţie se aplică câmpurilor vectoriale tangente la S adică elementelor din $\mathscr{X}(S)$. Să observăm că avem descompunerea în sumă directă:

$$T_P \mathbb{R}^3 = T_P S \oplus N_P \tag{11.5}$$

termenii sumei fiind chiar ortogonali relativ la produsul scalar euclidian. Relativ la această descopunere introducem proiectorii (ortogonali):

$$\pi^T_P : T_P \mathbb{R}^3 \to T_P S, \quad \pi^N_P : T_P \mathbb{R}^3 \to N_P \tag{11.6}$$

şi obţinem următorul concept fundamental:

Definiţia 11.9 Dat $X \in T_P S$ şi $Z \in \mathscr{X}(S)$ descompunerea ortogonală:

$$\tilde{\nabla}_X Z = \nabla^P_X Z + B^P(X, Z) = \pi^T_P(\tilde{\nabla}_X Z) + \pi^N_P(\tilde{\nabla}_X Z) \tag{11.7}$$

se numeşte *formula Gauss*. Aplicaţia $\nabla^P : T_P S \times \mathscr{X}(S) \to T_P S$ se numeşte *derivata covariantă* a lui Z în P relativ la direcţia X. Setul de aplicaţii $\nabla : \mathscr{X}(S) \times \mathscr{X}(S) \to \mathscr{X}(S)$ dat de $\nabla = (\nabla^P)_{P \in S}$ se numeşte *conexiunea Levi-Civita* a lui S.

Să observăm că derivata Levi-Civita o gândim astfel: $(X, Z) \in \mathscr{X}(S) \times \mathscr{X}(S) \to \nabla_X Z \in \mathscr{X}(S)$ unde $\nabla_X Z : P \in S \to \nabla^P_{X(P)} Z \in T_P S$!

În continuare să particularizăm formulele obţinute la X element al bazei Gauss $\{\varphi_u(P), \varphi_v(P)\}$ a lui $T_P S$. Conform discuţiei din Cursul 6 avem că $\varphi_u(P)$ este vectorul tangent în P la curba $C_{v_0} : u = u(t), v = const = v_0$ cu $u(0) = u_0$ şi $u'(0) = 1$. Prin urmare avem:

$$\tilde{\nabla}_{\varphi_u(P)} f = (f \circ C_{v_0})'(0) = \frac{df}{dt}(u(t), v_0)|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial u}(P)u'(0) = \frac{\partial f}{\partial u}(P). \tag{11.8}$$

Absolut analog:

$$\tilde{\nabla}_{\varphi_v(P)} f = \frac{\partial f}{\partial v}(P) \tag{11.9}$$

şi deci putem remarca următoarele:
i) cu o globalizare de tipul celei considerate la derivata Levi-Civita putem nota:

$$\tilde{\nabla}_{\varphi_u} f = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \tilde{\nabla}_{\varphi_v} f = \frac{\partial f}{\partial v}. \tag{11.10}$$

ii) putem renota formal:

$$\varphi_u = \frac{\partial}{\partial u}, \quad \varphi_v = \frac{\partial}{\partial v}. \tag{11.11}$$

Pentru derivata direcţională pe câmpuri vectoriale obţinem deci:

$$\tilde{\nabla}_{\varphi_i(P)} Z = \left(\frac{\partial Z^1}{\partial u^i}(P), \frac{\partial Z^2}{\partial u^i}(P), \frac{\partial Z^3}{\partial u^i}(P)\right). \tag{11.12}$$

Să observăm că proiectorul normal are expresia foarte simplă:

$$\pi_P^N(Z(P)) =< Z(P), \bar{N}(P) > \tag{11.13}$$

şi atunci putem calcula uşor $B^P(\varphi_i(P) = \frac{\partial}{\partial u^i}, Z)$ pentru $Z = \varphi_j$:

$$B^P(\varphi_i(P), \varphi_j) =< \tilde{\nabla}_{\varphi_i(P)}\varphi_j, \bar{N}(P) >=< \frac{\varphi_j}{\partial u^i}(P), \bar{N}(P) >=< \varphi_{ij}(P), \bar{N}(P) >$$

şi o comparaţie cu relaţiile (9.11) conduce la faptul că $B^P = II(P)$. În concluzie, formula Gauss se poate globaliza la:

$$\tilde{\nabla}_X Z = \nabla_X Z + II(X, Z) \tag{11.14}$$

pentru orice pereche $(X, Z) \in \mathscr{X}(S)$!

Pentru aceaşi pereche $(X = \varphi_i, Z = \varphi_j)$ formula Gauss devine:

$$\varphi_{ij} = \nabla_{\varphi_i}\varphi_j + b_{ij}\bar{N} \tag{11.15}$$

şi descompunerea generică a primului termen din membrul drept este:

$$\nabla_{\varphi_i}\varphi_j = \Gamma^k \varphi_k \tag{11.16}$$

cu $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ funţii netede pe S.

Definiţia 11.10 Funcţiile $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ se numesc *simbolii Christoffel* ai lui S.

Să observăm că derivatele parţiale comută $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$ şi atunci datorită relaţiei (11.16) avem comutarea simbolurilor Christoffel în raport cu indicii inferiori:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}. \tag{11.17}$$

Pentru a determina expresia acestor funcţii vom folosi compatibilitatea cu metrica din Propoziţia 11.8:

$$\tilde{\nabla}_{\varphi_i}(<\varphi_j, \varphi_k>) =<\tilde{\nabla}_{\varphi_i}\varphi_j, \varphi_k> + <\varphi_j, \tilde{\nabla}_{\varphi_i}\varphi_k>$$

care devine:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \Gamma^a_{ij} g_{ak} + \Gamma^a_{ki} g_{ja}. \tag{11.18$_i$}$$

(În membrul drept aveam şi componente normale dar acestea sunt ortogonale cu $\bar{r}_.$ deci produsele scalare respective sunt nule.) Facem permutarea ciclică a indicilor i, j, k şi operaţia $(11.18_j) + (11.18_k) - (11.18_i)$ conduce la expresia finală:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = 2\Gamma^a_{jk} g_{ai}$$

ceea ce produce cu interschimbarea $a \leftrightarrow i$:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{g^{ia}}{2}\left(\frac{\partial g_{ak}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ja}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^a}\right). \tag{11.19}$$

O formulă ce unifică calculele este:

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \Gamma^2_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{1j}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial g_{2j}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^2} \end{pmatrix}. \tag{11.20}$$

Deci:

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \end{pmatrix}. \tag{11.21}$$

Definiţia 11.11 i) *Croşetul Lie* pe suprafaţa S este aplicaţia: $[\cdot,\cdot] : \mathscr{X}(S)^2 = \mathscr{X}(S) \times \mathscr{X}(S) \to \mathscr{X}(S)$:

$$[X, Y] = [X, Y]^i \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{11.22}$$

unde:

$$[X, Y]^i = X(Y^i) - Y(X^i) = X^a \frac{\partial Y^i}{\partial u^a} - Y^a \frac{\partial X^i}{\partial u^a}. \tag{11.23}$$

ii) *Tensorul de curbură* al conexiunii Levi-Civita este aplicaţia $R : \mathscr{X}(S)^3 \to \mathscr{X}(S)$:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{11.24}$$

Se obţine imediat că R este un câmp tensorial de tip $(1, 3)$ având componentele locale:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)\frac{\partial}{\partial u^l} = R^k_{ijl}\frac{\partial}{\partial u^k} \tag{11.25}$$

unde:
$$R^k_{ijl} = \frac{\partial \Gamma^k_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial u^j} + \Gamma^a_{jl}\Gamma^k_{ai} - \Gamma^a_{il}\Gamma^k_{aj}. \tag{11.26}$$
Se arată (a se vedea Cursul următor) că:
$$K = \frac{1}{EG - F^2}\left[g_{11}R^1_{122} + g_{12}R^2_{122}\right]. \tag{11.27}$$

Această relaţie foarte importantă determină introducerea *tensorului covariant de curbură* $\mathscr{R} : \mathscr{X}(S)^4 \to C^\infty(S)$:
$$\mathscr{R}(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) \tag{11.28}$$
având componentele locale:
$$\mathscr{R}_{ijkl} = g\left(R(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j})\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l}\right). \tag{11.29}$$
Cu (11.25) obţinem:
$$\mathscr{R}_{ijkl} = R^a_{ijk}g_{al} \tag{11.30}$$
iar formula curburii totale devine:
$$K = \frac{\mathscr{R}_{1221}}{detg}. \tag{11.31}$$

Relaţia (11.18_i) exprimă local faptul că conexiunea Levi-Civita este *metrică* adică derivata covariantă ∇g este nulă sau încă $\nabla_X g = 0$ pentru orice $X \in \mathscr{X}(S)$ unde:
$$(\nabla_X g)(Y, Z) := X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z). \tag{11.32}$$

SEMINARUL 11

S11.1 Fie ∇^g conexiunea Levi-Civita a metricii g şi constanta reală $c > 0$. Să se arate că: $\nabla^{cg} = \nabla^g$

Rezolvare Rezultă imediat din expresia (11.19) a simbolurilor Christoffel.

S11.2 Spunem că S este rapotată la *coordonate polare geodezice* dacă forma I-a fundamentală este $g(r, \varphi) = dr^2 + G(r, \varphi)d\varphi^2$. Se cer simbolii Christoffel şi curbura Gauss.

Rezolvare Singurii nenuli sunt: $\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r}$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial r}$, $\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial \varphi}$. Din (11.27) avem:
$$K = \frac{1}{G}R^1_{122} = \frac{1}{G}\left[\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^2} + \Gamma^a_{22}\Gamma^1_{a1} - \Gamma^a_{12}\Gamma^1_{a2}\right] = \frac{1}{G}\left[-\frac{1}{2}G_{rr} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22}\right] = -\frac{1}{G}\left[-\frac{1}{2}G_{rr} + \frac{1}{4G}G^2_r\right]$$
cu expresia finală:
$$K = \frac{1}{4G^2}\left[G^2_r - 2GG_rr\right]. \tag{11.33}$$
O concluzie interesantă este aceea că pentru K nu avem nevoie de derivatele în raport cu φ ale lui G.

S11.3 Să se aplice calculul precedent la elicoid.

Rezolvare Avem $G(r=u,\varphi=v)=u^2+h^2$ şi rezultă că singurii nenuli sunt: $\Gamma^1_{22}=-u$, $\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{u}{u^2+h^2}$. Avem:

$$K=\frac{1}{4(u^2+h^2)^2}\left[(2u)^2-2(u^2+h^2)2\right]=\frac{1}{(u^2+h^2)^2}\left[u^2-(u^2+h^2)\right]=\frac{-h^2}{(u^2+h^2)^2}$$

în acord cu exerciţiul 10.4.

S11.4 O parametrizare a lui S pentru care $g_{11}=g_{22}=1$ şi $g_{12}=\cos\varphi$ cu $\varphi=\varphi(u,v)$ se numeţe *reţea Cebîşev*. Se cer simbolii Christoffel.

Rezolvare $\begin{pmatrix}\Gamma^1_{11}\\ \Gamma^2_{11}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sin\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\\ -\frac{\partial\varphi}{\partial u}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\Gamma^1_{22}\\ \Gamma^2_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sin\varphi}\begin{pmatrix}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{pmatrix}$ şi restul nuli. Din (11.27) avem:

$$K=\frac{1}{\sin^2\varphi}\left[R^1_{122}+\cos\varphi R^2_{122}\right].$$

unde:

$$R^1_{122}=\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial u}-\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial v}+\Gamma^a_{22}\Gamma^1_{a1}+\Gamma^a_{22}\Gamma^1_{a1}=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi_v}{\sin\varphi}\right)+\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11}=-\frac{\varphi_{uv}}{\sin\varphi}$$

$$R^2_{122}=\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial u}-\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u}+\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}-\Gamma^a_{12}\Gamma^2_{a2}=\frac{\cos\varphi\varphi_{uv}}{\sin\varphi}.$$

În concluzie:

$$K=\frac{\varphi_{uv}}{\sin^3\varphi}\left[-1+\cos^2\varphi\right]=\frac{-\varphi_{uv}}{\sin\varphi}. \tag{11.34}$$

S11.5 Se cere curbura Gauss a sferei $S(O,R)$.

Rezolvare Metrica sferei este: $g=R^2du^2+R^2\cos^2 udv^2$ şi cu relaţia (11.27) avem:

$$K=\frac{R^2}{R^4\cos^2 u}=\frac{R^1_{122}}{R^2\cos^2 u}=\frac{1}{R^2\cos^2 u}\left[\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial u^1}-\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u^2}+\Gamma^a_{22}\Gamma^1_{a1}-\Gamma^a_{12}\Gamma^1_{a2}\right].$$

Dar singurii simboli Christoffel nenuli sunt: $\Gamma^2_{12}=-\frac{\sin u}{\cos u}$ şi $\Gamma^1_{22}=\sin u\cos u$ ceea ce dă:

$$K=\frac{1}{R^2\cos^2 u}\left[\cos^2 u-\sin^2 u+\frac{\sin u}{\cos u}\sin u\cos u\right]=\frac{1}{R^2}$$

în acord cu exerciţiul S10.10!

S11.6 Se cere curbura Gauss a catenoidului

Rezolvare Din S9.14 avem metrica $g=R^2\cosh^2 u(du^2+dv^2)$ şi din (11.27) rezultă:

$$K=\frac{R^1_{122}}{R^2\cosh^2 u}=\frac{1}{R^2\cosh^2 u}\left[\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial u^1}-\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u^2}+\Gamma^a_{22}\Gamma^1_{a1}-\Gamma^a_{12}\Gamma^1_{a2}\right].$$

Singurii simboli Christoffel nenuli sunt: $\Gamma^1_{11}=-\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{12}=\frac{\sinh u}{\cosh u}$ şi deci:

$$K=\frac{1}{R^2\cosh^2 u}\left[-\frac{1}{\cosh^2 u}-\left(\frac{\sinh u}{\cosh u}\right)^2+\left(\frac{\sinh u}{\cosh u}\right)^2\right]=-\frac{1}{R^2\cosh^4 u}$$

analog cu rezultatul de la S10.14.

Definiţia 11.11 Câmpul $X \in \mathscr{X}(S)$ se numeşte *covariant constant* dacă $\nabla X = 0$ i.e. $\nabla_Y X = 0$ pentru orice $Y \in \mathscr{X}(S)$.

S11.7 Să se arate că norma lui X i.e. $f_X = \sqrt{g(X,X)}$ este constantă.

Rezolvare E suficient să arătăm că f_X^2 este constantă. Avem din metricitatea (11.28):

$$0 = (\nabla_Y g)(X,X) = Y(f_X^2) - 2g(\nabla_Y X, X) = Y(f_X^2) - 0 = Y(f_X^2).$$

În particular, spunem că X este *paralel* de-a lungul curbei $\gamma : I \to S$ dacă $\nabla_{\gamma'} X = 0$. Acest rezultat spune că norma unui câmp paralel este constantă de-a lungul curbei.

Definiţia 11.12 Fie funcţia netedă pe o suprafaţă $f : S \to \mathbb{R}$. *Laplacianul* lui f este funcţia pe S:

$$\Delta f = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial u^k}\right). \tag{11.35}$$

Ecuaţia: $\Delta f = 0$ se numeşte *ecuaţia Laplace pe* S iar o soluţie o numim *funcţie armonică pe* S.

Prin urmare, ecuaţia Laplace este:

$$G\left(f_{11} - \Gamma_{11}^k f_k\right) - 2F\left(f_{12} - \Gamma_{12}^k f_k\right) + E\left(f_{22} - \Gamma_{22}^k f_k\right) = 0. \tag{11.36}$$

Exemplul 11.13 În planul fără origine cu metrica warped dată de coordonatele polare ecuaţia Laplace pentru o funcţie radial simetrică $f = f(r)$ este:

$$r^2 f_{rr} + r f_r = 0 \tag{11.37}$$

cu soluţia generală: $f_{a,b}(r) = a \ln r + b$, a şi b fiind constante reale.

Exemplul 11.14 Pe sfera $S(O,R)$ folosim exerciţiul 11.5; ecuaţia Laplace este:

$$\cos^2 u f_{uu} + f_{vv} - \sin u \cos u f_u = 0. \tag{11.38}$$

Să căutăm soluţii $f = f(u)$; avem ecuaţia $(\cos u f')' = 0$ şi deci:

$$f'(u) = \frac{C}{\cos u} \Longrightarrow f(u) = C \ln\left(\frac{\sin u + 1}{\cos u}\right) = C \ln \frac{\tan\frac{u}{2} + 1}{\tan\frac{u}{2} - 1}.$$

Cursul 12

Teorema Egregium şi teorema fundamentală a suprafeţelor

Fixăm suprafaţa regulată, orientabilă, scufundată $S : \bar{r} = \varphi(u,v), (u,v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$. Reamintim din Cursul precedent formula Gauss:

$$\varphi_{ij} = \Gamma^k_{ij}\varphi_k + b_{ij}\bar{N}. \tag{12.1}$$

Urmărim stabilirea unei formule asemănătoare pentru gradientul versorului normalei: $\nabla\bar{N} = (\frac{\partial\bar{N}}{\partial u^1}, \frac{\partial\bar{N}}{\partial u^2}) = (\bar{N}_1, \bar{N}_2)$:

$$\bar{N}_k = A^s_k\varphi_s + B_k\bar{N} \tag{12.2}$$

coeficienţii din această relaţie urmând a fi determinaţi. Pentru aflarea celui de al doilea coeficient înmulţim scalar (12.2) cu $\bar{N}$ şi avem:

$$B_k =< \bar{N}_k, \bar{N} >$$

şi deci:

$$2B_k =< \bar{N}_k, \bar{N} > + < \bar{N}, \bar{N}_k >= \frac{\partial}{\partial u^k}(< \bar{N}, \bar{N} >) = \frac{\partial 1}{\partial u^k} = 0.$$

Vedem astfel o motivaţie pentru alegerea normalei ca versor. Pentru aflarea primului coeficient înmulţim scalar cu $\bar{r}_t$:

$$< \bar{N}_k, \varphi_t >= A^s_k < \varphi_s, \varphi_t >= A^s_k g_{st}.$$

Comparând cu relaţia (9.4) rezultă:

$$-b_{kt} = A^s_k g_{st}$$

şi în mulţim acum cu g^{tj}:

$$-g^{tj}b_{tk} = A^s_k g_{st}g^{tj} = A^s_k\delta^j_s = A^j_k.$$

În concluzie, relaţia (12.2) devine *formula Weingarten*:

$$\bar{N}_k = (-g^{jt}b_{tk})\varphi_j. \tag{12.3}$$

Perechea de relaţii (FG) = (12.1), (FW) = (12.3) constituie *formulele fundamentale* ale teoriei suprafeţelor.

Teorema 12.1 *Ecuaţiile fundamentale ale teoriei suprafeţelor sunt*:
I) (EG) *ecuaţia Gauss*

$$\det II = g_{1j}\left[\frac{\partial \Gamma^j_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^j_{21}}{\partial u^2} + (\Gamma^k_{22}\Gamma^j_{k1} - \Gamma^k_{21}\Gamma^j_{k2})\right]. \tag{12.4}$$

II) (EC) *ecuaţiile Codazzi*

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + (\Gamma^k_{12}b_{k1} - \Gamma^k_{11}b_{k2}) = 0 \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + (\Gamma^k_{22}b_{k1} - \Gamma^k_{21}b_{k2}) = 0. \end{cases} \tag{12.5}$$

Demonstraţie Derivăm formula Gauss în raport cu u^k:

$$\varphi_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u^k}\varphi_1 + \Gamma^1_{ij}\varphi_{1k} + \frac{\Gamma^2_{ij}}{\partial u^k}\varphi_2 + \Gamma^2_{ij}\varphi_{2k} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k}\bar{N} + b_{ij}\bar{N}_k$$

şi folosim din nou $(FG) + (FW)$:

$$\varphi_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u^k}\varphi_1 + \frac{\partial \Gamma^2_{ij}}{\partial u^k}\varphi_2 + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k}\bar{N} + \Gamma^1_{ij}(\Gamma^1_{1k}\varphi_1 + \Gamma^2_{1k}\varphi_2 + b_{1k}\bar{N}) + \Gamma^2_{ij}(\Gamma^1_{2k}\varphi_1 + \Gamma^2_{2k}\varphi_2 + b_{2k}\bar{N}) +$$

$$+ b_{ij}(-g^{1s}b_{sk}\varphi_1 - g^{2s}b_{sk}\varphi_2).$$

Regrupăm după vectorii reperului Gauss:

$$\varphi_{ijk} = \left(\frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^1_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^1_{2k} - b_{ij}g^{1s}b_{sk}\right)\varphi_1 + \left(\frac{\partial \Gamma^2_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^2_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - b_{ij}g^{2s}b_{sk}\right)\varphi_2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^1_{ij}b_{1k} + \Gamma^2_{ij}\varphi_{2k}\right)\bar{N}. \tag{12.6}$$

Schimbăm $j \leftrightarrow k$:

$$\varphi_{ikj} = \left(\frac{\partial \Gamma^1_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^1_{ik}\Gamma^1_{1j} + \Gamma^2_{ik}\Gamma^1_{2j} - b_{ik}g^{1s}b_{sj}\right)\varphi_1 + \left(\frac{\partial \Gamma^2_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^1_{ik}\Gamma^2_{1j} + \Gamma^2_{ik}\Gamma^2_{2j} - b_{ik}g^{2s}b_{sj}\right)\varphi_2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^1_{ik}b_{1j} + \Gamma^2_{ik}\varphi_{2j}\right)\bar{N}. \tag{12.7}$$

Egalitatea $\varphi_{ijk} = \varphi_{ikj}$ citită pe cele trei componente ale relaţiilor (12.6), (12.7) conduc la cele trei ecuaţii cerute. □

Consecinţa cea mai importantă a rezultatului precedent este aşa-numita Teoremă de Aur a lui Gauss care, în esenţă, este unul din cele mai uimitoare şi remarcabile rezultate din Matematică. Astfel, deşi ingredientele noţiunii de curbură totală nu au caracter intrinsec, rezultatul lor este intrinsec:

Teorema Egregium (Gauss) 12.3 *Curbura totală este un invariant intrinsec al lui S.*

Demonstraţie Cum $K = \frac{\det II}{\det I}$ este suficient de arătat că $\det II$ este un invariant intrinsec al lui S. Dar, acest fapt este consecinţă a ecuaţiei (EG). □

O afirmaţie echivalentă cu Teorema Egregium este următoarea:

Teorema Egregium (variantă) 12.4 *Fie S_1 şi S_2 două suprafeţe regulate, orientabile, scufundate şi $f : S_1 \to S_2$ o izometrie. Atunci pentru orice $P \in S_1$ avem $K_{S_1}(P) = K_{S_2}(f(P))$.*

O observaţie importantă este aceea că Teorema 12.4 nu admite reciprocă! Există exemple de perechi de suprafeţe (S_1, S_2) şi o funcţie netedă $f : S_1 \to S_2$ astfel încât $K_1(P) = K_2(f(P))$ pentru orice $P \in S_1$ dar f nu este izometrie.

Finalizăm Cursul cu o altă metodă de calcul a curburii toale ce va revala din nou caracterul intrinsec al acestui invariant. Vom scrie forma a I-a fundamentală sub forma:

$$g = I = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 \tag{12.8}$$

unde ω^1, ω^2 sunt două 1-forme diferenţiale *ortonormate*; se arată că acest lucru este posibil întotdeauna dar vom exemplifica în continuare acest fapt pe suprafeţe concrete. Mai în detaliu, dacă $F = 0$ atunci luâm:

$$\omega^1 = \sqrt{E}du, \quad \omega^2 = \sqrt{G}dv. \tag{12.9}$$

Revenind la cazul general (12.8) se arată că există o matrice antisimetrică de 1-forme:

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 \\ \omega_2^1 & 0 \end{pmatrix}$$

aşa încât prin diferenţiere avem:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i \tag{12.10}$$

sau matriceal:

$$d(\omega^1, \omega^2) = (\omega^1, \omega^2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 \\ \omega_2^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.11}$$

Aceste relaţii se numesc *ecuaţiile de structură* ale suprafeţei. Prin reţinerea doar a 1-formei $\omega_1^2 = -\omega_2^1$ ele devin:

$$\begin{cases} d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega_1^2 \\ d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2 \end{cases} \tag{12.12}$$

unde d este operatorul *diferenţială exterioară* iar $\wedge$ este *produsul exterior*. Reamintim că: $d \circ d = d^2 = 0$ şi $\omega \wedge \omega = 0$!

Atunci curbura totală este dată de formula:

$$d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2. \tag{12.13}$$

Exemplul 12.5 (Elicoidul) Reamintim că forma I-a a elicoidului este:

$$g = I = du^2 + (u^2 + h^2)dv^2. \tag{12.14}$$

Rezultă, cu expresiile de mai sus pentru ω_i:

$$\omega^1 = du, \quad \omega^2 = \sqrt{u^2 + h^2}dv. \tag{12.15}$$

Ecuaţiile de structură devin:

$$\begin{cases} d\omega^1 = d^2u = 0 = -\omega^2 \wedge \omega_1^2 \\ d\omega^2 = d(\sqrt{u^2+h^2}dv) = \frac{u}{\sqrt{u^2+h^2}}du \wedge dv + \sqrt{u^2+h^2}d^2v = \frac{u}{\sqrt{u^2+h^2}}du \wedge dv = \omega^1 \wedge \frac{u}{\sqrt{u^2+h^2}}dv = du \wedge \omega_1^2. \end{cases} \tag{12.16}$$

Prin urmare, din a doua ecuaţie deducem:

$$\omega_1^2 = \frac{u}{\sqrt{u^2+h^2}}dv. \tag{12.17}$$

Diferenţiem această 1-formă:

$$d\omega_1^2 = d\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+h^2}}\right) \wedge dv + \frac{u}{\sqrt{u^2+h^2}}d^2v = \frac{\sqrt{u^2+h^2} - \frac{u}{\sqrt{u^2+h^2}}}{u^2+h^2}du \wedge dv = \frac{h^2}{(u^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}du \wedge dv =$$

$$= -K\sqrt{u^2+h^2}du \wedge dv$$

ceea ce dă rezultatul final:

$$K = -\frac{h^2}{(u^2+h^2)^2} \tag{12.18}$$

în acord cu exerciţiile S10.4 şi S11.3.

SEMINARUL 12

S12.1 Să se arate că într-o parametrizare ortogonală a lui S, i.e. $F = 0$, avem:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right] \tag{12.19}$$

unde indicele inferior indică derivarea parţială în raport cu acea variabilă.

Rezolvare Metoda I. Teorema Egregium dă următoarea formulă pentru curbura Gauss:

$$2\sqrt{EG-F^2}K = \left(\frac{FE_v - EG_u}{E\sqrt{EG-F^2}}\right)_u + \left(\frac{2EF_u - FE_u - EE_v}{E\sqrt{EG-F^2}}\right)_v \tag{12.20}$$

şi din ipoteza $F = 0$ avem relaţia cerută.

Metoda II (cu ecuaţii de structură). Avem: $\omega^1 = \sqrt{E}du$, $\omega^2 = \sqrt{G}dv$; deci ecuaţiile de structură devin:

$$\begin{cases} -\frac{E_v}{2\sqrt{E}}du \wedge dv = \sqrt{G}\omega_1^2 \wedge dv \\ \frac{G_u}{2\sqrt{G}}du \wedge dv = \sqrt{E}du \wedge \omega_1^2 \end{cases}$$

ceea ce conduce la:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{E_v}{\sqrt{EG}}du + \frac{G_v}{\sqrt{EG}}dv\right].$$

Avem atunci:

$$d\omega_1^2 = -K\sqrt{EG}du \wedge dv = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right]du \wedge dv$$

ceea ce dă formula cerută.

Alte formule pentru curbura Gauss:
1) dacă $g = g_{11}(du^2 + dv^2)$ atunci: $K = -\frac{\Delta(\ln g_{11})}{2g_{11}}$; coordonatele (u, v) se numesc *isotermale*=izotermice, în engleză *isothermal coordinates*,
2) dacă $g = 2g_{12}dudv$ atunci: $K = -\frac{1}{g_{12}}\frac{\partial^2 \ln g_{12}}{\partial u \partial v}$.

S12.2 Să se calculeze curbura Gauss dacă S este raportată la coordonate polare geodezice şi să se integreze cazul $K = -1$.

Rezolvare Aplicăm exerciţiul precedent şi avem:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{G_r}{\sqrt{G}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{G_r}{2\sqrt{G}}\right).$$

Dar ultima paranteză este exact $\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}$ şi în concluzie:

$$K = -\frac{\partial_r^2\sqrt{G}}{\sqrt{G}}. \tag{12.20}$$

Pentru a integra cazul $K = -1$ căutăm $\sqrt{G}(r, \varphi)$ de forma $x(r)$ şi avem ecuaţia diferenţială ordinară: $x'' = x$. Datele iniţiale (Cauchy) pentru această ecuaţie sunt: $x(0) = 0$ şi $x'(0) = 1$. Soluţia unică este: $x(r) = shr$ şi deci: $G(r, \varphi) = sh^2 r$.

S12.3 Se cere curbura Gauss a unei suprafeţe cu reţea Cebîşev.

Rezolvare Din relaţia (12.18) avem:

$$\sqrt{1 - F^2}K = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F_u}{\sqrt{1 - F^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-\sin\varphi \cdot \varphi_u}{\sin\varphi}\right)$$

ceea ce dă exact relaţia (11.29):

$$K = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v}.$$

S12.4 Se cere curbura Gauss a suprafeţei de rotaţie $S : x^2 + y^2 = f^2(z)$ şi să se integreze cazul $K = -1$. Caz particular: $S(O, R)$ cu $f(u) = \sqrt{R^2 - u^2}$

Rezolvare Parametrizăm S astfel $S : \varphi(u, v) = (f(u)\cos v), f(u)\sin v, u)$. Avem: $\varphi_u = (f'\cos v, f'\sin v, 1)$ şi $\varphi_v = (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0)$ de unde rezultă: $g = (1 + (f'(u))^2)du^2 + f^2(u)dv^2$. Aplicând formula (12.18) obţinem:

$$K = -\frac{f''(u)}{f(u)[1 + (f'(u))^2]^2}.$$

Prin urmare cazul $K = -1$ conduce la ecuaţia diferenţială: $f'' = f(u)[1 + (f'(u))^2]^2$.
Pentru sfera $S(O, R)$ reobţinem rezultatul cunoscut $K = \frac{1}{R^2}$.
Singurii simboli Christoffel nenuli sunt:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{f'f''}{1 + (f')^2}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{f'}{f}, \quad \Gamma^1_{22} = \frac{-ff'}{1 + (f')^2}.$$

S12.5 Se cere curbura Gauss a suprafeţei de rotaţie $S : z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ şi să se analizeze cazurile $K = -1$ şi $K = 0$.

Rezolvare Parametrizăm S astfel $S : \varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, f(u))$ şi deci: $\varphi_u = (\cos v, \sin v, f'(u))$, $\varphi_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$. Rezultă: $g = [1 + (f'(u))^2]du^2 + u^2dv^2$ şi aplicând formula (12.17) avem:

$$K = -\frac{1}{u\sqrt{1+(f'(u))^2}}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(f'(u))^2}}\right).$$

Cu notaţia $\varphi(u) = \frac{1}{1+(f'(u))^2}$ avem: $K = -\frac{\varphi'(u)}{2u}$. Pentru $K = -1$ putem integra $\varphi(u) = u^2 + c$ de unde rezultă: $f(u) = \int \sqrt{\frac{1}{u^2+c} - 1}du$. Pentru $c = 0$ găsim:

$$f(u) = \sqrt{1-u^2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{1-u^2}) + \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{1-u^2})$$

deci $u \in (-1,1)$. Pentru $K = 0$ avem $\varphi = c$=constant, deci $f' = C_1$=constant de unde rezultă $f(u) = C_1u + C_2$.

S12.6 Fie S un deschis din planul euclidian $\mathbb{R}^2$ cu forma I-a fundamentală *conformă* cu metrica euclidiană: $g_{ij} = E\delta_{ij} = e^{2v}\delta_{ij}$. Presupunem că $E = E(r)$ i.e. $v = v(r)$; spunem că g este *rotaţional simetrică*. Se cere curbura Gauss şi să se analizeze cazul $K = -1$. Exemplu: $E = \frac{4}{(1-r^2)^2}$.

Rezolvare Cu relaţia (12.17) obţinem:

$$K = -\frac{1}{2E^2}\left(E''(r) + \frac{1}{r}E'(r)\right)^2 = -\left(v''(r) + \frac{1}{r}v'(r)\right)e^{-2v}.$$

Cazul $K = -1$ conduce la ecuaţia diferenţială: $v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = e^{2v(r)}$ iar pentru exemplu obţinem: $K = -32\frac{(1+2r^2)^2}{(1-r^2)^4}$.

S12.7 Pentru suprafaţa Monge $S : z = f(x,y)$ şi punctul fixat $P(x,y,f(x,y)) \in S$ să se arate că:

$$K(P) = (1 + \|\nabla f(x,y)\|^2)^{-2}\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}\right)(x,y).$$

Rezolvare Temă.

S12.8 Se cere curbura sferei $S(O,R)$ cu ecuaţii de structură.

Rezolvare Din $g = R^2du^2 + R^2\cos^2 u dv^2$ rezultă: $\omega^1 = Rdu$, $\omega^2 = R\cos u dv$. Ecuaţiile de structură:

$$d\omega^1 = 0 = -\omega^2 \wedge \omega^2_1, \quad d\omega^2 = -R\sin u du \wedge dv = Rdu \wedge \omega^2_1$$

dau: $\omega^2_1 = -\sin u du$. Rezultă:

$$d\omega^2_1 = -\cos u du \wedge dv = -R^2\cos u K du \wedge dv$$

cu rezultatul cunoscut: $K = \frac{1}{R^2}$.

S12.9 Se cere curbura pseudosferei cu ecuaţii de structură.

Rezolvare Din exerciţiul S9.11 avem metrica $g = R^2 ctg^2 u du^2 + R^2 \sin^2 u dv^2$ şi deci: $\omega^1 = Rctgudu$, $\omega^2 = R \sin u dv$. A doua ecuaţie de structură dă:

$$d\omega^2 = Rctgudu \wedge d\omega_1^2 = R \cos u du \wedge dv$$

adică: $\omega_1^2 = \sin u du$. Rezultă:

$$d\omega_1^2 = \cos u du \wedge dv = -R^2 \cos u K du \wedge dv$$

ceea ce dă rezultatul cunoscut: $K = -\frac{1}{R^2}$.

S12.10 Se cere curbura metricii *warped* $g = du^2 + f^2(u)dv^2$ cu ecuaţii de structură.

Rezolvare Din $\omega^1 = du$, $\omega^2 = f(u)dv$ rezultă a doua ecuaţie de structură:

$$d\omega^2 = f'(u)du \wedge dv = du \wedge \omega_1^2$$

ceea ce dă: $\omega_1^2 = f'(u)dv$. Prin urmare:

$$d\omega_1^2 = f'' du \wedge dv = -K f du \wedge dv$$

ceea ce implică:

$$K = -\frac{f''(u)}{f(u)}. \tag{12.21}$$

Pentru $f = \sqrt{G}$ reobţinem (12.20) adică metricele în coordonate polare geodezice. Pentru $K = 1$ obţinem ecuaţia diferenţială $f'' + f = 0$ cu soluţai generală $f_{A,B}(u) = A \cos u + B \sin u = A \cos(u + u_0)$. Alegând $A = 1$ şi $u_0 = 0$ reobţinem metrica sferei S^2.

S12.11 Se cere curbura metricii Poincaré $g = \frac{1}{v^2}\left[du^2 + dv^2\right]$; a se vedea Exemplul 14.9.

Rezolvare Din $\omega^1 = \frac{du}{v}$, $\omega = \frac{dv}{v}$ rezultă prima ecuaţie de structură:

$$d\omega^1 = -\frac{1}{v^2} dv \wedge du = -fracdvv \wedge \omega_1^2$$

ceea ce dă: $\omega_1^2 = \frac{du}{v} = \omega^1$. Prin urmare:

$$d\omega_1^2 = \frac{1}{v^2} du \wedge dv = -K \frac{1}{v^2} du \wedge dv$$

ceea ce dă: $K = -1$ constant negativă!

Cursul 13

Curbe pe o suprafaţă: reperul Darboux

Fixăm suprafaţa regulată, orientabilă, scufundată $S : \bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$. De asemenea, fixăm o curbă C pe S dată de $C : u^i = u^i(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Deci:

$$C : \bar{r}_C(t) = \bar{r}(u^i(t)), t \in I.$$

Pentru simplificarea calculelor vom presupune curba ca fiind parametrizată canonic.

Curba C fiind în spaţiu îi ataşăm, conform teoriei Frenet, reperul Frenet $\{T, N, B\}$ şi invarianţii k, τ. Dar, fiind pe S putem asocia lui C un nou reper care să facă legătura dintre C şi S.

Definiţia 13.1 Numim *reperul Darboux* al perechii (C, S) reperul $RD(\bar{r}_C(s)) = \{\bar{r}_C(s) : T(s), N_g(s), \bar{N}(s)\}$ unde versorul N_g se numeşte *normala tangenţială* la curba C şi este astfel ales încât reperul să fie pozitiv orientat.

Avem deci:

$$N_g(s) = \bar{N}(s) \times T(s). \tag{13.1}$$

Pentru a obţine ecuaţiile de mişcare ale reperului Darboux considerăm $\theta(s)$ unghiul orientat dintre $N(s)$ şi $\bar{N}(s)$. Să observăm că versorii $\bar{N}(s)$, $N(s)$, $B(s)$ sunt în acelaţ plan, normal la $T(s)$, iar ultimii doi sunt ortogonali. Rezultătunci relaţia (în care renunţăm la argumentul s pentru simplificarea scrierii):

$$\bar{N} = \cos\theta N + \sin\theta B \tag{13.2}$$

şi combinând aceste două relaţii avem:

$$N_g = \sin\theta N - \cos\theta B. \tag{13.3}$$

Relaţiile $(13.2 - 3)$ exprimă deci reperul Darboux în funcţie de cel Frenet:

$$\begin{pmatrix} T \\ N_g \\ \bar{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \tag{13.4}$$

ceea ce conduce la primul set de ecuaţii de mişcare:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N_g \\ \bar{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k\sin\theta & \cos\theta(\tau+\theta') & \sin\theta(\tau+\theta') \\ -k\cos\theta & -\sin\theta(\tau+\theta') & \cos\theta(\tau+\theta') \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \tag{13.5}$$

Dar, putem inversa relaţiile (13.4):

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N_g \\ N \end{pmatrix}. \tag{13.6}$$

Obţinem deci:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N_g \\ \bar{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k\sin\theta & k\cos\theta \\ -k\sin\theta & 0 & \tau+\theta' \\ -k\cos\theta & -(\tau+\theta') & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N_g \\ \bar{N} \end{pmatrix} \tag{13.7}$$

numite, bineînţeles, *ecuaţiile Darboux* ale perechii (C, S)

Renotăm:
-$k_g = k\sin\theta$ şi o numim *curbura geodezică*,
-$k_n = k\cos\theta$,
-$\tau_g = \tau + \theta'$ şi o numim *torsiunea geodezică*.

Propoziţia 13.2 $\tilde{k}_n$ *este tocmai curbura normală* $k_{P(s)}$ *cu* $P(s)$ *punctul generic pe curba dată.*

Demonstraţie Din a treia ecuaţie (13.5) avem:

$$\tilde{k}_n = -< \frac{d\bar{N}}{ds}, T > .$$

Cum $< T, \bar{N} >= 0$ rezultă:

$$\tilde{k}_n =< \frac{dT}{ds}, \bar{N} >=< \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \bar{N} >$$

şi comparând cu relaţiile (9.11) rezultă:

$$\tilde{k}_n = II(P)(T, T) = k_{\bar{r}(s)}$$

deoarece $T(s)$ este versor. Avem deci concluzia. □

Cazurile de egalitate pentru inegalitatea precedentă sunt precizate de:

Prin urmare putem scrie ecuaţiile Darboux:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N_g \\ \bar{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N_g \\ \bar{N} \end{pmatrix}.$$

SEMINAR 13

S13.1 .

Rezolvare .

S13.2 .

Rezolvare .

S13.3 .

Rezolvare .

S13.4 .

Rezolvare .

S13.5 .

Rezolvare .

S13.6 .

Rezolvare .

S13.7 .

Rezolvare .

Cursul 14

Geodezice

Fie suprafaţa $S : \bar{r} = \bar{r}(u, v) = \bar{r}(u^1, u^2) = \bar{r}(u^i), (u^i) = (u^1, u^2) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$. Deci în orice punct al lui S avem *reperul Gauss* $\{P(\bar{r}) : \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{N}\}$. Reamintim *formula Gauss*:

$$\bar{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\bar{r}_k + b_{ij}\bar{N} \tag{FG}$$

unde $b = (b_{ij})$ este *forma a doua fundamentală* iar Γ sunt *simbolii Christoffel*:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{ka}\left(\frac{\partial g_{aj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ia}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^a}\right).$$

Avem că $g = (g_{ij})$ este *forma întîia fundamentală* a lui S iar $g^{-1} = (g^{ij})$ este inversa matricii g.

Fixăm o curbă C pe S dată de $C : u^i = u^i(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Deci:

$$C : \bar{r}_C(t) = \bar{r}(u^i(t)), t \in I. \tag{14.1}$$

Definiţia 14.1 Curba C se numeşte *geodezică a lui S* dacă pentru orice $t \in I$ avem:

$$\boxed{\ddot{\bar{r}}_C(t) \parallel \bar{N}(\bar{r}_C(t))} \tag{G}$$

adică în orice punct P al curbei C vectorul acceleraţie $\ddot{\bar{r}}_C(P)$ este perpendicular pe planul tangent T_PS.

Interpretare fizică Rezultă că pentru un "locuitor" al lui S curba C *nu are* acceleraţie; altfel spus o particulă cu traiectoria C se mişcă *cu viteza constantă* de-a lungul lui C pe S.

Reamintim şi Legea a II-a a dinamicii newtoniene: Forţa = masa înmulţotă cu acceleraţia, $\bar{F} = m\bar{a}$. Deci $\bar{a} = 0$ este echivalent cu absenţa forţei. În concluzie, un punct material în mişcare liberă (fără forţe) sau acţionat de o forţă perpendiculară mereu pe S are ca traiectorie o geodezică a lui S.

Observaţia 14.2 Dacă S conţine dreapta d atunci, cum $\ddot{\bar{r}}$ este nul pentru o dreaptă, rezultă că d este geodezică pe S. Prin urmare, dreptele sunt geodezice ale planului euclidian şi mai general, ale oricărei suprafeţe riglate !

Să deducem ecuaţiile geodezicelor. Din (13.1) avem:

$$\dot{\bar{r}}_C(t) = \bar{r}_i(u^j(t))\dot{u}^i(t), \tag{14.2}$$

$$\ddot{\bar{r}}_C(t) = \bar{r}_{ij}(u^a(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) + \bar{r}_k(u^a(t))\ddot{u}^k(t). \tag{14.3}$$

Introducând ecuaţiile Gauss în (13.3) avem:

$$\ddot{\bar{r}}_C(t) = (\ddot{u}^k(t) + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t))\bar{r}_k(u^a(t)) + b_{ij}\bar{N} \tag{14.3}$$

şi deci avem:

Teorema 14.3 *Sistemul diferenţial al geodezicelor este:*

$$\boxed{\ddot{u}^k(t) + \Gamma^k_{ij}(u^a(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) = 0} \tag{SG}$$

sau încă:

$$\begin{cases} \ddot{u}^1(t) + \Gamma^1_{ij}(u^a(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) = 0 \\ \ddot{u}^2(t) + \Gamma^2_{ij}(u^a(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) = 0. \end{cases} \tag{14.4}$$

Consecinţe remarcabile 14.4

1. Din expresia simbolilor Christoffel rezultă că teoria geodezicelor aparţine geometriei intrinseci a lui S. Altfel spus, geodezicele sunt obiecte intrinseci ale lui S.
2. Sistemul (SG) este neliniar deci rezolvarea lui explicită este foarte dificilă sau chiar imposibilă.
3. Ştim de la Cursul de Ecuaţii Diferenţiale că problema Cauchy are soluţie unică. Avem deci:

Teorema 14.5 *Fie punctul $P_0(u^i_0) \in S$ fixat şi vectorul tangent $V \in T_{P_0}S$ cu $\|V\| = 1$. Atunci există $\varepsilon = \varepsilon(P_0, V) > 0$ şi o unică geodezică C, $\bar{r}_C : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ parametrizată canonic şi satisfăcând datelor iniţiale*:
1) $C(0) = P_0$,
2) $\dot{\bar{r}}_C(0) = V$.

Să studiem simbolii Christoffel. Ei sunt în număr de $2^3 = 8$ dar avem o simetrie ce reduce numărul lor. Astfel, din simetria $g_{ij} = g_{ji}$ a formei I-a fundamentale rezultă:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \tag{14.5}$$

ceea ce reduce numărul lor la 6 esenţiali: $\Gamma^1_{ij}, \Gamma^2_{ij}$ cu $(i,j) \in \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$.

Exemplul 14.6 (**Planul**) Ştim că dreptele din plan, parametrizate constant (!), sunt geodezice. În fapt, acestea sunt toate. În adevăr, putem considera planul ca fiind xOy deci $\bar{r}(u^i) = (u^1, u^2, 0), (u^i) \in U = \mathbb{R}^2$. Avem atunci $g_{ij} = \delta_{ij}$ şi deci $\Gamma = 0$. Sistemul geodezicelor devine $\ddot{u}^i = 0$ cu soluţia unică $u^i(s) = u^i_0 + sv^i_0$. Acestea sunt dreptele ce trec prin $P_0(u^1_0, u^2_0)$ şi au versorul director $V = (v^1_0, v^2_0)$.

Un rezultat foarte important, ce apare ca rescriere a Interpretării fizice, este:

Teorema 14.7 *Dacă $C : \bar{r} = \bar{r}_C(t), t \in I \subset \mathbb{R}$ este o geodezică pe S atunci funcţia $t \in I \to \|\dot{\bar{r}}_C(t)\| \in \mathbb{R}$ este constantă.*

Demonstraţie $\frac{d}{dt}\|\dot{\bar{r}}_C(t)\|^2 = 2 < \ddot{\bar{r}}_C(t), \dot{\bar{r}}_C(t) >= 0$ deoarece $\ddot{\bar{r}}_C(t) \perp \dot{\bar{r}}_C(t)$. □

Corolarul 14.8 *Fie C geodezica $\bar{r}_C : (a,b) \in \mathbb{R} \to S$.*
1. *Fie $\varphi : (d,e) \to (a,b)$ o aplicaţie netedă (C^∞). Atunci $\varphi \circ C$ este geodezică dacă şi numai dacă există numerele reale m, n aşa încât $\varphi(t) = mt + n$. Deci singurele reparametrizări ce*

invariază caracterul de geodezică sunt cele afine !
2. *Presupunem că aplicaţia* $\bar{r}_C$ *este difeomorfism de la* (a,b) *la* $C(a,b) \subset \mathbb{R}^3$. *Fie* $\tilde{C} : (d,e) \to S$ *cu* $\tilde{C}(d,e) \subset C(a,b)$. *Atunci* $\tilde{C}$ *este geodezică dacă şi numai dacă funcţia* $t \in (d,e) \to \|\dot{\tilde{C}}(t)\|$ *este constantă.*

Natura variaţională a geodezicelor Pe S avem (u^i) coordonatele unui punct iar un vector tangent oarecare are coordonatele (v^i). Reamintim că mulţimea $TS = \cup_{P \in S} T_P S$ se numeşte *fibratul tangent al lui* S şi un element al său are coordonatele (u^i, v^i). O funcţie $L : TS \to \mathbb{R}$ se numeşte *Lagrangian* dacă este netedă admiţând că ştim faptul că pe TS se poate face uin calcul diferenţial analog celui de pe S, variind doar dimensiunea: $dimS = 2$, $dimTS = 4$. Unui Lagrangian i se asociaza *ecuaţiile Euler-Lagrange*:

$$\boxed{E_i(L) := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial u^i} = 0}. \tag{EL}$$

Rezultatul fundamental al acestei teorii este faptul că geodezicele sunt soluţiile sistemului Euler-Lagrange pentru Lagrangianul *Energie* al metricii g:

$$E(g) = \frac{1}{2} g_{ij}(u^a) v^i v^j \tag{Eg}$$

iar în (EL) vom considera $v^i = \dot{u}^i$. Teorema 13.7 de parametrizare constantă a geodezicelor se reduce în acest cadru la *Conservarea energiei*: $E(g)$ este integrală primă pentru sistemul Euler-Lagrange şi drept consecinţă *reduce* cu 1 numărul ecuaţiilor ce sunt necesare a fi studiate !

De asemeni, dacă forma a I-a fundamentală nu depinde de variabila u^i cu $i \in \{1,2\}$ atunci sistemul diferenţial Euler-Lagrange admite integrala primă $\frac{\partial L}{\partial v^i} = g_{ij}(u)v^j$=constant !

Exemplul 14.9 (**Semiplanul superior**) Modelul Poincaré al *geometriei hiperbolice* are ca suport următoarea varietate 2-dimensională (care nu se poate realiza ca suprafaţă) $H^2 = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : u^2 > 0\}$ înzestrată cu metrica:

$$g_h = \frac{1}{(u^2)^2}\left[(du^1)^2 + (du^2)^2\right]. \tag{14.6}$$

Energia acestei metrici este deci:

$$E(g_h) = \frac{1}{2(u^2)^2}[(v^1)^2 + (v^2)^2] \tag{14.7}$$

cu ecuaţiile Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} E_1(E(g_h)) = \frac{d}{dt}[\frac{v^1}{(u^2)^2}] = 0 \\ E_2(E(g_h)) = \frac{d}{dt}[\frac{v^2}{(u^2)^2}] - \frac{-1}{(u^2)^3}[(v^1)^2 + (v^2)^2] = 0. \end{cases} \tag{14.8}$$

Din prima ecuaţie avem integrala primă:

$$\dot{u}^1 = C_1 (u^2)^2 \tag{14.9}$$

cu C_1 număr real arbitrar. În ecuaţia a doua după efectuarea derivării şi eliminarea numitorului comun $(u^2)^3$ avem:

$$\ddot{u}^2 u^2 - 2(\dot{u}^2)^2 + C_1^2 (u^2)^4 + (\dot{u}^2)^2 = 0 \tag{14.10}$$

adică:

$$\ddot{u}^2 u^2 - (\dot{u}^2)^2 + C_1^2 (u^2)^4 = 0 \tag{14.11}$$

Împărţim prin $(u^2)^2$:

$$\frac{\ddot{u}^2 u^2 - (\dot{u})^2}{(u^2)^2} + C_1^2 (u^2)^2 = 0 \tag{14.12}$$

echivalent:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{u}^2}{u^2}\right) + C_1 \dot{u}^1 = 0 \tag{14.13}$$

care se integrează:

$$\frac{\dot{u}^2}{u^2} + C_1 u^1 = C_2. \tag{14.14}$$

Înmulţim ultima ecuaţie cu $(u^2)^2$:

$$\dot{u}^2 u^2 + C_1 u^1 (u^2)^2 = C_2 (u^2)^2. \tag{14.13}$$

Vom scoate $(u^2)^2$ din integrala primă (14.9) şi aici discuţia se împarte în două cazuri:
a) $C_1 = 0$; rezultă din (14.9) că $\dot{u}^1 = 0$, deci $u^1 = constant = u_0^1$ sunt geodezice. Acestea sunt drepte perpendiculare pe axa Ox.
b) $C_1 \neq 0$. Revenind la (14.13) avem:

$$u^2 \dot{u}^2 + u^1 \dot{u}^1 = \frac{C_2}{C_1} \dot{u}^1 \tag{14.14}$$

adică:

$$u^2 \dot{u}^2 + \dot{u}^1 (u^1 - u_0^1) = 0 \tag{14.15}$$

unde $u_0^1 = \frac{C_2}{C_1}$. Ultima ecuaţie se integrează:

$$(u^2)^2 + (u^1 - u_0^1)^2 = C_3 > 0 \tag{14.16}$$

care este un cerc cu centrul pe axa Ox în $x_0 = u_0^1$.

În concluzie, *toate geodezicele* lui (H^2, g_h) sunt:
1) semidrepte perpendiculare pe Ox situate în semiplanul superior,
2) semicercuri cu centrul pe Ox situate în semiplanul superior.

Să prezentăm o a doua metodă, cea care face apel la integrala Energiei şi care înlocuieşte calculele de după (14.9). Avem deci:

$$(\dot{u}^1)^2 + (\dot{u}^2)^2 = 1 \cdot (u^2)^2 \tag{14.17}$$

deci vom considera geodezice cu parametrizarea canonică. Folosind (14.9) cu $C_1 \neq 0$ avem:

$$\frac{(du^1)^2}{(dt)^2} + \frac{(du^2)^2}{(dt)^2} = \frac{du^1}{C_1 dt} \tag{14.18}$$

şi multiplicăm cu $\frac{(dt)^2}{(du^1)^2}$ (deci considerăm doar geodezice cu u^1 neconstant):

$$1 + \left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2 = \frac{dt}{C_1 du^1} = \frac{1}{C_1^2 (u^2)^2}. \tag{14.19}$$

Înmulţim această ecuaţie cu $(u^2)^2$ şi notăm $1/C_1^2$ cu R^2. Rezultă:

$$\left(u^2 \frac{du^2}{du^1}\right) = \sqrt{R^2 - (u^2)^2}$$

adică:

$$\frac{u^2 du^2}{\sqrt{R^2 - (u^2)^2}} = du^1$$

şi integrând această ultimă relaţie avem:

$$-\sqrt{R^2 - (u^2)^2} = u^1 - u_0^1$$

ceea ce coincide cu (14.16) pentru $R^2 = C_3 > 0$.

Exemplul 14.10 (**Suprafeţe de rotaţie**). Fie S o suprafaţă de rotaţie având pe Oz ca axă de rotaţie. Deci curba meridian este $C_m : \bar{r}(u) = (\varphi(u), \psi(u))$ în planul xOz. Reamintim forma I-a fundamentală:

$$g = [(\varphi')^2 + (\psi')^2](du)^2 + \varphi^2(dv)^2. \tag{14.20}$$

Vom presupune că C_m este parametrizată canonic; deci $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$. Energia acestei metrici este:

$$E(g) = \frac{1}{2}[(v^1)^2 + \varphi^2(u^1)(v^2)^2] \tag{14.21}$$

cu ecuaţiile Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} E_1(E(g)) = \frac{d}{dt}[v^1] - \varphi(u^1)\varphi'(u^1)(v^2)^2 = 0 \\ E_2(E(g)) = \frac{d}{dt}[\varphi^2(u^1)v^2] = 0. \end{cases} \tag{14.22}$$

Din a doua ecuaţie obţinem *integrala primă Clairaut*:

$$\varphi^2(u^1)\dot{u}^2 = constant. \tag{14.23}$$

Rezultă că toate curbele meridian C_{m,u_0^2} parametrizate constant ($\dot{u}^1 = v^1$ =const) deci cu $u^2 = constant = u_0^2$ sunt geodezice. Curbele paralele $u^1 = constant = u_0^1$ sunt geodezice dacă şi numai dacă $\varphi'(u_0^1) = 0$!

Exemplul 14.11 (**Cilindrul circular drept**) Avem $\varphi = constant = R$, $\psi(u) = u$. Se verifică imediat faptul că C_m este parametrizată canonic. Avem integrala primă Clairaut $R^2\dot{u}^2 = constant$, deci $\dot{u}^2 = constant = a_2$ şi deci putem integra $u^2 = a_2 t + b_2$. Cum $\varphi' = 0$ prima ecuaţie (14.19) se reduce la $\ddot{u}^1 = 0$ care se integrează complet: $u^1 = a_1 t + b_1$. În concluzie , geodezicele cilindrului sunt:

$$C : \bar{r}(t) = (R\cos(a_1 t + b_1), R\sin(a_1 t + b_1), a_2 t + b_2). \tag{14.24}$$

Dacă $a_2 = 0$ obţinem cercul paralel $z = b_2 = const$. Dacă $a_1 = 0$ obţinem generatoarea ce trece prin punctul $(R\cos(b_1), R\sin(b_1), b_2)$. Pentru $a_1 \neq 0$ obţinem o elice deoarece $\bar{r}'$ are a treia componentă constant egală cu b_2 !

SEMINARUL 14

S14.1 Se dau numerele reale a, b şi suprafaţa S cu parametrizarea globală $(\mathbb{R}^2, \varphi)$:

$$\varphi(u^1, u^2) = (a(u^1 + u^2), b(u^1 - u^2), u^1u^2).$$

Să se arate că liniile (curbele) de coordonate pe S sunt geodezice.

Rezolvare Avem: $\varphi_1(u^1, u^2) = (a, b, u^2)$, $\varphi_2(u^1, u^2) = (a, -b, u^1)$ şi deci:

$$\begin{cases} E = a^2 + b^2 + (u^2)^2 \\ F = a^2 - b^2 + u^1u^2 \\ G = a^2 + b^2 + (u^2)^2. \end{cases}$$

Energia metricii g va fi:

$$E(g) = \frac{1}{2}\{[a^2 + b^2 + (u^2)^2](v^1)^2\} + [a^2 - b^2 + u^1u^2]v^1v^2 + \frac{1}{2}\{[a^2 + b^2 + (u^1)^2]\}(v^2)^2$$

şi obţinem ecuaţiile Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\{[a^2 + b^2 + (u^2)^2]v^1 + (a^2 - b^2 + u^1u^2)v^2\} - [u^2v^1v^2 + u^1(v^2)^2] \\ \frac{d}{dt}\{(a^2 - b^2 + u^1u^2)v^1 + [a^2 + b^2 + (u^1)^2]v^2\} - [u^2(v^1)^2 + u^1v^1v^2]. \end{cases}$$

Efectuând calculele obţinem:

$$\begin{cases} 2u^2v^1v^2 + [a^2 + b^2 + (u^2)]\dot{v}^1 + (a^2 - b^2 + u^1u^2)\dot{v}^2 = 0 \\ 2u^1v^1v^2 + (a^2 - b^2 + u^1u^2)\dot{v}^1 + [a^2 + b^2 + (u^1)^2]\dot{v}^2 = 0. \end{cases}$$

Fie curba $C : v = const$, adică $(u^1(t) = u^1_0 + \varepsilon, u^2(t) = u^2_0)$. Avem deci $(v^1(t) = 1, v^2(t) = 0)$ şi sunt satisfăcute ultimele ecuaţii. Analog pentru $C : u = const$ adică $(u^1(t) = u^1_0, u^2(t) = u^2_0 + \varepsilon)$ i.e. $(v^1(t) = 0, v^2(t) = 1)$.

S14.2 Să se studieze geodezicele elicoidului.

Rezolvare Avem metrica: $g = \frac{1}{2}[du^2 + (u^2 + h^2)dv^2]$ deci energia:

$$E(g) = \frac{(v^1)^2}{2} + [(u^1)^2 + h^2]\frac{(v^2)^2}{2} = \frac{\dot{u}^2}{2} + (u^2 + h^2)\frac{\dot{v}^2}{2}.$$

Ecuaţiile Euler-Lagrange sunt:

$$\begin{cases} E_1(E(g)) = \frac{d\dot{u}}{dt} - u\dot{v}^2 = 0 \\ \\ E_2(E(g)) = \frac{d}{dt}[(u^2 + h^2)\dot{v}] = 0. \end{cases}$$

Prin urmare, a doua ecuaţie Euler-Lagrange generează integrala primă:

$$(u^2 + h^2)\dot{v} = C_1.$$

S14.3 Să se studieze geodezicele lui $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ cu metrica euclidiană folosind coordonatele polare.

Rezolvare Să aflăm mai întâi expresia metricii euclidiene în coordonate polare. Din:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = t\sin\theta \end{cases}$$

rezultă:
$$\begin{cases} dx = dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta \\ dy = dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta \end{cases}$$
şi deci avem metrica:
$$g = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$
cu energia:
$$E(g) = \frac{1}{2}[(v^1)^2 + (u^1)^2(v^2)^2] = \frac{1}{2}[(\dot{u}^1)^2 + (u^1)^2(\dot{u}^2)^2] = \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2].$$
Ecuaţiile Euler-Lagrange sunt:
$$\begin{cases} E_1(E(g)) = \frac{d\dot{r}}{dt} - r\dot{\theta}^2 = 0 \\ E_2(E(g)) = \frac{d}{dt}[r^2\dot{\theta}] = 0. \end{cases}$$
Din a doua ecuaţie avem integrala primă:
$$r^2\dot{\theta} = C_1.$$
Pentru $C_1 = 0$ adică $\theta = const$ obţinem dreptele prin originea O !

S14.4 Să se studieze geodezicele unei *metrici warped* i.e. a unei metrici de tipul:
$$g(r,\theta) = dr^2 + G(r)d\theta^2.$$

Rezolvare Avem:
$$E(g) = \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + G\dot{\theta}^2]$$
cu ecuaţiile Euler-Lagrange:
$$\begin{cases} E_1(E(g)) = \frac{d\dot{r}}{dt} - \frac{G'}{2}(\dot{\theta})^2 = 0 \\ E_2(E(g)) = \frac{d}{dt}[G\dot{\theta}] = 0. \end{cases}$$
Din a doua ecuaţie avem integrala primă:
$$G(r)\dot{\theta} = C_1.$$
Exemple: 1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ cu metrica euclidiană în coordonate polare, $G(r) = r^2$; vezi exerciţiul 8.6.
2) elicoidul, $G(r) = r^2 + h^2$.
3) suprafeţe de rotaţie cu curba meridian parametrizată canonic, $G(r) = \varphi^2(r)$. Astfel, sfera $S(O,R)$ are $\varphi(u) = R\cos u$.

Vom deduce acum o altă ecuaţie diferenţială pentru geodezice diferite de curbele u=constant. Avem:
$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{du}{dt}} = \frac{\dot{v}}{\dot{u}} \tag{14.25}$$
respectiv:
$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{\dot{v}}{\dot{u}}\right) = \frac{1}{\frac{du}{dt}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{v}}{\dot{u}}\right) = \frac{1}{\dot{u}}\frac{\ddot{v}\dot{u} - \dot{v}\ddot{u}}{\dot{u}^2} = \frac{1}{\dot{u}^2}\ddot{v} - \frac{\dot{v}}{\dot{u}^3}\ddot{u}.$$

Înlocuim $\ddot{u}$ şi $\ddot{v}$ cu expresia corespunzătoare din sistemul diferenţial al geodezicelor:

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{1}{\dot{u}^2}\left(-\Gamma^2_{11}\dot{u}^2 - 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} - \Gamma^2_{22}\dot{v}^2\right) - \frac{\dot{v}}{\dot{u}^3}\left(-\Gamma^1_{11}\dot{u}^2 - 2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v} - \Gamma^1_{22}\dot{v}^2\right)$$

adică, folosind (14.25):

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})\frac{dv}{du} - \Gamma^2_{11} = 0 \tag{14.26}$$

care este noua ecuaţie diferenţială a geodezicelor.

Exemplu Planul Poincaré are coeficienţii Christoffel:

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{v} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{v} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{v} \end{pmatrix}. \tag{14.27}$$

Atunci ecuaţia (14.26) devine:

$$v'' = \frac{1}{v}(v')^2 - \frac{1}{v}$$

care se poate scrie:

$$vv'' + (v')^2 = -1.$$

Ultima ecuaaţie se integrează în raport cu variabila u:

$$vv' = u_0 - u$$

şi deci:

$$(u - u_0) + (vv') = 0.$$

Şi această ecuaţie se integrează:

$$\frac{1}{2}(u - u_0)^2 + \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}R^2.$$

Reobţinem astfel semicercurile cu centrul $(u_0, 0)$ pe axa Ox.

Cursul 15

Conexiuni liniare

Fixăm M^n o varietate diferenţiabilă netedă de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$.

Definiţia 15.1 i) Numim *conexiune liniară pe* M o aplicaţie $\nabla : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M)$, $(X, Y) \to \nabla_X Y$ cu proprietăţile:
CL1) este $C^\infty(M)$-liniară în primul argument: $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Y + g\nabla_Y Z$,
CL2) este $\mathbb{R}$-liniară în al doilea argument: $\nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha\nabla_X Y + \beta\nabla_X Z$,
CL3) satisface identitatea Leibniz în al doilea argument: $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$,
pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(M)$ şi orice $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$.
ii) Pentru $X \in \mathscr{X}(M)$ fixat aplicaţia $\nabla_X : \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$, $Y \to \nabla_X Y$ se numeşte *derivata covariantă relativ la* X. Dacă $\nabla_X Y = 0$ spunem că Y este ∇-*covariant constant în raport cu* X. Dacă $\nabla_X Y = 0$ pentru orice $X \in \mathscr{X}(M)$ spunem că Y este un câmp vectorial ∇-*paralel* sau ∇-*covariant constant*. Dacă ∇ este explicită din context nu mai scriem litera ∇ la aceste noţiuni.

Observaţia 15.2 a) Fie câmpul vectorial nul $0 \in \mathscr{X}(M)$; avem $\nabla_0 X = \nabla_X 0 = 0$ pentru orice $X \in \mathscr{X}(M)$.
b) Din condiţia CL3 avem că aplicaţia ∇ **nu este** câmp tensorial de tip $(1, 2)$; pentru acest fapt ar fi trebuit condiţia: $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y$ i.e. $C^\infty(M)$-liniaritatea şi în al doilea argument.
c) Se arată imediat că aplicaţia ∇ este *locală* în ambele argumnete i.e. dat punctul $p \in M$ vectorul $\nabla_X Y(p) \in T_pM$ depinde doar de $X(p) \in T_pM$ şi de valorile lui Y pe o vecinătate a lui p. Prin urmare, pentru un deschis $U \subset M$ şi $X, Y \in \mathscr{X}(U)$ avem că $\nabla_X Y \in \mathscr{X}(U)$

Propoziţia 15.3 *Există conexiuni liniare pe* M.

Demonstraţie Se utilizează partiţia unităţii asociată unui atlas dat pe M precum şi faptul că există o conexiune liniară pe deschişii lui $\mathbb{R}^n$. În adevăr, fie deschisul $U \subseteq \mathbb{R}^n$; atunci $X, Y \in \mathscr{X}(U)$ au expresia bf globală: $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Atunci se verifică imediat că plicaţia $(X, Y) \to D_X Y := X(Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j}$ este o conexiune liniară pe U. $\square$

Definiţia 15.4 Conexiunea D introdusă anterior o numim *conexiunea euclidiană pe* U.

În cele ce urmează vom da o explicaţie a denumirii acestei noţiuni foarte importantă din geometria varietăţilor diferenţiabile. Fie $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ o curbă netedă pe M. Aplicaţia netedă $V : I \to TM$ o numim *câmp vectorial de-a lungul lui* γ dacă $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ pentru orice $t \in I$. Fie $\mathscr{X}(\gamma)$ mulţimea acestor aplicaţii. $\mathscr{X}(\gamma)$ este nevidă deoarece *câmpul vectorial tangent* γ' aparţine lui $\mathscr{X}(\gamma)$. Exprimarea locală: fie harta locală $h = (U, x^1, ..., x^n)$ cu $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$. Pe deschisul $U \cap \gamma(I)$ avem ecuaţiile curbei γ: $x^i = x^i(t)$, $t \in I$, $1 \leq i \leq n$.

Atunci: $\gamma'(t) = \dot{x}^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M$ unde $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} = (x^i)'$ este derivata ordinară a funcţiei netede x^i. $\mathscr{X}(\gamma)$ este $C^\infty(M)$-modul deoarece $V \in \mathscr{X}(M)$ şi $f \in C^\infty(M)$ implică $fV \in \mathscr{X}(M)$. Dat $Y \in \mathscr{X}(M)$ oarecare avem *restricţia la* γ anume $Y|_\gamma \in \mathscr{X}(\gamma)$. Dăm următorul rezultat fără demonstraţie:

Propoziţia 15.5 *Fie conexiunea liniară* ∇ *şi curba netedă* γ. *Atunci există o aplicaţie* $\frac{D}{dt} : \mathscr{X}(\gamma) \to \mathscr{X}(\gamma)$ *unică relativ la proprietăţile următoare*:
DC1) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{D}{dt}V + \frac{D}{dt}W$, DC2) $\frac{D}{dt}(fV) = f'V + f\frac{D}{dt}V$,
DC3) *dacă* $V \in \mathscr{X}(\gamma)$ *este restricţia lui* $Y \in \mathscr{X}(M)$ *atunci*: $(\frac{D}{dt}V)(t) = \nabla_{\gamma'(t)}Y(\gamma(t))$.
Expresia din membrul drept este în acord cu proprietatea lui ∇ de a fi local; a se vedea Obseravţia 15.2c).

Definiţia 15.6 Aplicaţia $\frac{D}{dt}$ o numim *derivata covariantă indusă de* ∇ *de-a lungul lui* γ. Câmpul $V \in \mathscr{X}(\gamma)$ îl numim *paralel de-a lungul lui* γ dacă $\frac{D}{dt}V = 0$.

Observaţia 15.7 Propoziţia precedentă spune că $\frac{D}{dt}$ este un operator $\mathbb{R}$-liniar ce **nu este** $C^\infty(M)$-liniar! Mulţimea câmpurilor paralele de-a lungul lui γ este $Ker(\frac{D}{dt})$=$\mathbb{R}$-subspaţiu vectorial în $\mathbb{X}(\gamma)$.

Propoziţia 15.8 *Fie conexiunea liniară* ∇ *şi curba netedă* γ. *Fixăm* $t_0 \in I$ *şi vectorul tangent* $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$. *Atunci există un unic câmp* $V \in \mathscr{X}(\gamma)$ *ce este paralel de-a lungul lui* γ *şi satisface* $V(t_0) = V_0$.

Demonstraţie Rezultă direct din existenţa şi unicitatea soluţiei pentru Problema Cauchy. □

Definiţia 15.9 Câmpul paralel $V \in \mathscr{X}(\gamma)$ dat de rezultatul precedent se numeşte *transportul paralel al lui* V_0 *de-a lungul lui* γ *indus de conexiunea liniară* ∇.

Observatţia 15.10 Propoziţia precdentă spune că aplicaţia $P^\gamma_{t_0} : Ker(\frac{D}{dt}) \to T_{\gamma(t_0)}M$, $V \to V_0$ este bijecţie! Dar $P^\gamma_{t_0}$ este operator $\mathbb{R}$-liniar şi deci $P^\gamma_{t_0}$ este izomorfism $\mathbb{R}$-liniar. Consecinţe:
i) $dimKer(\frac{D}{dt}) = dimT_{\gamma(t_0)}M = n$,
ii) aplicaţia $P^\gamma_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$, $P^\gamma_{t_0,t_1} = P^\gamma_{t_1} \circ \left(P^\gamma_{t_0}\right)^{-1}$ este izomorfism de spaţii vectoriale reale fiind o compunere de izomorfisme liniare.

Definiţia 15.11 Izomorfismul $P^\gamma_{t_0,t_1}$ se numeşte *transportul paralel de-a lungul lui* γ *de la* t_0 *la* t_1 indus de conexiunea liniară ∇.

Dat vectorul tangent $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ avem că $P^\gamma_{t_0,t_1}(v) \in T_{\gamma(t_1)}M$ se obţine considerând câmpul paralel $\left(P^\gamma_{t_0}\right)^{-1}(v) \in \mathscr{X}(\gamma)$ şi luând valoarea acestui câmp la momentul t_1.

Proprietăţi ale transportului paralel:
TP1) $\left(P^\gamma_{t_0,t_1}\right)^{-1} = P^\gamma_{t_1,t_0}$, TP2) $T^\gamma_{t_1,t_2} \circ T^\gamma_{t_0,t_1} = P^\gamma_{t_0,t_2}$,
TP3) conexiunea liniară ∇ se poate reconstitui din transportul paralel. Fie punctul $p \in M$ fixat şi $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ cu $X(p) \neq 0$. Fie $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ curba integrală a lui X cu $\gamma(0) = p$. Atunci:

$$\nabla_X Y(p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(P^\gamma_{t,0}(Y(\gamma(t))) - Y(p)\right). \tag{15.1}$$

În cele ce urmează prezentăm expresia locală a unei conexiuni locale, posibilă datorită Observaţiei 15.2c). Fie deci harta locală $h = (U, x^1, ..., x^n)$ şi baza $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ a lui $\mathscr{X}(U)$.

Cum câmpul vectorial $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathscr{X}(U)$ rezultă că se descompune în baza dată: deci există un set de funcţii netede $\Gamma^k_{ij} \in C^\infty(U)$ pentru toţi indicii $i, j, k \in \{1, ..., n\}$ aşa încât:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{15.2}$$

relaţie ce dă expresia locală a lui ∇.

Definiţia 15.12 Funcţiile netede $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ se numesc *coeficienţii de conexiune* în harta dată.

Fie acum $X, Y \in \mathscr{X}(U)$ oarecare. Avem $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ şi $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Rezultă:

$$\nabla_X Y = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \left[\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} Y^j \frac{\partial}{\partial x^k} \right] = X^i Y^k_{;i} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{15.3}$$

unde:

$$Y^k_{;i} = \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} Y^j. \tag{15.4}$$

Uneori, pentru simplificarea scrierii se utilizează notaţia $Y^j_{,i} = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}$ şi deci:

$$Y^k_{;i} = Y^k_{,i} + \Gamma^k_{ij} Y^j \tag{15.5}$$

ceea ce spune că ∇ apare ca o *deformare* a derivării uzuale (parţiale) având caracter geometric!

Putem scrie acum problema Cauchy a transportului paralel: $X = \gamma'(t) = \dot{x}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ şi $Y = V = V^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j}$ este vectorul necunoscut. Avem pentru orice $k \in \{1, ..., n\}$:

$$0 = X^i Y^k_{;i} = \dot{x}^i(t) \left[\frac{\partial V^k}{\partial x^j}(t) + \Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) V^j(t) \right] = \frac{dV^k}{dt}(t) + \Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) \dot{x}^i(t) V^j(t) \tag{15.6}$$

la care adaugăm condiţia iniţială: $V^k(t_0) = V^k_0$.

SEMINAR 15

S15.1 Pe deschisul $U \subset \mathbb{R}^2$ se dă conexiunea liniară ∇ având nenuli doar coeficienţii:

$$\Gamma^1_{11}(x, y) = \frac{5}{x^2 + x - 6}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{3}{y^2 + 5y + 4}$$

(deci U este planul $\mathbb{R}^2$ fără punctele $(-3, -4), (-3, -1), (2, -4), (2, -1)$) şi curba $\gamma(t) = (t^2, t+1)$. Se consideră vectorul tangent $V_0 = (5, 2) \in T_pU$ cu $p = (0, 1)$. Se cere vectorul tangent în $q = (1, 2)$ ob ţinut prin transportul paralel al lui V_0 de-a lungul lui γ.

Rezolvare Avem $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(1)$ şi problema Cauchy:

$$\frac{dV^1}{dt}(t) + \frac{5}{(t^2)^2 + t^2 - 6} \cdot 2tV^1(t) = 0, \quad \frac{dV^2}{dt}(t) + \frac{3}{(t+1)^2 + 5(t+1) + 4} \cdot 1 \cdot V^2(t) = 0$$

cu data iniţială $(V^1(0) = 5, V^2(0) = 2)$. Prin integrare, cu funcţia logaritm, obţinem:

$$V^1(t) = a\frac{t^2 + 3}{t^2 - 2}, \quad V^2(t) = b\frac{t + 5}{t + 2}$$

cu a, b constante ce vor fi determinate din condiţia iniţială: $-a\frac{3}{2} = 5$, $b\frac{5}{2} = 2$. În concluzie:

$$V^1(t) = -\frac{10}{3}\frac{t^2+3}{t^2-2}, \quad V^2(t) = \frac{4}{5}\frac{t+5}{t+2}$$

şi deci: $V(1) = (\frac{40}{3}, \frac{8}{5})$.

S15.2 Pe varietatea M se dau $k \geq 2$ conexiuni liniare ∇^1, ..., ∇^k şi funcţiile $f_1, ..., f_k \in C^\infty(M)$ aşa încât: $f_1 + ... + f_k = \lambda$. Definim: $\nabla = f_1\nabla^1 + ... + f_k\nabla^k$. Să se arate că:
i) dacă $\lambda = 1$ atunci ∇ este conexiune liniară,
ii) dacă $\lambda = 0$ atunci ∇ este câmp tensorial de tip $(1, 2)$.

Rezolvare i) Se verifică definiţia. ii) Se verifică C^∞-biliniaritatea.

S15.3 Pe $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ se dă conexiunea euclidiană D. Se cer $\nabla_X Y$ şi $\nabla_Y X$ pentru:

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y} \tag{15.7}$$

unde r este raza polară: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rezolvare $\nabla XY = X(Y^1)\frac{\partial}{\partial x} + X(Y^2)\frac{\partial}{\partial y}$. Avem:

$$X(Y^1) = X\left(\frac{x}{r}\right) = -y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r}\right) = -\frac{y}{r}, \quad X(Y^2) = X\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{x}{r}$$

de unde rezultă: $\nabla_X Y = \frac{1}{r}X$. Analog: $\nabla_Y X = Y(X^1)\frac{\partial}{\partial x} + Y(X^2)\frac{\partial}{\partial y}$ cu:

$$Y(X^1) = -\frac{y}{r}, \quad Y(X^2) = \frac{x}{r}$$

ceea ce dă: $\nabla_Y X = \frac{1}{r}X$.

S15.4 .

Rezolvare .

S15.5 .

Rezolvare .

S15.6 .

Rezolvare .

S15.7 .

Rezolvare .

Cursul 16

Torsiunea şi curbura unei conexiuni liniare

Fixăm conexiunea liniară ∇ pe varietatea netedă M^n. Introducem două câmpuri tensoriale remarcabile asociate lui ∇:

Propoziţia 16.1 *Aplicaţia* $T : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ *dată de:*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{16.1}$$

este un câmp tensorial de tip $(1, 2)$ *pe* M.

Demonstraţia Trebuie verificată $C^\infty(M)$-biliniaritatea lui T. Dar observăm că T este antisimetrică:

$$T(X, Y) = -T(Y, X) \tag{16.2}$$

şi prin urmare e suficient de arătat $C^\infty(M)$-liniaritatea în al doilea argument:

$$T(X, fY) = \nabla_X(fY) - \nabla_{fY}X - [X, fY] = X(f)Y + f - \nabla_X Y - f\nabla_Y X - X(f)Y - f[X, Y] = fT(X, Y) \tag{16.3}$$

şi deci avem concluzia cerută. $\square$

Definiţia 16.2 Câmpul tensorial $T \in \mathscr{T}^1_2(M)$ se numeşte *câmpul tensorial de torsiune* al lui ∇. Pe scurt, îl numim *torsiunea* lui ∇.

Pentru expresia locală a lui T fie harta locală $h = (U, x^1, ..., x^n)$ în care ∇ are coeficienţii de conexiune Γ^k_{ij}. Componentele lui T în această hartă le notăm:

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = T^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{16.4}$$

astfel că pentru $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ cu expresiile $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ avem:

$$T(X, Y) = T^k_{ij}X^iY^j\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{16.5}$$

Funcţiile T^k_{ij} sunt netede i.e. $T^k_{ij} \in C^\infty(U)$ pentru orice $i, j, k \in \{1, ..., n\}$. Expresia lor rezultă imediat din:

$$T^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} - \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k} - 0 = \left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

ceea ce dă:

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}. \tag{16.6}$$

Această expresie conduce la următorul tip de conexiune liniară:

Definiţia 16.3 ∇ se numeşte *conexiune simetrică* dacă $T = 0$ i.e. $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Având expresia locală (16.6) putem proba caracterul tensorial al lui T şi prin comportarea la schimbări de hărţi locale $(U, x^a) \to (\tilde{U}, \tilde{x}^i)$ de forma:

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1, ..., x^n) = \tilde{x}^i(x^a) \tag{16.7}$$

cu rangul matricii Jacobiene $rank\left(\frac{\tilde{x}^i}{x^a}\right) = n$ ceea ce implică existenţa funcţiilor inverse:

$$x^a = x^a(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n) = x^a(\tilde{x}^i). \tag{16.8}$$

Schimbarea bazei canonice a lui $\mathscr{X}(U)$, $\frac{\partial}{\partial x^a} \to \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$ este:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^a} \tag{16.9}$$

deoarece $\frac{\partial}{\partial x^a}$ sunt componentele unui câmp vectorial=câmp tensorial de tip $(1, 0)$. Pentru schimbarea coeficienţilor de conexiune avem:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = \tilde{\Gamma}^k_{ij} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} = \tilde{\Gamma}^k_{ij} \frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^c} \tag{16.10}$$

cu:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = \nabla_{\frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i}} \left(\frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) = \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \left[\frac{\partial^2 x^b}{\partial \tilde{x}^j \partial x^a} \frac{\partial}{\partial x^b} + \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^j} \Gamma^c_{ab} \right] = \left(\frac{\partial^2 x^c}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} + \Gamma^c_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^c}. \tag{16.11}$$

Comparând ultimele două relaţii avem formula de schimbare a coeficienţilor de conexiune la o schimbare de hărţi:

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} \frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial^2 x^c}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} + \Gamma^c_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^j} \tag{16.12}$$

iar prezenţa derivatei parţiale de ordinul doi din membrul drept arată faptul că ∇ nu este câmp tensorial de tip $(1, 2)$ aşa cum s-a remarcat în Observaţia 15.2b)! În schimb, prin scăderea a două relaţii (16.12) cu a doua având rolul $i \leftrightarrow j$ obţinem:

$$\tilde{T}^k_{ij} \frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^k} = \Gamma^c_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^j} - \Gamma^c_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^i}. \tag{16.13}$$

În ultimul termen din membrul stâng facem $a \leftrightarrow b$ şi rezultă:

$$\tilde{T}^k_{ij} \frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^k} = T^c_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^j} \tag{16.14}$$

sau încă:

$$\tilde{T}^k_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^c} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^j} \tag{16.15}$$

ceea ce probează caracterul tensorial de tip $(1, 2)$ al lui T!

Propoziţia 16.4 *Pe varietatea M există conexiuni liniare simetrice.*

Demonstraţie Am arătat în Cursul precedent că pe M există măcar o conexiune liniară ∇. Fie atunci aplicaţia $\tilde{\nabla} : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ dată de:

$$\tilde{\nabla} := \nabla - \frac{1}{2}T \tag{16.16}$$

cu T torsiunea lui ∇. Un calcul imediat arată că şi $\tilde{\nabla}$ este conexiune liniară. Vrem torsiunea sa:

$$\tilde{T}(X,Y) = \nabla_X Y - \frac{1}{2}(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) - \nabla_Y X + \frac{1}{2}(\nabla_Y X - \nabla_X Y - [Y,X]) - [X,Y] = 0$$

ceea ce dă concluzia. De altfel, putem calcula coeficinţii conexiunii $\tilde{\nabla}$:

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} = \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} - T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \left(\Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}T^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

şi deci:

$$\tilde{T}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}\right) \tag{16.17}$$

ceea ce arată din nou simetria lui $\tilde{\nabla}$. $\square$

Inspiraţi de formula (16.16) ne punem problema generală diferenţei a două conexiuni liniare:

Propoziţia 16.5 i) *Fie ∇ şi $\tilde{\nabla}$ două conexiuni liniare pe M. Atunci $A = \tilde{\nabla} - \nabla$ este un câmp tensorial de tip $(1,2)$ pe M.*
ii) *Reciproc, dacă ∇ este o conexiune liniară şi $A \in \mathscr{T}^1_2(M)$ atunci $\tilde{\nabla} = \nabla + A$ este tot o conexiune liniară.*

Demonstraţie i) Trebuie verificată $C^\infty(M)$-biliniaritatea lui A. Avem:

$$\begin{cases} A(fX,Y) = \tilde{\nabla}_{fX}Y - \nabla_{fX}Y = f\tilde{\nabla}_X Y - f\nabla_X Y = fA(X,Y) \\ A(X,fY) = \tilde{\nabla}_X(fY) - \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y - X(f)Y - f\nabla_X Y = fA(X,Y). \end{cases}$$

ii) Se verifică imediat definiţia din Cursul precedent. $\square$

Introducem acum al doilea câmp tensorial anunţat:

Propoziţia 16.6 *Aplicaţia $R : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ dată de:*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{16.18}$$

este un câmp tensorial de tip $(1,3)$ pe M.

Demonstraţie Trebuie verificată $C^\infty(M)$-liniaritatea în cele trei argumente. Avem antisimetria în primele două:

$$R(X,Y)\cdot = -R(Y,X)\cdot \tag{16.19}$$

deci e suficient de verificat $C^\infty(M)$-liniaritatea în ultimele două argumente.

$$R(X,fY)Z = \nabla_X(f\nabla_Y Z) - f\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{X(f)Y+f[X,Y]}Z = X(f)\nabla_Y Z + fR(X,Y)Z - X(f)\nabla_Y Z$$

şi la fel $R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$. $\square$

Definiţia 16.7 Câmpul tensorial $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$ se numeşte *câmpul tensorial de curbură* al lui ∇. Pe scurt, îl numim *curbura* lui ∇. Dacă $R = 0$ spunem că ∇ este o *conexiune plată*.

Expresia locală a lui R este:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R^a_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^a} \tag{16.19}$$

şi deci pentru câmpurile vectoriale $X, Y, Z = Z^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ avem:

$$R(X,Y)Z = R^a_{ijk}X^iY^jZ^k\frac{\partial}{\partial x^a}. \tag{16.20}$$

Funcţiile R^a_{ijk} sunt netede pe U şi se determină din:

$$R^a_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^a} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\Gamma^u_{jk}\frac{\partial}{\partial x^u}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\Gamma^u_{ik}\frac{\partial}{\partial x^u}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma^a_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^a_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^u_{jk}\Gamma^a_{iu} - \Gamma^u_{ik}\Gamma^a_{ju}\right)\frac{\partial}{\partial x^a}$$

adică:

$$R^a_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^a_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^a_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^u_{jk}\Gamma^a_{iu} - \Gamma^u_{ik}\Gamma^a_{ju}. \tag{16.21}$$

Pentru a avea exmple de conexiuni plate introducem următorul tip de varietate:

Definiţia 16.8 M se numeşte *varietate paralelizabilă* dacă există n câmpuri vectoriale $X_1, ..., X_n$ aşa încât pentru orice $p \in M$ avem $TpM = span\{X_1(p), ...X_n(p)\}$ i.e. $\{X_1(p), ..., X_n(p)\}$ este bază în T_pM.

Exemple 16.9 i) $M = S^1$ cu X=câmpul vectorial tangent (unitar).
ii) Produsul de varietăţi paralelizabile este varietate paralelizabilă. În particular, torul $T^n = S^1 \times .... \times S^1$ (n factori) este paralelizabil.
iii) Singurele sfere paralelizabile sunt S^0, S^1, S^3 şi S^7 ce corespond mulţimii elementelor unitare în algebrele reale normate cu diviziune: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$=algebra cuaternionilor, $\mathbb{O}$=algebra octonionilor.
iv) Orice varietate 3-dimensională *orientabilă* este paralelizabilă.

Propoziţia 16.10 *Dacă M este paralelizabilă atunci există pe M conexiuni plate.*

Demostraţie Fie $X_1, ..., X_n \in \mathcal{X}(M)$ date de definiţie. Cosniderăm ∇^{par} cu $\nabla^{par}_{X_i}X_j = 0$ şi extinsă apoi prin $C^\infty(M)$-liniaritate:

$$\nabla^{par}_{X=f^iX_i}(Y = g^jX_j) = X(g^j)X_j. \tag{16.22}$$

Se arată imediat că ∇^{par} este conexiune liniară pe M; se poate considera fiind analoagă conexiunii euclidiene de pe $\mathbb{R}^n$. Cum R este câmp tensorial este suficient să arătăm că se anulează pe baza dată:

$$R(X_i, X_j)X_k = -\nabla_{[X_i,X_j]}X_k.$$

Dar $[X_i, X_j]$ se descompune în această bază şi deci $[X_i, X_j] = C^u_{ij}X_u$ ceea ce conduce la $R(X_i, X_j)X_k = 0$. □

În ultima parte a acestui Curs extindem derivata covariantă indusă de ∇ pe toată algebra tensorială a lui M:
1) pe funcţii netede, $\nabla : \mathcal{X}(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $(X, f) \to X(f)$; local $X(F) = X^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$

şi observăm că această extindere este universală adică nu depinde de ∇,
2) pe 1-forme, $\nabla : \mathscr{X}(M) \times \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$, $(X, \theta) \to \nabla_X \theta$. Deci pentru $Y \in \mathscr{X}(M)$ avem $(\nabla_X \theta)(Y) \in C^\infty(M)$ şi vrem ca să avem identitatea Leibniz:

$$\nabla_X(\theta(Y)) = (\nabla_X \theta)(Y) + \theta(\nabla_X Y) \tag{16.23}$$

ceea ce conduce la definirea:

$$(\nabla_X \theta)(Y) := \nabla_X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y). \tag{16.24}$$

3) pe câmpuri tensoriale de tip $(1, k)$ cu $k \geq 1$, $\nabla : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{T}^1_k(M) \to \mathscr{T}^1_k(M)$, $(X, J) \to \nabla_X J$ cu acţiunea pe k câmpuri vectoriale:

$$(\nabla_X J)(X_1, ..., X_k) = \nabla_X(J(X_1, ..., X_k)) - \sum_{i=1}^{k} J(...\nabla_X X_i...). \tag{16.25}$$

În particular, pentru $k = 1$ avem:

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X(J(Y)) - J(\nabla_X Y). \tag{16.26}$$

4) pentru câmpuri tensorile de tip $(0, k)$, $\nabla : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{T}^0_k(M) \to \mathscr{T}^1_k(M)$, $(X, g) \to \nabla_X g$ cu acţiunea pe k câmpuri vectoriale:

$$(\nabla_X g)(X_1, ..., X_k) = X(g(X_1, ..., X_k)) - \sum_{i=1}^{k} g(...\nabla_X X_i...). \tag{16.27}$$

În particular, pentru $k = 2$ avem:

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z). \tag{16.28}$$

SEMINAR 16

S16.1 Considerăm conexiunea liniară ∇ şi fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază locală lui $\mathscr{X}(M)$ pe deschisul $U \subseteq M$. Fie $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ co-baza duală i.e. $\omega^i(E_j) = \delta^i_j$. Dacă $X, Y \in \mathscr{X}(U)$ atunci definim:

$$\nabla_X E_j = \omega^i_j(X) E_i, \quad T(X, Y) = T^i(X, Y) E_i, \quad R(X, Y) E_i = R^j_i(X, Y) E_j. \tag{16.29}$$

Să se arate că:
i) ω^i_j sunt 1-forme, numite *formele de conexiune* ale lui ∇ pe U,
ii) T^i sunt 2-forme, numite *formele de torsiune* ale lui ∇ pe U,
iii) R^i_j sunt 2-forme, numite *formele de curbură* ale lui ∇ pe U,
iv) toate aceste 1 şi 2-forme satisfac *ecuaţiile de structură* ale lui Cartan:

$$d\omega^i + \omega^i_k \wedge \omega^k = \frac{1}{2} T^i, \quad d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \frac{1}{2} R^i_j. \tag{16.30}$$

Se cere torsiunea pe baza dată $\{E_i\}$ în funcţie de constantele de structură $\{c^k_{ij}\} \in C^\infty(U)$ date de: $[E_i, E_j] = c^k_{ij} E_k$.

Rezolvare Verificări imediate. Din: $\nabla_{E_i}E_j = \omega^k_j(E_i)E_k$ rezultă:

$$T^k(E_i, E_j) = \omega^k_j(E_i) - \omega^k_i(E_j) - c^k_{ij} \tag{16.31}$$

relaţia cerută pentru torsiune.

S16.2 În ipotezele problemei precedente presupunem că ∇ este simetrică. Să se arate că pentru orice $\theta \in \Omega^1(M)$ avem:

$$d\theta = \frac{1}{2}\omega^k \wedge \nabla_{E_k}\theta \tag{16.32}$$

deci putem exprima diferenţiala exterioară cu ajutorul unei conexiuni simetrice date.

Rezolvare Presupunem $\theta = \theta^u E_u$. Avem:

$$(\nabla_{E_i}\theta)(E_j) = E_i(\theta_j) - \omega^u_j(E_i)\theta_u \tag{16.33}$$

şi deci:

$$(\omega^k \wedge \nabla_{E_k}\theta)(E_i, E_j) = (\nabla_{E_i}\theta)(E_j) - (\nabla_{E_j}\theta)(E_i) = E_i(\theta_j) - E_j(\theta_i) - \left(\omega^u_j(E_i) - \omega^u_i(E_j)\right)\theta_u.$$

Din (16.31) rezultă că ultima paranteză din membrul drept este c^u_{ij}. Avem şi:

$$2d\theta(E_i, E_j) = E_i(\theta_j) - E_j(\theta_i) - c^u_{ij}\theta_u \tag{16.34}$$

de unde rezultă (16.32).

S16.3 Fie $f, g \in C^\infty(M)$ şi conexiunile liniare ∇ şi $\bar{\nabla}$. Atunci $\tilde{\nabla} := f\nabla + g\bar{\nabla}$ este conexiune liniară dacă şi numai dacă $f + g = 1$.

Rezolvare Verificări imediate.

S16.4 Dacă $g \in \mathscr{T}^0_2(M)$ este o metrică Riemanniană atunci conexiunea Levi-Cita este dată global prin *formula Koszul*:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y). \tag{16.35}$$

Caz particular: $\{E_1, ..., E_n\}$ este o bază locală ortonormată.

Rezolvare Procedeul Christoffel. Pentru cazul particular dat avem:

$$2g(\nabla_{E_i}E_j, E_k) = c^k_{ij} - c^i_{jk} + c^j_{ki} \tag{16.36}$$

unde $\{c^u_{ab}\}$ sunt constantele de structură.

S16.5 .

Rezolvare .

S16.6 .

Rezolvare .

S16.7 .

Rezolvare .

Cursul 17

Formule Ricci de comutare

Fixăm conexiunea liniară ∇ şi câmpul vectorial $Z \in \mathscr{X}(M)$. Avem atunci derivata covariantă $\nabla Z \in \mathscr{T}_1^1(M)$ definită prin $\nabla Z : \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$:

$$X \to (\nabla Z)(X) := \nabla_X Z \tag{17.1}$$

Continuăm încă un pas de aplicare a lui ∇ şi obţinem $\nabla(\nabla Z) = \nabla^2 Z \in \mathscr{T}_2^1(M)$:

$$(X, Y) \to \nabla^2 Z(X, Y) := (\nabla_X(\nabla Z))(Y) = \nabla_X((\nabla Z)Y) - (\nabla Z)(\nabla_X Y). \tag{17.2}$$

Evident procesul se poate continua dar apar complicaţii mari de calcul. *Formulele Ricci de comutare* au ca obiect comutativitatea câmpului tensorial $\nabla^2 Z$:

Propoziţia 17.1 *Avem formula Ricci de comutare*:

$$(\nabla^2 Z)(X, Y) - (\nabla^2 Z)(Y, X) = R(X, Y)Z - \nabla_{T(X,Y)} Z. \tag{17.3}$$

În particular, pentru ∇ conexiune simetrică avem:

$$(\nabla^2 Z)(X, Y) - (\nabla^2 Z)(Y, X) = R(X, Y)Z. \tag{17.4}$$

Demonstraţie Din (17.2) rezultă formula completă a derivatei covariante de ordinul doi:

$$(\nabla^2 Z)(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z \tag{17.5}$$

şi deci:

$$(\nabla^2 Z)(X, Y) - (\nabla^2 Z)(Y, X) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{\nabla_Y X} Z = R(X, Y)Z - \nabla_{T(X,Y)} Z$$

ceea ce dă concluzia. $\square$

Să exprimăm local formula (17.3). Fie harta locală $h = (U, x^1, ..., x^n)$ şi expresia locală a câmpurilor date: $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = Z^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Conform relaţiei (15.3) avem că $\nabla Z = Z^k_{;a} dx^a \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$ şi deci $\nabla^2 Z = Y^k_{;ab} dx^a \otimes dx^b \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$ unde:

$$Z^k_{;ab} \frac{\partial}{\partial x^k} = (\nabla^2 Z) \left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b} \right). \tag{17.6}$$

Cu formula (17.2) rezultă:

$$Z^k_{;ab}\frac{\partial}{\partial x^k}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}}\left(\nabla Z(\frac{\partial}{\partial x^b})\right)-\nabla Z\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}}\frac{\partial}{\partial x^b}\right)=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}}\left(Z^k_{;b}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)-\nabla Z(\Gamma^u_{ab}\frac{\partial}{\partial x^u})=\left(Z^k_{;b;a}-\Gamma^u_{ab}Z^k_{;u}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

de unde avem:

$$Z^k_{;ab}=Z^k_{;b;a}-\Gamma^u_{ab}Z^k_{;u}. \tag{17.7}$$

Prin urmare, avem diferenţa:

$$Z^k_{;ab}-Z^k_{;ba}=Z^k_{;b;a}-Z^k_{;a;b}-(\Gamma^u_{ab}-\Gamma^u_{ba})Z^k_{;u}.$$

Dar diferenţa primilor doi termeni din membrul drept este $R^k_{abu}Z^u$ şi în concluzie avem exprimarea locală formulei Ricci de comutare:

$$Z^k_{;ab}-Z^k_{;ba}=R^k_{abu}Z^u-T^u_{ab}Z^k_{;u} \tag{17.8}$$

respectiv formula derivatei covariante de ordinul doi:

$$(\nabla^2 Z)(X,Y)=Z^k_{;ij}X^iY^j\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{17.9}$$

Pentru conexiune simetrică avem cazul particular al formulei (17.8):

$$Z^k_{;ab}-Z^k_{;ba}=R^k_{abu}Z^u. \tag{17.10}$$

Încheiem acest Curs cu identităţile Bianchi. Acestea sunt valabile pentru orice conexiune dar pe acest caz general au o expresie complicată şi de aceea vom considera doar ∇ simetrică:

Propoziţia 17.2 *Identităţile Bianchi pentru conexiunea simetrică ∇ sunt*:

$$\begin{cases}\sum_{cyclic}R(X,Y)Z:=R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0\\ \sum_{cyclic}(\nabla_XR)(Y,Z)\cdot:=(\nabla_XR)(Y,Z)\cdot+(\nabla_YR)(Z,X)\cdot+(\nabla_ZR)(X,Y)\cdot=0.\end{cases} \tag{17.11}$$

Demonstraţie i) În identitatea dată de anularea torsiunii:

$$\nabla_YZ-\nabla_ZY=[Y,Z] \tag{17.12}$$

aplicăm ∇_X şi avem:

$$\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_X\nabla_ZY=\nabla_X[Y,Z]. \tag{17.13}$$

Sumăm ciclic această relaţie şi obţinem:

$$\sum_{cyclic}\left(R(X,Y)Z+\nabla_{[X,Y]}Z\right)=\sum_{cyclic}\nabla_Z[X,Y] \tag{17.14}$$

adică:

$$\sum_{cyclic}R(X,Y)Z=\sum_{cyclic}\left(\nabla_Z[X,Y]-\nabla_{[X,Y]}Z\right)$$

dar termenul din membrul drept este, aplicând (17.12), egal cu $[Z,[X,Y]]$. Prin urmare:

$$\sum_{cyclic}R(X,Y)Z=\sum_{cyclic}[Z,[X,Y]]=0$$

datorită identităţii Jacobi în algebra Lie $\mathscr{X}(M)$.
ii) Derivata covarinată a câmpului tensorial de curbură $R \in \mathscr{T}_3^1(M)$ este:

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W := \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y,Z)\nabla_X W \quad (17.15)$$

şi după modelul anterior se ajunge din nou la identitatea Jacobi. $\square$

Expresia locală a identităţilor Bianchi este:

$$\begin{cases} R^a_{ijk} + R^a_{jki} + R^a_{kij} = 0 \\ R^a_{ijl;k} + R^a_{jkl;i} + R^a_{kil;j} = 0. \end{cases} \quad (17.16)$$

SEMINAR 17

S17.1 Fie conexiunile liniare ∇, $\tilde{\nabla}$ şi câmpul tensorial diferenţă $A := \tilde{\nabla} - \nabla \in \mathscr{T}_2^1(M)$. Se cer diferenţele:
i) $\tilde{T} - T$. Drept consecinţă a rezultatului i) se cere mulţimea conexiunilor $\tilde{\nabla}$ ce au aceeaşi torsiune cu ∇.
ii) $\tilde{R} - R$ când $T = 0$. Caz particular: A este câmp tensorial paralel în raport cu ∇ i.e. $\nabla A = 0$.

Rezolvare i) Avem imediat:

$$(\tilde{T} - T)(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - \nabla_X Y + \nabla_Y X = A(X,Y) - A(Y,X). \quad (17.17)$$

Mulţimea cerută este mulţimea conexiunilor $\tilde{\nabla}$ având pe A ca tensor simetric: $A(X,Y) = A(Y,X)$ pentru orice $X,Y \in \mathscr{X}(M)$. ii) Avem:

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \tilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + A(Y,Z)) - \tilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z + A(X,Z)) - \nabla_{[X,Y]}Z - A([X,Y],Z)$$

adică:

$$(\tilde{R}-R)(X,Y)Z = A(X,\nabla Y Z) + \nabla_X A(Y,Z) + A(X,A(Y,Z)) - A(Y,\nabla_X Z) - \nabla_Y A(X,Z) - A(Y,A(X,Z)) -$$

$$-A(\nabla_X Y, Z) + A(\nabla_Y X, Z) = (\nabla_X A)(Y,Z) - (\nabla_Y A)(X,Z) + A(X,A(Y,Z)) - A(Y,A(X,Z)). \quad (17.18)$$

Dacă A este câmp tensorial paralel relativ la ∇ atunci:

$$(\tilde{R} - R)(X,Y)A = A(X,A(Y,Z)) - A(Y,A(X,Z)) \quad (17.19)$$

şi deci, în aceste condiţii avem $\tilde{R} = R$ dacă şi numai dacă A satisface "comutativitatea": $A(X,A(Y,Z)) = A(Y,A(X,Z))$ pentru orice $X,Y,Z \in \mathscr{X}(M)$.

S17.2 Fie conexiunea liniară ∇ având torsiunea T. Se definesc aplicaţiile $\nabla^t, \nabla^s : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ prin:

$$\nabla^t_X Y := \nabla_Y X + [X,Y], \quad \nabla^s := \frac{1}{2}\left(\nabla + \nabla^t\right). \quad (17.20)$$

Se cere:
i) Arătaţi că ∇^t şi ∇^s sunt conexiuni liniare. ∇^t se numeşte *transpusa lui* ∇ iar ∇^s se cheamă

conexiunea simetrică asociată lui ∇,
ii) torsiunile T^t şi T^s respectiv $(\nabla^t)^t$,
iii) să se arate că $\nabla^t = \nabla$ (deci avem şi $\nabla^s = \nabla$) dacă şi numai dacă $T = 0$ i.e. conexiunea iniţială este simetrică.

Rezolvare i) Se verifică imediat definiţia pentru ∇^t. Pentru ∇^s aplicăm exerciţiul S15.2i).
ii) $T^t(X,Y) = \nabla^t_X Y - \nabla^t_Y X - [X,Y] = \nabla_Y X - \nabla^t_Y X = \nabla_Y X - (\nabla_X Y + [X,Y]) = -T(X,Y)$.
Pentru ∇^s avem:

$$T^s(X,Y) = \frac{1}{2}\left(\nabla_X Y + \nabla^t_X Y - \nabla_Y X - \nabla^t_Y X - [X,Y] - [X,Y]\right) = \frac{1}{2}(T + T^t)(X,Y) = 0$$

ceea ce justifică numele. Avem: $(\nabla^t)^t_X Y = \nabla^t_Y X + [X,Y] = (\nabla_X Y + [Y,X]) + [X,Y] = \nabla_X Y$, deci $(\nabla^t)^t = \nabla$.
iii) Dacă $\nabla^t = \nabla$ rezultă $\nabla_Y X + [X,Y] = \nabla_X Y$ adică $T = 0$. Reciproc, din $T = 0$ scriind relaţia precedentă rezultă $\nabla = \nabla^t$.

S17.3 Pe varietatea $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ se consideră conexiunea ∇ având nenuli doar coeficienţii: $\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{x}$, $\Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$. Fie câmpurile vectoriale $X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$, $Y = y\frac{\partial}{\partial x}$ şi 1-forma $\omega = -ydx$, Se cer:
i) $\nabla_X Y$, $\nabla Y X$, $\nabla_X \omega$, $\nabla_Y \omega$,
ii) torsiunea şi curbura lui ∇.

Rezolvare i) Avem:

$$\nabla_X Y = x\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} Y - y\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} Y = x\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}(y\frac{\partial}{\partial x}) - y\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}(y\frac{\partial}{\partial x}) = x(\Gamma^1_{11}y)\frac{\partial}{\partial x} - y(\frac{\partial}{\partial x}) = -y\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial x} = -2Y$$

$$\nabla_Y X = y\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}) = y\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}(x\frac{\partial}{\partial x}) = y(\frac{\partial}{\partial x} + \Gamma^1_{11}\frac{\partial}{\partial x}) = y(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}) = 0.$$

Formula pentru derivata covariantă pe 1-forme este:

$$\nabla_X \omega = \omega_{;k} dx^k = \left(X(\omega_k) - \Gamma^a_{ik} X^i \omega_a\right) dx^k \tag{17.21}$$

şi deci:

$$\nabla_X(-ydx) = \left(X(-y) + \Gamma^1_{i1} X^i y\right) dx = (y - \frac{1}{x}xy)dx = 0, \nabla_Y(-ydx) = \left(Y(-y) + \Gamma^1_{i1} Y^i y\right) dx = -\frac{y^2}{x^2}dx.$$

ii) Torsiunea este anti-simetrică şi deci: $T^a_{ii} = 0$. Pentru $i \neq j$ avem $T^a_{ij} = 0$ deoarece $\Gamma^a_{ij} = 0$. Analog $R = 0$.

S17.4 Se cere torsiunea şi curbura în dimensiune $n = 1$.

Rezolvare Deoarece $n = 1$ singura componentă a torsiunii este $T^1_{11} = -T^1_{11}$ ceea ce implică $T^1_{11} = 0$. Analog, singura componentă a curburii este R^1_{111} dar $R^1_{111} = -R^1_{111}$ de unde obţinem: $R^1_{111} = 0$. Deci torsiunea şi curbura sunt nule.

S17.5 Se consideră varietatea paralelizabilă M^n cu $n \geq 2$ şi o bază $\{E_1, ..., E_n\}$ a lui $\mathscr{X}(M)$ ce dă paralelizarea. Se definesc aplicaţiile $\nabla^+, \nabla^0 : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ date pe bază prin:

$$\nabla^+_{E_i} E_j := [E_i, E_j], \quad \nabla^0_{E_i} E_j := \frac{1}{2}[E_i, E_j]$$

ce se extind prin $C^\infty(M)$-liniaritate la conexiuni liniare. Se cere expresia acestor conexiuni liniare, torsiunile lor şi conexiunea simerică asociată.

Rezolvare Avem:

$$\begin{cases} \nabla^+_X Y = \nabla_{X^iE_i}(Y^jE_j) = X^i\nabla_{E_i}(Y^jE_j) = X^i\left(X(Y^j)E_j + Y^j[E_i,E_j]\right) \\ \nabla^0_X Y = X^i\nabla_{E_i}(Y^jE_j) = X^i\left(X(Y^j)E_j + \frac{1}{2}Y^j[E_i,E_j]\right). \end{cases} \tag{17.22}$$

Pe bază dată avem:

$$T^+(E_i,E_j) = [E_i,E_j], \quad T^0(E_i,E_j) = 0$$

şi deci ∇^0 este simetrică iar $T^+(X,Y) = X^iY^j[E_i,E_j]$. Cele două conexiuni au aceeaşi conexiune simetrică asociată:

$$\nabla^{+s}_X Y = \nabla^{0s}_X Y = \frac{1}{2}\left(X(Y^i)E_i + Y(X^i)E_i + [X,Y]\right). \tag{17.23}$$

S17.6 Fie $\{E_1,E_2,E_3\}$ sistemul de câmpuri vectoriale ce paralelizează $\mathbb{R}^3$ şi aplicaţia produs vectorial $\times : \mathscr{X}(\mathbb{R}^3)\times\mathscr{X}(\mathbb{R}^3)$: $X\times Y = \sum_{i=1}^3 (X^{i+1}Y^{i+2} - X^{i+2}Y^{i+1})E_i$ dacă $X = X^iE_i$, $Y = Y^jE_j$ şi indicii de sumare sunt consideraţi modulo 3.
i) Să se arate că $\times \in \mathscr{T}^1_2(\mathbb{R}^3)$,
ii) Fie D conexiunea euclidiană pe $\mathbb{R}^3$: $D_XY = X(Y^j)E_j$ şi $\nabla = D + \frac{1}{2}\times$. Să se arate căceastă conexiune are:

$$T = \times, \quad R(X,Y)Z = \frac{1}{4}(X\times Y)\times Z. \tag{17.24}$$

Rezolvare i) $T(X,Y) = D_XY - D_YX - [X,Y] + \frac{1}{2}(X\times Y - Y\times X) = X\times Y$ deoarece D este simetrică. ii) $R(X,Y)Z = \frac{1}{2}(D_XY\times Z - D_YX\times Z) + \frac{1}{4}(X\times(Y\times Z) - Y\times(X\times Z))$ şi avem formula dublului produs vectorial: $a\times(b\times c) = <a,c>b - <a,b>c$.

Cursul 18

Seminar 8 (2021): Varietăţi diferenţiabile

SEMINAR 8

S8.1 Fie M o varietate diferenţiabilă de dimensiune $n \geq 1$ şi D un deschis (nevid) din M. Atunci D este varietate diferenţiabilă de acceaşi dimensiune n. Prin urmare, *discul n-dimensional de rază $R > 0$* i.e. $D^n(R) := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_n < R\}$ este varietate n-dimensională.

Observaţie Un alt deschis din $\mathbb{R}^n$ ce este util uneori este $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ care pentru $n = 2$ se numeşte *planul punctat*. $\square$

S8.2 Fixăm $n \in \mathbb{N}^*$ şi *sfera* $S^n := \{\xi = (\xi^1, ..., \xi^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \|\xi\|^2_{n+1} := (\xi^1)^2 + ... + (\xi^{n+1})^2 = 1\}$. Să se arate că S^n cu topologia indusă din spaţiul ambient $\mathbb{R}^{n+1}$ este varietate diferenţiabilă de dimensiune n construind un atlas cu $2(n+1)$ hărţi. Din acest moment S^n se va numi *sfera (unitate) n-dimensională.* Frontiera lui $D^n(R)$ i.e. $S^n(R)$ este de asemenea varietate n-dimensională.

Rezolvare Fixăm un indice $i \in \{1, ..., n+1\}$ şi definim $U^+_i := \{\xi \in S^n; \xi^i > 0\}$, $U^-_i := \{\xi \in S^n; \xi^i < 0\}$. Fiind definite prin inegalităţi ambele mulţimi $U^\pm_i$ sunt deschise în $\mathbb{R}^{n+1}$ deci şi în S^n. În mod evident familia tuturor $U^\pm_i$, $1 \leq i \leq n+1$ acoperă sfera S^n deoarece dat $\xi \in S^n$ avem măcar un indice i a. î. $\xi^i \neq 0$. Definim:
a) $\varphi^+_i : U^+_i \to D^n$, $\varphi^+_i(\xi) = (\xi^1, ..., \hat{\xi^i}, ..., \xi^{n+1})$,
b) $\varphi^-_i : U^-_i \to D^n$, $\varphi^-_i(\xi) = (\xi^1, ..., \hat{\xi^i}, ..., \xi^{n+1})$.
Am notat cu D^n *discul n-dimensional* i.e. $D^n := \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\|^2_n < 1\}$ care este o varietate n-dimensională fiind un deschis din $\mathbb{R}^n$ iar $\hat{}$ semnifică lipsa acelei cantităţi; vom folosi des această notaţie! Aplicaţiile $\varphi^\pm_i$ sunt continue şi bijecţii cu inversa:
c) $(\varphi^\pm_i)^{-1} : D^n \to U^\pm_i$, $(\varphi^\pm_i)^{-1}(u) = (u^1, ..., u^{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|u\|^2_n}, u^i, ..., u^n)$,
care este tot continuă.
Considerăm atlasul $\mathscr{A} = \{h_i := (U^\pm_i, \varphi^\pm_i); i = 1, ..., n+1\}$ care are deci $2(n+1)$ hărţi.
I) Arătăm că $\varphi^+_i(U^+_i \cap U^+_j)$ este deschis în $\mathbb{R}^n$; analog se arată pentru $\varphi^-_i(U^-_i \cap U^-_j)$.
I.1) Pp. $i < j$. Fixăm $\xi = (\xi^1, ..., \xi^{n+1}) \in U^+_i \cap U^+_j$. Avem $\varphi^+_i(\xi) = (\xi^1, ..., \hat{\xi^i}, ..., \xi^j, ..., \xi^{n+1})$ cu ξ^j pe poziţia $j-1$. Prin urmare, $\varphi^+_i(U^+_i \cap U^+_j) = \{u \in \mathbb{R}^n; u^{j-1} > 0\}$(=deschisă) deoarece $\xi^j > 0$!

I.2) Pp. $j < i$. Avem $\varphi_i^+(\xi) = (\xi^1, ..., \xi^j, ..., \hat{\xi^i}, ..., \xi^{n+1})$ cu ξ^j pe poziţia j. Prin urmare, $\varphi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{u \in \mathbb{R}^n; u^j > 0\}$(=deschisă).

II. Ultimul lucrul pe care trebuie să-l arătăm este C^∞-compatibilitatea hărţilor şi din nou vom arăta doar compatibiliatea dintre h_i^+ şi h_j^+ celelalte fiind analoage.
II.1 $i < j$:

$$\varphi_j^+ \circ (\varphi_i^+)^{-1}(u) = (u^1, .., , u^{i-1}, \sqrt{1 - \|u\|_n^2}, u^i, ..., \hat{u^j}, ..., u^n). \tag{1}$$

II.2 $j < i$:

$$\varphi_j^+ \circ (\varphi_i^+)^{-1}(u) = (u^1, .., \hat{u^j}, ..., u^{i-1}, \sqrt{1 - \|u\|_n^2}, u^i, ..., u^n). \tag{2}$$

Aplicaţiile (1) şi (2) sunt evident netede i.e. C^∞ deci $\mathscr{A}$ este atlasul unei structuri de varietate n-dimensională pe S^n.

Observaţii 1) Acest atlas al sferei spunem că a fost obţinut prin *proiecţii ortogonale*!
2) Analog sfera $S^n(R) := \{\xi = (\xi^1, ..., \xi^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \|\xi\|_{n+1}^2 := (\xi^1)^2 + ... + (\xi^{n+1})^2 = R^2\}$ este varietate n-dimensională. În aplicaţiile (1), (2) înlocuim la radical 1 cu R^2. Refaceţi singuri întreaga demonstraţie pentru $S^n(R)$. □

S8.3 Să se arate că aceeaşi structură de varietate a sferei S^n se poate obţine dintr-un atlas cu doar 2 hărţi! Acesta este de altfel numărul minim de hărţi pentru orice varietate compactă!

Rezolvare Polul nord este $N(0, ..., 0, 1) \in S^n$ iar polul sud este $S(0, ..., 0, -1) \in S^n$. Avem deschişii din sferă $U_N = S^n \setminus \{N\}$, $U_S = S^n \setminus \{S\}$ şi deci $S^n = U_N \cup U_S$. Fie atlasul $\mathscr{A} = \{h_N = (U_N, \varphi_N), h_S = (U_S, \varphi_S)\}$ care are exact 2 hărţi şi unde aplicaţia $\varphi_{point} : U_{point} \to \mathbb{R}^n$ este dată de: $\varphi_{point}(\xi) = u$=intersecţia dreptei $(point)\xi$ cu hiperplanul ecuatorial $\mathbb{R}^n$: $\xi^{n+1} = 0$; *point* $\in \{N, S\}$. Am folosit axioma euclidiană ce spune că două puncte distincte (la noi *point* şi ξ) determină o dreaptă unică.
I) Ecuaţia dreptei $N\xi$ din $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$N\xi : \frac{x^1 - 0}{\xi^1 - 0} = ... = \frac{x^n - 0}{\xi^n - 0} = \frac{x^{n+1} - 1}{\xi^{n+1} - 1}$$

intersectată cu $x^{n+1} = 0$ va da: $u = \frac{1}{1-\xi^{n+1}}(\xi^1, ..., \xi^n)$.
II) Ecuaţia dreptei $S\xi$ din $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$S\xi : \frac{x^1 - 0}{\xi^1 - 0} = ... = \frac{x^n - 0}{\xi^n - 0} = \frac{x^{n+1} + 1}{\xi^{n+1} + 1}$$

intersectată cu $x^{n+1} = 0$ va da: $u = \frac{1}{1+\xi^{n+1}}(\xi^1, ..., \xi^n)$. Avem $\varphi_N(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ care este deschis în $\mathbb{R}^n$.

II. φ_{point} este continuă şi bijecţie cu inversa:

$$\varphi_N^{-1}(u) = \frac{1}{1 + \|u\|_n^2}(2u, \|u\|_n^2 - 1), \quad \varphi_S^{-1}(u) = \frac{1}{1 + \|u\|_n^2}(2u, 1 - \|u\|_n^2). \tag{3}$$

Prin urmare, $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^n$ este:

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(u) = \frac{1}{1 - \frac{1-\|u\|_n^2}{1+\|u\|_n^2}} \frac{2u}{1 + \|u\|_n^2} = \frac{u}{\|u\|_n^2} = \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(u) \tag{4}$$

care este evident netedă. Mai observăm că $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} = \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$ este definită pe $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ cu valori în aceeaşi mulţime $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$.

Se arată imediat că oricare din cele 2 hărţi este C^∞-compatibilă cu oricare hartă a atlasului de la problema precedentă! Deci avem aceeaşi structură de varietate pe S^n!

Observaţii 1) Acest atlas al sferei spunem că a fost obţinut prin *proiecţii stereografice*!
2) Refaceţi singuri întreaga demonstraţie pentru $S^n(R)$.
3) Reamintim caracterizarea topologică (Weierstrass): o submulţime K din $\mathbb{R}^m$ este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită! $\square$

S8.4 Dacă $n = 2$ atunci exprimaţi aplicaţia de compatibilitate (4) în numere complexe.

Rezolvare $u \in \mathbb{R}^2$ îl renotăm ca de obicei $z = x + iy$ cu x partea reală şi y partea imaginară a numărului complex $z \in \mathbb{C}$. Deci la sfera 2-dimensională i.e. sfera uzuală (din spaţiul fizic 3-dimensional) avem:

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \to w = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}} =: Inv_{S^1}(z) \tag{5}$$

deoarece norma euclidiană a lui $u = z$ este exact modulului numărului complex z! Dar aplicaţia (5) este exact *inversiunea în raport cu cercul* S^1!

Inversiunea Inv_{S^1} are ca *invariant* exact *biraportul a* 4 *puncte distincte* x, y, z, w i.e. numărul strict pozitiv:

$$(x, y; z, w) := \frac{|z - x|}{|y - z|} : \frac{|w - x|}{|y - w|} = \frac{|z - x||w - y|}{|z - y||w - x|}. \tag{6}$$

În adevăr:

$$(Inv_{S^1}(x), Inv_{S^1}(y); Inv_{S^1}(z), Inv_{S^1}(w)) := \frac{|\bar{x} - \bar{z}||\bar{y} - \bar{w}|}{|\bar{y} - \bar{z}||\bar{x} - \bar{w}|} = \frac{|\overline{x - z}||\overline{y - w}|}{|\overline{y - z}||\overline{x - w}|} = (x, y; z, w).$$

S8.5 Să se arate că proiecţia stereografică din $P(-1, 0) \in S^1$ produce o parametrizare raţională a *cercului unitate* S^1. Interpretare trigonometrică!

Rezolvare Fixăm $t \in \mathbb{R}$. Punctele P şi $(0, t) \in Oy$ sunt distincte deci determină o dreaptă unică d_t. Fie punctul $\{(a, b) = (a(t), b(t))\} = S^1 \cap d_t$. Avem:

$$d_t : \frac{x + 1}{0 + 1} = \frac{y - 0}{t - 0} \to y = t(x + 1).$$

Deci $b = t(a + 1)$ şi $a^2 + b^2 = 1$ ceea ce dă $t^2(1 + a)^2 = 1 - a^2$ i.e. $t^2 = \frac{1-a}{1+a}$ cu soluţia $a = 1 - \frac{2t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

În concluzie, avem parametrizarea cercului S^1 mai puţin punctul P:

$$S^1 \setminus \{P\} : t \in \mathbb{R} \to \bar{r}(t) = \varphi^{-1}(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) = (\cos x, \sin x) = (\xi^1, \xi^2) \tag{7}$$

cu inversa:

$$\varphi : S^1 \setminus \{P\} \to \mathbb{R}, \quad (\xi^1, \xi^2) \to t = \frac{1 - \xi^1 + \xi^2}{1 + \xi^1 + \xi^2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}. \tag{8}$$

Prin urmare, pentru $t = tg\frac{x}{2}$ reobţinem cunoscutele (!) formule trigonometrice:

$$\cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} \tag{9}$$

deci şi formulele:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin(2x) = 2\sin x\cos x. \tag{10}$$

Relativ la relaţia (7) să observăm că punctul P corespunde trecerii la limită $t \to \pm\infty$! Vom nummi *trigonometric* acest atlas pe $S^1 \setminus \{P\}$.

S8.6 Numim *grup Lie* un grup G ce este varietate şi pentru care aplicaţia produs $\cdot : G \times G \to G$ şi aplicaţia de inversare $x \in G \to x^{-1} \in G$ sunt ambele diferenţiabile. Cel mai "amplu" grup Lie matriceal i.e. submulţime în algebra reală $M_n(\mathbb{R})$ este $GL(n, \mathbb{R})$!

Rezolvare $GL(n, \mathbb{R})$ este mulţimea tuturor matricilor inversabile $S \in M_n(\mathbb{R})$. Se verifică imediat că este grup relativ la înmulţirea matricilor; în fapt, este *grupul unităţilor* din inelul $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Se numeşte *n-grupul linear matriceal*.

$GL(n, \mathbb{R})$ este deschis în $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ deoarece este contraimaginea deschisului $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ prin aplicaţia continuă det! Deci, $GL(n, \mathbb{R})$ este varietate de dimensiune n^2. Se verifică imediat că aplicaţiile de grup sunt diferenţiabile fiind aplicaţii raţionale! Mai mult, aplicaţia determinant este o aplicaţie diferenţiabilă! Exemplu: $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$.

S8.7 Să se arate că $n-$*grupul ortogonal* $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A^t \cdot A = A \cdot A^t = I_n\}$ este grup Lie. Analog, *n-grupul ortogonal special* $SO(n) = \{A \in O(n); \det A = +1\}$!

Rezolvare Avem imediat că $O(n)$ este subgrup în $GL(n, \mathbb{R})$ deoarece pentru $A \in O(n)$ avem inversa $A^{-1} = A^t$. Reamintim descompunerea în sumă directă:

$$M_n(\mathbb{R}) = Sym(n) \oplus o(n) \tag{11}$$

cu $Sym(n)$=subspaţiul vectorial al matricilor simetrice$\simeq \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ şi $o(n)$=subspaţiul vectorial al matricilor anti-simetrice$\simeq \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$! Un fapt remarcabil este: dacă $S \in o(n)$ atunci $I_n \pm S \in GL(n, \mathbb{R})$ şi încă:

$$(I_n + S)(I_n - S)^{-1} \in O(n)! \tag{12}$$

Orice matrice ortogonală $A \in O(n)$ defineşte o *aplicaţie Cayley*:

$$g_A : o(n) = \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \to O(n), \quad g_A(S) := (I_n + S)(I_n - S)^{-1}A. \tag{13}$$

Se arată imediat că g_A este bijecţie pe imaginea $U_A = Im(g_A)$ si fie $\varphi_A = g_A^{-1}$. Atunci $\mathscr{A} = \{h_A = (U_A, \varphi_A); A \in O(n)\}$ constituie un atlas (cu o infinitate de hărţi!) pe $O(n)$! În concluzie:

$$\dim O(n) = \dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}! \tag{14}$$

Exemplu: $O(1) = \{\pm 1\}$ şi $SO(1) = \{+1\}$. $SO(2)$ este grup izomorf cu grupul cerc unitate $(S^1 = \{z \in \mathbb{C}^*; |z| = 1\}, \cdot)$=grupul numerelor complexe de modul 1 şi este singurul $SO(n)$ comutativ!

Pentru $n = 2$ avem $o(2) \ni S = S(t)$:

$$S(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}^{\frac{2(2-1)}{2}} = \mathbb{R}$$

şi deci:

$$I_2 - S(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}, \det(I_2 - S(t)) = 1 + t^2 \geq 1, (I_2 - S(t))^{-1} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$(I_2 + S(t))(I_2 - S(t))^{-1} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1-t^2 & -2t \\ 2t & 1-t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \in SO(2). \quad (16)$$

Se poate trece la limită $t \to \pm\infty$ în (16) şi obţinem $-I_2 \in SO(2)$.

Observaţie $O(n)$ este *grupul de structură* al geometriei euclidiene n-dimensionale în termeni de G-structuri! $SO(n)$ este grupul de structură al geometriei euclidiene *orientate* deoarece valoarea pozitivă $+1 = \det A$ semnifică păstrarea orientării lui $\mathbb{R}^n$ de către transformarea liniară A. $\square$

Cursul 19

Seminar 9 (2021): Funcţii diferenţiabile

SEMINAR 9

S9.1 În spaţiul $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$ definim o relaţie $\sim$ prin: $x \sim y$ dacă există $\lambda \in \mathbb{R}^*$ a. î. $y = \lambda x$.
i) Arătaţi că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{R}^{n+1}$. Mulţimea cât $P^n(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\})/\sim$ o numim *spaţiul proiectiv*.
ii) Înzestraţi $P^n(\mathbb{R})$ cu o structură de varietate de dimensiune n. Din acest motiv puteţi întâlni $P^n(\mathbb{R})$ cu denumirea completă: *spaţiul proiectiv n-dimensional*.

Rezolvare i) Temă individuală! ii) Pentru $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ notăm ca de obicei cu $[x] \in P^n(\mathbb{R})$ clasa sa de echivalenţă. Pentru $i \in \{1, ..., n+1\}$ fie $U_i := \{[x] \in P^n(\mathbb{R}); x^i \neq 0\}$. Avem imediat că familia $\{U_i; 1 \leq i \leq n+1\}$ acoperă pe $P^n(\mathbb{R})$ şi prin definiţia unei topologii cât avem că U_i este deschisă; astfel aplicaţia de proiecţie $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\} \to P^n(\mathbb{R})$ devine aplicaţie deschisă.

Definim $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ prin:

$$\varphi_i([x]) := \left(\frac{x^1}{x^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, ..., \frac{x^{n+1}}{x^i}\right).$$

Din definiţia relaţiei $\sim$ avem buna definire: $[x] = [y]$ implică $\varphi_i([x]) = \varphi_i([y])$ deoarece la toate fracţiile date în membrul drept se va simplifica factorul de proporţionalitate $\lambda \neq 0$. Se arată imediat că φ este surjectivă: $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$. Fie indicii $i \neq j$; deci $U_i \cap U_j = \{[x] \in P^n(\mathbb{R}); x^i \cdot x^j \neq 0\}$. Avem două cazuri:
I) $i < j$. Rezultă pentru $[x] \in U_i \cap U_j$:

$$\varphi_i([x]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, ..., \frac{x^j}{x^i}, ..., \frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$$

iar componenta $j-1$ i.e. $\frac{x^j}{x^i}$ este nenulă. Deci:

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{y = (y^1, ..., y^n) \in \mathbb{R}^n; y^{j-1} \neq 0\} \tag{1}$$

care este un deschis din $\mathbb{R}^n$.
II) $i > j$. Avem:

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{y = (y^1, ..., y^n) \in \mathbb{R}^n; y^j \neq 0\}$$

care este deschis în $\mathbb{R}^n$.

Pentru a studia compatibilitatea hărţilor să observăm că:

$$\varphi_i^{-1}(y) = [y^1, ..., y^{i-1}, 1, y^i, ..., y^n].$$

I) $i < j$. Rezultă:

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y) = \varphi_j([y^1, ..., y^{i-1}, 1, y^i, ..., y^n]) = \left(\frac{y^1}{y^{j-1}}, ..., \frac{y^{i-1}}{y^{j-1}}, \frac{1}{y^{j-1}}, \frac{y^i}{y^{j-1}}, ..., \frac{y^{j-2}}{y^{j-1}}, ..., \frac{y^n}{y^{j-1}}\right)$$

care este aplicaţie de clasă C^∞. Să observăm că are sens împărţirea cu y^{j-1} tocami datorită relaţiei (1)!
II) $i > j$. Se arată analog şi avem concluzia dorită.

S9.2 Inspirat de atlasul anterior al spaţiului proiectiv n-dimensional să se construiască un nou atlas pe S^n cu $2(n+1)$ hărţi şi compatibil cu cele din seminarul anterior.

Rezolvare Pentru $i \in \{1, ..., n+1\}$ fixat fie $U_i^+ := \{\xi \in S^n; \xi^i > 0\}$ şi $U_i^- := \{\xi \in S^n; \xi^i < 0\}$; exact ca la problema S8.2. Definim $\varphi_i^+ : U_i^+ \to \mathbb{R}^n$:

$$\varphi_i^+(\xi) = \left(\frac{\xi^1}{\xi^i}, ..., \frac{\xi^{i-1}}{\xi^i}, \frac{\xi^{i+1}}{\xi^i}, ..., \frac{\xi^{n+1}}{\xi^i}\right)$$

şi avem că φ_i^+ este bijecţie cu inversa:

$$(\varphi_i^+)^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|x\|_n^2}}(x^1, ..., x^{i-1}, 1, x^i, ..., x^n).$$

Analog definim $\varphi_i^- : U_i^- \to \mathbb{R}^n$:

$$\varphi_i^-(\xi) = \left(\frac{\xi^1}{\xi^i}, ..., \frac{\xi^{i-1}}{\xi^i}, \frac{\xi^{i+1}}{\xi^i}, ..., \frac{\xi^{n+1}}{\xi^i}\right)$$

şi avem că φ_i^- este bijecţie cu inversa:

$$(\varphi_i^-)^{-1}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \|x\|_n^2}}(x^1, ..., x^{i-1}, 1, x^i, ..., x^n).$$

Fie indicii $i \neq j$ şi $\xi \in U_i^+ \cap U_j^+$; se arată la fel pentru indicele minus. Avem iar cele două cazuri:
I) $i < j$ implică:

$$\varphi_i^+(\xi) = \left(\frac{\xi^1}{\xi^i}, ..., \frac{\xi^{i-1}}{\xi^i}, \frac{\xi^{i+1}}{\xi^i}, ..., \frac{\xi^j}{\xi^i}, ..., \frac{\xi^{n+1}}{\xi^i}\right)$$

cu $\frac{\xi^j}{\xi^i}$ pe poziţia $j-1$ ceea ce spune că:

$$\varphi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n; x^{j-1} > 0\}$$

care este evident deschis în $\mathbb{R}^n$.
I) $i > j$ implică:

$$\varphi_i^+(\xi) = \left(\frac{\xi^1}{\xi^i}, ..., \frac{\xi^j}{\xi^i}, ..., \frac{\xi^{i-1}}{\xi^i}, \frac{\xi^{i+1}}{\xi^i}, ..., \frac{\xi^{n+1}}{\xi^i}\right)$$

cu $\frac{\xi^j}{\xi^i}$ pe poziţia j ceea ce spune că:

$$\varphi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n; x^j > 0\}$$

care este evident deschis în $\mathbb{R}^n$.

Pentru compatibilitatea hărţilor avem aceleaşi expresii pentru compuneri ca la spaţiul proiectiv deci concluzia. Se arată din nou după un calcul nu foarte lung că orice hartă a acestui atlas este C^∞-compatibilă cu cele două hărţi obţinute prin proiecţii stereografice deci am reobţinut aceeaşi structură de varietate pentru S^n.

Observaţie Acest atlas al sferei spunem că a fost obţinut prin *proiecţia centrală de centru* O.

S9.3 În problema S8.3 am obţinut aplicaţia schimbării de hărţi ale atlasului dat de proiecţii stereografice $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} = \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$:

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|_n^2} = \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x). \tag{2}$$

Se cere Jacobianul acestei aplicaţii C^∞ într-un punct fixat $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$.

Rezolvare Matricea Jacobiană se calculează imediat; pentru simplificarea scrierii am renunţat la indicele n al normei euclidiene:

$$D(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(x) = \frac{1}{\|x\|^4} \begin{pmatrix} \|x\|^2 - 2(x^1)^2 & -2x^1x^2 & \dots & -2x^1x^n \\ -2x^1x^2 & \|x\|^2 - 2(x^2)^2 & \dots & -2x^2x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2x^1x^n & -2x^2x^n & \dots & \|x\|^2 - 2(x^n)^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

şi prezentăm două metode de calcul al determinantului.

Metoda 1 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,i=1,n} \in Sym(n) \cap GL(n, \mathbb{R})$ şi vectorul $u = (u_1, ..., u_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Dat şi scalarul real λ formăm o nouă matrice simetrică:

$$X = X(A, u, \lambda) := A + \lambda u \cdot u^t. \tag{4}$$

Atunci determinantul lui X este:

$$\det X = (1 + \lambda\|u\|_A^2) \det A, \quad \|u\|_A^2 = a^{ij}u_iu_j, \quad (a^{ij}) = A^{-1}. \tag{5}$$

Pentru matricea (3) exceptând fracţia factor din faţă avem exact: $A = \|x\|^2 I_n$, $\lambda = -2$, $u = x$. Deci $A^{-1} = \frac{1}{\|x\|^2} I_n$, $\|u\|_A^2 = \frac{1}{\|x\|^2} \cdot \|x\|^2 = 1$ şi $\det A = (\|x\|^2)^n = \|x\|^{2n}$. În concluzie:

$$\det D(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(x) = \frac{1}{(\|x\|^4)^n} \cdot (1 - 2 \cdot 1) \cdot \|x\|^{2n} = \frac{-1}{\|x\|^{2n}} < 0 \tag{6}$$

ceea ce spune că matricea $D(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(x)$ aparţine lui $GL(n, \mathbb{R})$ (asta ştiam fiind matricea unui difeomorfism!) şi schimbă orientarea spaţiului $\mathbb{R}^n$!

Metoda 2 Deoarece matricea $X = D...$ (fără fracţia factor din faţă) este simetrică şi ştim că orice matrice simetrică este diagonalizabilă vom calcula valorile proprii λ_1,..., λ_n şi atunci

$\det X$ este produsul acestor valori proprii. Fie deci $\lambda \in \mathbb{R}$ o valoare proprie şi $v \in S^{n-1}$ un versor propriu asociat lui λ! Folosind asociativitatea produsului de matrici avem:

$$(\|x\|^2 I_n - 2x \cdot x^t) \cdot v = \lambda v \to (\|x\|^2 - \lambda)v = 2x \cdot (x^t \cdot v) = 2x \cdot (< x, v >) = 2 < x, v > x$$

deoarece $x^t \cdot v =< x, v >$! Rezultă că avem două cazuri:
I) v coliniar (sau paralel) cu x şi atunci trecând la normă în relaţia precedentă avem:

$$|\|x\|^2 - \lambda| = 2| < x, v > |\|x\|$$

cu unica soluţie $v = \frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$, $\lambda_1 = -\|x\|^2$.
II) $v \perp x$ cu unica soluţie $\lambda_2 = ... = \lambda_n = \|x\|^2$.
În concluzie: $\det X = (-\|x\|^2)\|x\|^2 \cdot ... \cdot \|x\|^2 = -\|x\|^{2n}$ şi reobţinem rezultatul (6).

S9.4 Pe sfera S^n definim funcţia *înălţime* (height, în engleză) $h : S^n \to [-1, 1]$, $h(\xi) = \xi^{n+1}$. Să se arate că cei doi poli sunt singurele puncte de extrem pentru h.

Rezolvare Vom folosi atlasul dat de proiecţia stereografică şi deci formulele din exerciţiul **S8.3**:

$$h \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u \to \frac{\|u\|^2 - 1}{1 + \|u\|^2}, \tag{7}$$

$$h \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u \to \frac{1 - \|u\|^2}{1 + \|u\|^2}. \tag{8}$$

Derivatele parţiale:

$$(h \circ \varphi_N^{-1})_{u^i} = \frac{2u^i(1 + \|u\|^2) - 2u^i(\|u\|^2 - 1)}{(1 + \|u\|^2)^2} = \frac{4u^i}{(1 + \|u\|^2)^2}, \quad 1 \leq i \leq n \tag{9}$$

se vor anula doar în $u = 0$ şi $\varphi_N^{-1}(0) = S$ care este în adevăr punct de minim pentru h: $h(S) = -1$.

Analog, derivatele parţiale:

$$(h \circ \varphi_S^{-1})_{u^i} = \frac{-2u^i(1 + \|u\|^2) - 2u^i(1 - \|u\|^2)}{(1 + \|u\|^2)^2} = \frac{-4u^i}{(1 + \|u\|^2)^2}, \quad 1 \leq i \leq n \tag{10}$$

se vor anula doar în $u = 0$ şi $\varphi_S^{-1}(0) = N$ care este în adevăr punct de maxim pentru h: $h(N) = +1$.

S9.5 Aceeaşi problemă pentru funcţia înălţime $h : S^1 \to \mathbb{R}$ dar folosind harta trigonometrică a problemei **S8.5**.

Rezolvare Avem:

$$h \circ \varphi^{-1} : t \in \mathbb{R} \to \frac{2t}{1 + t^2} \in \mathbb{R} \tag{11}$$

cu derivata:

$$(h \circ \varphi^{-1})'(t) = \frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}. \tag{12}$$

Deci punctele critice sunt date de $t = \pm 1$ şi avem:

$$\varphi^{-1}(\pm 1) = (0, \pm 1) = \{N, S\}$$

adică concluzia.

S9.6 Să se studieze aplicaţia determinant $\det : O(n) \to \{\pm 1\}$ în atlasul Cayley al problemei **S8.7**.

Rezolvare Avem $\det \circ \varphi_A^{-1} = \det \circ g_A : o(n) \to \{\pm 1\}$:

$$\det \circ g_A(S) = \det[(I_n + S)(I_n - S)^{-1} A] = \det(I_n + S)[\det(I_n - S)]^{-1} \det A = \det A = \pm 1. \quad (13)$$

În adevăr, pentru orice matrice anti-simetrică (!) S avem:

$$I_n - S = I_n + S^t = I_n^t + S^t = (I_n + S)^t \to \det(I_n - S) = \det(I_n + S) \quad (14)$$

deoarece determinantul oricărei matrici pătratice X coincide cu determinantul matricii transpuse X^t! Formula (13) spune că funcţia determinant este constantă în fiecare hartă h_A având valoarea $\det A$!

Pentru exemplul $n = 2$ al problemei **S8.7** avem: $\det(I_2 + S(t)) = \det(I_2 - S(t)) = 1 + t^2 \geq 1$.

S9.7 O aplicaţie importantă în Geometria Diferenţială este **fibrarea Hopf** $\pi : S^3 \to S^2\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$(z, w) \in S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \pi(z, w) = (\pi_1(z, w), \pi_2(z, w)) = \left(\frac{1}{2}(|w|^2 - |z|^2), z\bar{w}\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \quad (15)$$

care este o submersie! Să se exprime această aplicaţie folosind harta h_N a lui S^3.

Rezolvare Avem $z = \xi^1 + i\xi^2$ şi $w = \xi^3 + i\xi^4$ şi deci:

$$\pi(z, w) = \left(\frac{1}{2}[(\xi^3)^2 + (\xi^4)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2], (\xi^1 + i\xi^2)(\xi^3 - i\xi^4)\right). \quad (16)$$

Folosind ecuaţiile date de φ_N^{-1} i.e. (3) de la problema **S8.3** obţinem după un calcul nu foarte complicat:

$$\pi_1 \circ \varphi_N^{-1}(u) = \frac{\|u\|^4 + 1 - 2[3(u^1)^2 + 3(u^2)^2 - (u^3)^2]}{2(1 + \|u\|^2)^2} \quad (17)$$

$$\pi_2 \circ \varphi_N^{-1}(u) = \frac{2[(2(u^1u^3 + u^2\|u\|^2 - u^2) + i(2u^2u^3 - u^1\|u\|^2 + u^1)]}{(1 + \|u\|^2)^2} \quad (18)$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^3$.

S9.8 Revenim la matricea Jacobiană a Exerciţiului 9.3 pentru cazul $n = 2$ tratat în algebra numerelor complexe. Cu notaţia clasică $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avem deci:

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \to \frac{z}{|z|^2}$$

difeomorfism cu matricea Jacobiană:

$$D(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(z) = \frac{1}{|z|^4} \begin{pmatrix} |z|^2 - 2x^2 & -2xy \\ -2xy & |z|^2 - 2y^2 \end{pmatrix} \in Sym(2). \quad (19)$$

O matrice oarecare $\Gamma \in Sym(2)$ de forma:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

este descrisă atât de tripletul $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ cât şi de perechea $(A,B) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, A numit *invariantul Hopf al lui* Γ:

$$A = \frac{a-c}{2} - bi, \quad 2B = Tr\Gamma = a + c. \tag{20}$$

Se cer A şi B pentru $D(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(z)$.

Rezolvare Avem $B = 0$ i.e. matricea $D(\varphi_N \circ (\varphi_S)^{-1})(z)$ este *traceless* sau *tracefree*. Mulţimea $sl(n,\mathbb{R})$ a matricilor cu urma nulă este algebra Lie a *n-grupului liniar special*:

$$SL(n,\mathbb{R}) := \{\Gamma \in M_n(\mathbb{R}); \det\Gamma = +1\}, \quad \dim SL(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1. \tag{21}$$

Invariantul Hopf este funcţia:

$$A(z) = \frac{1}{2|z|^4}[(2y^2 - 2x^2) + 2xyi] = \frac{(y+ix)^2}{|z|^4}. \tag{22}$$

Dar $\bar{z} = x - iy$ şi deci $i\bar{z} = y + ix$ de unde rezultă:

$$A(z) = \frac{(i\bar{z})^2}{(z\bar{z})^2} = \frac{-\bar{z}^2}{z^2\bar{z}^2} = -\frac{1}{z^2} \tag{23}$$

care este o funcţie olomorfă în planul (= dreapta complexă) punctat!

S9.9 Problema precedentă ridică problema găsirii de difeomorfisme cu matricea Jacobiană simetrică. Fie funcţia netedă $f : I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ şi difeomorfismul $F_f : D_d \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de forma:

$$F_f = (F^1, ..., F^n), \quad F^i(x) = x^i f(\|x\|^2), \quad i.e. \quad F_f(x) = f(\|x\|^2)x. \tag{24}$$

În termeni de câmpuri vectoriale putem spune că F_f este un câmp radial. Atunci matricea Jacobiană a lui F aparţine lui $Sym(n)$. Să observăm că pentru inversabilitatea lui F_f trebuie să cerem ca funcţia reală $g(t) = tf^2(t) > 0$ să fie inversabilă aşa încât funcţia $f \circ g^{-1} \neq 0$.

Rezolvare Avem pentru $i \neq j$:

$$F^i_{x^j} = 2x^i x^j f'(\|x\|^2) = F^j_{x^i}. \tag{25}$$

Problema precedentă corespunde funcţiei $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, $f(t) = \frac{1}{t^2}$ care este evident netedă. Observaţia finală corespunde relaţiilor:

$$y = f(\|x\|^2)x \to \|y\|^2 = f^2(\|x\|^2)\|x\|^2 \to x = \frac{y}{f \circ g^{-1}(\|y\|^2)}.$$

S9.10 Pentru spaţiul proiectiv $P^1(\mathbb{R})$ cu atlasul dat în S9.1 se cere diferenţiala $D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x,y)$ renotând $(y^1, y^2) = (x,y)$ în:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y^1, y^2) = \left(\frac{1}{y^1}, \frac{y^2}{y^1}\right). \tag{25}$$

Rezolvare Avem $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \{(x,y) \in \mathbb{R}; x \neq 0\} \to \{(x,y) \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

cu diferenţiala:

$$D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \to J(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x,y) = -\frac{1}{x^3} \neq 0. \qquad (260$$

Se observă că matricea $D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x,y)$ nu este simetrică!

Cursul 20

Seminar 10 (2021): Spaţiul tangent şi spaţiul cotangent

SEMINAR 10

S10.1 Fixăm punctul P din varietatea 2-dimensională M. Să presupunem că P este în intersecţia domeniilor a două hărţi $\varphi : P \in U \subseteq M \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{\varphi} : P \in \tilde{U} \subseteq M \to (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$. Se cere schimbarea bazelor asociate din spaţiul tangent $T_P M$ şi spaţiul cotangent $T_P^* M$.

Rezolvare În spaţiul tangent avem bazele $B = \{\frac{\partial}{\partial x}|_P, \frac{\partial}{\partial y}|_P\}$, $\tilde{B} = \{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}|_P, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}|_P\}$. La schimbarea de hărţi:

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^2 : \tilde{x} = \tilde{x}(x, y), \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x, y)$$

avem schimbarea de baze în $T_P M$:

$$\frac{\partial}{\partial x}|_P = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}(P)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}|_P + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(P)\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}|_P,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}|_P = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(P)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}|_P + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y}(P)\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}|_P.$$

În şpaţiul cotangent $T_P^* M$ avem bazele duale $B^* = \{dx|_P, dy|_P\}$, $\tilde{B}^* = \{d\tilde{x}|_P, d\tilde{y}|_P\}$. Legea de schimbare a lor este:

$$d\tilde{x}|_P = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}(P)dx|_P + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(P)dy|_P, \quad d\tilde{y}|_P = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(P)dx|_P + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y}(P)dy|_P.$$

S10.2 Considerăm punctul P în planul punctat $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\} = \mathbb{C}^*$ în care am fixat un reper ortonormat $\mathscr{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$. Punctul P aparţine domeniului hărţii carteziene $P \to (x, y)$ date de $\overrightarrow{OP} = x\bar{i} + y\bar{j}$. Tot P aparţine şi domeniului hărţii polare $P \to (r, \varphi) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi]$. Să se studieze schimbarea bazelor asociate din spaţiul tangent $T_P(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})$ şi spaţiul cotangent $T_P^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})$.

Rezolvare În spaţiul tangent avem bazele $B_{cart} = \{\frac{\partial}{\partial x}|_P, \frac{\partial}{\partial y}|_P\}$, $B_{polar} = \{\frac{\partial}{\partial r}|_P, \frac{\partial}{\partial \varphi}|_P\}$. Reamintim trecerea dintre cele două hărţi:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \varphi = arctg\frac{y}{x}. \end{cases} \tag{1}$$

Să observăm că toate funcţiile ce intervin sunt elementare deci netede şi prin urmare cele două hărţi (ambele globale pentru planul punctat!) sunt C^∞-compatibile, deci induc aceeaşi structură de varietate! Avem expresia *vectorului tangent radial*:

$$\frac{\partial}{\partial r}|_P = \frac{\partial x}{\partial r}(P)\frac{\partial}{\partial x}|_P + \frac{\partial y}{\partial r}(P)\frac{\partial}{\partial y}|_P = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}|_P + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}|_P = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}|_P + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}|_P. \tag{2}$$

Analog *vectorul tangent unghiular* este:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}|_P = \frac{\partial x}{\partial \varphi}(P)\frac{\partial}{\partial x}|_P + \frac{\partial y}{\partial \varphi}(P)\frac{\partial}{\partial y}|_P = -r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}|_P + r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}|_P = -y\frac{\partial}{\partial x}|_P + x\frac{\partial}{\partial y}|_P. \tag{3}$$

Deci:

$$B_{polar} = B_{cart} \cdot S, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -y \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \end{pmatrix}, \quad \det S = \sqrt{x^2+y^2} = r > 0.$$

Prin urmare:

$$B_{cart} = B_{polar} \cdot S^{-1}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x & y \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}$$

ceea ce spune că:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{4}$$

În aceste ultime relaţii (şi în cele ce urmează) am renunţat la indicele P pentru simplificarea scrierii!

În spaţiul cotangent avem bazele duale $B^*_{cart} = \{dx, dy\}$, $B^*_{polar} = \{dr, d\varphi\}$. Avem:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi, \quad dr = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy \tag{5}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi, \quad d\varphi = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy. \tag{6}$$

Formulele (5)-(6) sunt în acord cu *caracterul co-variant* al vectorilor co-tangenţi şi cu faptul că matricea S a schimbării de baze se scrie şi:

$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{7}$$

deci vedem componentele liniilor în componentele din (5) şi (6)!

Aplicaţia 1 Formulele (5)-(6) se pot aplica la forma I-a fundamentală=metrica Riemanniană a planului punctat:

$$g = I = dx^2 + dy^2 = (\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi)^2 + (\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi)^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{8}$$

Mai general, dacă avem o metrică Riemanniană pe varietatea 2-dimensională M ce local se scrie:

$$g = dx^2 + f^2(x)dy^2 \tag{9}$$

cu $f : I_d \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ netedă atunci spunem că g este o *metrică warped*. Şi metrica sferei S^2 (considerată ca suprafaţă de rotaţie!) respectiv a elicoidului sunt warped!

Aplicaţia 2 Funcţia de clasă C^1, $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ o numim *rotaţional-simetrică* sau *invariantă la rotaţii* dacă nu depinde de φ: $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$. Din relaţia (3) rezultă că invarianţa la rotaţii se exprimă cartezian prin:

$$xf_y = yf_x \tag{10}$$

unde indicele inferior semnifică variabila de derivare! Putem verifica imediat caraterizarea (10) prin $f = f(r) = F(x^2+y^2)$ cu $F \in C^1$. Atunci relaţia (10) devine egalitatea $x \cdot 2yF' = y \cdot 2xF'$ cu F' derivata lui F.

Este natural să ne întrebăm dacă mai există vreo semnificaţie a relaţiei (10) în afara faptului că funcçtiile rotaţional-simetrice sunt *integrale prime* ale *câmpului vectorial unghiular*. Răspunsul este pozitiv şi pentru formularea lui avem nevoie de *paranteza Poisson* $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}) \times C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}) \to C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})$:

$$\{f, g\} := f_x \cdot g_y - f_y \cdot g_x$$

ceea ce conduce la interpretarea dorită:

Propoziţie $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})$ *este rotaţional-simetrică dacă şi numai dacă comută Poisson cu funcţia distanţă* $\mathscr{F}(x,y) = r^2 = x^2 + y^2$:

$$\{f, \mathscr{F}\} = 0.$$

Demonstraţia este imediată din calculul general:

$$\{f, \mathscr{F}\} = 2(yf_x - xf_y).$$

Deoarece paranteza Poisson este $\mathbb{R}$-biliniară şi anti-simetrică rezultă că mulţimea funcţiilor rotaţional-simetrice este un subspaţiu real în algebra reală $(C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}), +, \cdot_{\mathbb{R}}, \cdot)$. Sau altfel: mulţimea integralelor prime ale unui câmp vectorial arbitrar al varietăţii M constituie o subalgebră reală în $C^\infty(M)$

Aplicaţia 3 *Laplacianul* în coordonate polare şi în derivatele complexe se calculează imediat:

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}. \tag{11}$$

Pentru exemplul rotaţional-simetric $f = F(r^2)$ avem:

$$\Delta f = 4[r^2 F'' + F'] \tag{12}$$

Deci f este armonică i.e. aparţine nucleului Laplacianului dacă şi numai dacă $F = F(t)$ satisface ecuaţia diferenţială:

$$tF'' + F' = 0 = (tF')' \tag{13}$$

care are soluţia generală $F(t) = C_1 \ln t + C_2$ cu C_1 şi C_2 constante reale. Prin urmare, o funcţie rotaţional-simetrică armonică are expresia generală:

$$f(x, y) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2 \tag{14}$$

ceea ce spune că mulţimea funcţiilor rotaţional-simetrice armonice este un spaţiu vectorial real 2-dimensional cu baza canonică $\{f_1 \equiv 1, f_2 = \ln(x^2 + y^2) = 2 \ln r\}$. Curbele de nivel constant $f_2 = c \in \mathbb{R}$ ale lui f_2 sunt cercurile concentrice, centrate în originea O:

$$x^2 + y^2 = e^c > 0 \tag{15}$$

iar câmpul vectorial *gradient* $\nabla f_2 = \frac{2}{x^2+y^2}(x, y)$ având direcţia *radială* (x, y) este ortogonal acestor cercuri i.e. este perpendicular pe tangentele la cercuri!

Temă Exprimaţi Laplacianul 3-dimensional $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ în coordonate sferice şi cilindrice. Vă va fi util la Ecuaţiile Fizicii Matematice: ecuaţia Laplace, ecuaţia căldurii, ecuaţia undelor!

Aplicaţia 4 Endomorfismul (tensorul) Kronecker $I \in \mathscr{T}_1^1(C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})) : T_P M \to T_P M$ are expresia carteziană:

$$I = dx \otimes \frac{\partial}{\partial x} + dy \otimes \frac{\partial}{\partial y}$$

cu $\otimes$ *produsul tensorial*. Componentele acestui tensor sunt exact *simbolii Kronecker* δ^i_j: $\delta^1_1 = \delta^2_2 = 1$, $\delta^1_2 = \delta^2_1 = 0$! Acest fapt justifică şi notaţia: matricea asociată lui I în baza B_{cart} este exact matricea unitate I_2:

$$I\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = dx(\frac{\partial}{\partial x}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy(\frac{\partial}{\partial x}) \cdot \frac{\partial}{\partial y} = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y},$$

$$I\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = dx(\frac{\partial}{\partial y}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy(\frac{\partial}{\partial y}) \cdot \frac{\partial}{\partial y} = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 1 \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Un calcul nu foarte lung dă faptul remarcabil al expresiei comune (!) în coordonatele polare:

$$I = dr \otimes \frac{\partial}{\partial r} + d\varphi \otimes \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Acest rezultat este în acord cu legea schimbării matricii unui endomorfism la o schimbare de baze: $S^{-1} \cdot I_2 \cdot S = I_2$!

10.3 Să se utilizeze formulele exerciţiului anterior în analiza complexă.

Rezolvare Fie numărul complex $z \in \mathbb{C}^*$ cu scrierea trigonometrică şi exponenţială:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \tag{16}$$

Derivatele parţiale din Analiza Complexă sunt:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{17}$$

Aplicând formulele (4) rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[(\cos\varphi - i\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi + i\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] = \frac{e^{(-i\varphi)}}{2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-\varphi)}}{2r}\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{e^{-i\varphi}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right], \tag{18}$$

unde, pentru a obţine ultimul egal, am inlocuit $t = \frac{\pi}{2}$ în *formula lui Euler*:

$$e^{it} = \cos t + i\sin t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Analog se obţine (sau prin conjugarea relaţiei anterioare!):

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]. \tag{20}$$

O identitate utilă are loc relativ la *vectorul Euler*, prin adunarea relaţiilor (18) şi (20):

$$E := r\frac{\partial}{\partial r} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} = z\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Fie $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = f(z,\bar{z})$ de clasă C^1. Reamintim că f este *holomorfă* dacă nu depinde de $\bar{z}$ i.e. $f_{\bar{z}} = 0$ ceea ce se reduce la *ecuaţiile Cauchy-Riemann* (CR):

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \to \frac{\partial f}{\partial z} = f' = u_x + iv_x. \tag{21}$$

În coordonate polare ecuaţiile CR se exprimă astfel:

$$u_r = \frac{1}{r}v_\varphi, \quad u_\varphi = -rv_r. \tag{22}$$

Exemplul 1 Funcţia $f(z) = \ln z = \ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$ este holomorfă: $u = \ln r = \frac{1}{2}f_2$, $v = \varphi$ satisfac ecuaţiile CR (22)! Sau înlocuim direct în (20):

$$\frac{\partial \ln z}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2}\left[\frac{1}{r} + \frac{i}{r}\cdot i\right] = 0. \tag{23}$$

Reamintim că dacă f este holomorfă atunci componentele sale u, v sunt funcţii armonice, numite *conjugate*. Reobţinem că funcţia logaritm din formula (14) este armonică, fiind conjugată cu funcţia $\varphi := arctg\frac{y}{x}$! În adevăr, avem:

$$\varphi_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\varphi_{yy}. \tag{24}$$

Exemplul 2 Funcţia $f(z) = z^2$ este holomorfă cu $u = x^2 - y^2 = r^2 \cos 2\varphi$, $v = 2xy = r^2 \sin 2\varphi$. Se verifică imediat formula derivatei din (21): $f'(z) = 2z = u_x + iv_x = 2x + i(2y)$.
Exemplul 3 Funcţia lui Joukowski (matematician rus) $J : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $J(z) = z + \frac{1}{z}$ este holomorfă. Această funcţie transformă cercul $\mathscr{C}(O, r > 1)$ în elipsa $E(a, b) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ cu semiaxa mare $a = r + \frac{1}{r}$ şi semiaxa mică $b = r - \frac{1}{r}$!
Contraexemplu Funcţia de schimbări de hărţi stereografice pe S^2 din problema **S8.4**, $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ evident că **nu este** holomorfă!

TEMĂ Fie funcţia holomorfă $f = u + iv$ şi suprafeţele grafic asociate $Gr(u) : z = u(x, y)$, $Gr(v) : z = v(x, y)$. Să se arate că $Gr(u)$ and $Gr(v)$ **au aceeaşi curbură Gaussiană**:

$$K_f = -\left[\frac{|f''|}{1 + |f'|^2}\right]^2 \leq 0. \tag{25}$$

Dacă nu reuşiţi pe cazul general atunci trataţi cazul funcţiilor armonice conjugate de la Exemplul 2: $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$:

$$K(x, y) = -\frac{4}{[1 + 4(x^2 + y^2)]^2} < 0. \tag{26}$$

□

S10.4 Să se studieze analog endomorfismului Kronecker endomorfismul $\mathscr{T}^1_1(C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})) \ni J : T_P M \to T_P M$ dat de:

$$J = dx \otimes \frac{\partial}{\partial y} - dy \otimes \frac{\partial}{\partial x}. \tag{26}$$

Rezolvare Avem:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = dx(\frac{\partial}{\partial x}) \cdot \frac{\partial}{\partial y} - dy(\frac{\partial}{\partial x}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial y} - 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x},$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = dx(\frac{\partial}{\partial y}) \cdot \frac{\partial}{\partial y} - dy(\frac{\partial}{\partial y}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y} - 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

şi de aici obţinem imediat că:

$$J^2 = -I. \tag{27}$$

Din acest motiv J se numeşte *structura (aproape complexă) a planului punctat.* În coordonate polare avem:

$$J = \frac{1}{r} dr \otimes \frac{\partial}{\partial \varphi} - r dr \otimes \frac{\partial}{\partial r} \tag{28}$$

şi se observă imediat legătura cu ecuaţiile Cauchy-Riemann polare date de relaţia (22).

Cursul 21

Seminar 11 (2021): Fibratul tangent şi fibratul cotangent

SEMINAR 11

S11.1 Fie $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ de clasa C^∞ şi punctul fixat $x \in \mathbb{R}^{n+m}$. *Diferenţiala lui* F *în* x este aplicaţia liniară $dF(x) : T_x\mathbb{R}^{n+m} \simeq \mathbb{R}^{n+m} \to T_{F(x)}\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m$. Spunem că F este *submersie în* x dacă $dF(x)$ este surjectivă adică $rangdF(x) = m$. Fie $c \in Im(F) \subseteq \mathbb{R}^m$ o valoare a lui F şi $M := F^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ a.î. $F|_M$ este submersie în orice punct. Atunci M este *subvarietate regulată de dimensiune* n *a lui* $\mathbb{R}^{n+m}$ şi pentru $x \in M$ fixat avem o *exprimare extrinsecă* a spaţiului tangent T_xM=nucleul operatorului liniar $dF(x) : T_x\mathbb{R}^{n+m} \simeq \mathbb{R}^{n+m} \to T_{F(x)}\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m$. Să se studieze $S^n(R)$ şi $T_\xi S^n(R)$ pentru $\xi \in S^n(R)$ arbitrar.

Rezolvare Fie $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$:

$$F(x) = \|x\|^2_{n+1} - R^2. \tag{1}$$

Această funcţie este netedă şi are diferenţiala:

$$dF(x) : T_x\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{n+1} \to T_{F(x)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$$

dată de matricea linie $2(x^1, ..., x^{n+1}) = 2x \in M_{1,n+1}(\mathbb{R})$. Dacă $\xi \in S^n(R)$ atunci matricea 2ξ are măcar o componentă nenulă şi deci $rangdF(\xi) = 1 = \dim \mathbb{R}$. Prin urmare $F|_{S^n(R)}$ este submersie cu:

$$dF(\xi)(u) = 2 < \xi, u >_{n+1} \tag{2}$$

ceea ce spune că $S^n(R)$ este subvarietate regulată a lui $\mathbb{R}^{n+1}$ având dimensiunea $(n+1)-1 = n$. Spaţiul tangent la sferă are exprimarea extrinsecă:

$$T_\xi S^n(R) = (span\{\xi\})^\perp_{n+1} = \{u \in \mathbb{R}^{n+1}; u \perp \xi\} \tag{3}$$

adică rezultatul cunoscut din spaţiul fizic: raza unei sfere este perpendiculară pe planul tangent!

Consecinţă Fie $\xi \in S^2(R) \subset \mathbb{R}^3$ şi vectorii $u, v \in T_\xi S^2(R) \subset T_\xi\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$, necoliniari; deci $\|u \times v\| > 0$. Avem atunci:

$$\xi = \pm R\frac{u \times v}{\|u \times v\|}.$$

S11.2 Fie punctul $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in M := S^1 \setminus \{P\}$ identificat cu numărul complex $\xi_{\mathbb{C}} := \xi^1 + i\xi^2$. Vectorul $\mathbb{R}^2 \ni X_\xi := (-\xi^2, \xi^1) = i \cdot \xi_{\mathbb{C}}$ aparţine planului tangent $T_\xi M$ conform exprimării extrinseci (13): $X_\xi \perp \xi$. Se cere expresia intrinsecă a lui X_ξ în atlasul trigonometric al problemei **S8.5**.

Rezolvare Expresia intrinsecă a lui X_ξ este:

$$X_\xi = A(\xi(t))\frac{\partial}{\partial t}|_{\xi(t)}, \quad A = X_\xi(t). \tag{4}$$

Deci coeficientul A este:

$$A(\xi) = \left(-\xi^2\frac{\partial}{\partial \xi^1}|_\xi + \xi^1\frac{\partial}{\partial \xi^2}|_\xi\right)(t) = -\xi^2\frac{\partial t}{\partial \xi^1}(\xi) + \xi^1\frac{\partial t}{\partial \xi^2}(\xi) =$$

$$= (-\xi^2)\cdot\frac{-(1+\xi^1+\xi^2)-(1-\xi^1+\xi^2)}{(1+\xi^1+\xi^2)^2} + \xi^1\cdot\frac{(1+\xi^1+\xi^2)-(1-\xi^1+\xi^2)}{(1+\xi^1+\xi^2)^2} =$$

$$= \frac{2\xi^2 + 2(\xi^1)^2 + 2(\xi^2)^2}{(1+\xi^1+\xi^2)^2} = \frac{2(1+\xi^2)}{(1+\xi^1+\xi^2)^2}. \tag{5}$$

Ca funcţie de $t \in \mathbb{R}$ avem:

$$A(t) = \frac{2\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)}{\left(1+\frac{1+2t-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \frac{2(1+t)^2(1+t^2)}{[2(1+t)]^2} = \frac{1+t^2}{2} \tag{6}$$

şi deci expresia finală intrinsecă a lui $X_\xi = (-\xi^2, \xi^1) = (-\sin x, \cos x) \in T_\xi(S^1 \setminus \{P\})$, $\xi = (\cos x, \sin x)$ este:

$$X_\xi = -\xi^2\frac{\partial}{\partial \xi^1}|_\xi + \xi^1\frac{\partial}{\partial \xi^2}|_\xi = \frac{1+t^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}|_t = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial}{\partial t}|_t = \frac{\partial}{\partial x}|_x, \quad t = tg\frac{x}{2}. \tag{7}$$

În concluzie X_ξ este exact unicul vector din baza spaţiului tangent indusă de harta trigonometrică!

S11.3 Fie $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \in M := S^3 \setminus \{N\}$ oarecare şi vectorii din spaţiul $\mathbb{R}^4$:

$$X_\xi := (-\xi^2, \xi^1, -\xi^4, \xi^3), \quad Y_\xi := (-\xi^3, \xi^4, \xi^1, -\xi^2), \quad Z_\xi := (-\xi^4, -\xi^3, \xi^2, \xi^1). \tag{8}$$

Aceşti vectori (ce sunt versori în $\mathbb{R}^4$) aparţin planului tangent $T_\xi M$ conform exprimării extrinseci (3): $X_\xi, Y_\xi, Z_\xi \perp \xi$. Se cere expresia intrinsecă a acestor vectori tangenţi în harta stereografică $h_N = (U_N, \varphi_N)$ folosind punctul $\varphi_N(\xi) = u \in \mathbb{R}^3$.

Rezolvare Mai întâi vom discuta schimbarea bazelor din spaţiul tangent chiar pentru $S^n \setminus \{N\}$. Fie indicele $i \in \{1, ..., n\}$. În spaţiul tangent dat avem:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i}|_\xi = \frac{\partial u^1}{\partial \xi^i}(\xi)\frac{\partial}{\partial u^1}|_u + ... + \frac{\partial u^n}{\partial \xi^i}(\xi)\frac{\partial}{\partial u^n}|_u = \frac{1}{1-\xi^{n+1}}\frac{\partial}{\partial u^i}|_u. \tag{9}$$

Analog obţinem:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^{n+1}}|_\xi = \frac{1}{(1-\xi^{n+1})^2}\left[\xi^1\frac{\partial}{\partial u^1} + ... + \xi^n\frac{\partial}{\partial u^n}\right]. \tag{10}$$

Prin urmare, exprimarea bazei extrinseci din $T_\xi S^N$ în funţie de baza intrinsecă este:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i}|_\xi = \frac{1+\|u\|^2}{2}\frac{\partial}{\partial u^i}|_u, \quad \frac{\partial}{\partial \xi^{n+1}}|_\xi = \frac{1+\|u\|^2}{2}\left[u^1\frac{\partial}{\partial u^1}+...+u^n\frac{\partial}{\partial u^n}\right]. \tag{11}$$

Prin urmare:

$$X_\xi = -\xi^2\frac{\partial}{\partial \xi^1}|_\xi + \xi^1\frac{\partial}{\partial \xi^2}|_\xi - \xi^4\frac{\partial}{\partial \xi^3}|_\xi + \xi^3\frac{\partial}{\partial \xi^4}|_\xi =$$

$$= -\frac{2u^2}{1+\|u\|^2}\frac{1+\|u\|^2}{2}\frac{\partial}{\partial u^1}|_u + \frac{2u^1}{1+\|u\|^2}\frac{1+\|u\|^2}{2}\frac{\partial}{\partial u^2}|_u - \frac{\|u\|^2-1}{1+\|u\|^2}\frac{1+\|u\|^2}{2}\frac{\partial}{\partial u^3}|_u +$$

$$+\frac{2u^3}{1+\|u\|^2}\frac{1+\|u\|^2}{2}\left[u^1\frac{\partial}{\partial u^1}|_u + u^2\frac{\partial}{\partial u^2}|_u + u^3\frac{\partial}{\partial u^2}|_u\right] = ...$$

Expresia finală a acestor vectori tangenţi este:

$$X_\xi = (-u^2+u^1u^3)\frac{\partial}{\partial u^1}|_u + (u^1+u^2u^3)\frac{\partial}{\partial u^2}|_u - \frac{1}{2}\left[(u^1)^2+(u^2)^2-(u^3)^2-1\right]\frac{\partial}{\partial u^3}|_u, \tag{12}$$

$$Y_\xi = (-u^3-u^1u^2)\frac{\partial}{\partial u^1}|_u + \frac{1}{2}\left[(u^1)^2-(u^2)^2+(u^3)^2-1\right]\frac{\partial}{\partial u^2}|_u + (u^1-u^2u^3)\frac{\partial}{\partial u^3}|_u, \tag{13}$$

$$Z_\xi = \frac{1}{2}\left[(u^1)^2-(u^2)^2-(u^3)^2+1\right]\frac{\partial}{\partial u^1}|_u + (-u^3+u^1u^2)\frac{\partial}{\partial u^2}|_u + (u^2+u^1u^3)\frac{\partial}{\partial u^3}|_u. \tag{14}$$

Temă Dacă $\xi \in S^3 \setminus \{S\}$ obţineţi expresia acestor vectori tangenţi folosind harta $h_S = (U_S, \varphi_S)$.

S11.4 În probleme **S11.2** versorul tangent în ξ la cercul unitate S^1 s-a exprimat $X_\xi = i\cdot\xi$. Se cere aceeaşi exprimare pentru cei 3 versori tangenţi la S^3 din problema **S11.3**.

Rezolvare Spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ se identifică cu algebra reală $\mathbb{H}$ a cuaternionilor via:

$$\xi \in \mathbb{R} \leftrightarrow \xi = \xi^1 + \xi^2 i + \xi^3 j + \xi^4 k \in \mathbb{H}, \tag{15}$$

cu $\{i, j, k\}$ unităţile complexe. Avem atunci imediat:

$$X_\xi = i\cdot\xi, \quad Y_\xi = j\cdot\xi, \quad Z_\xi = k\cdot\xi. \tag{16}$$

Ca şi vectori tangeţi la curbe pe sferă avem că aceşti versori sunt tangenţi în $t = 0$ la curbele:

$$\begin{cases} C_i : t \in \mathbb{R} \to (\cos t + i\sin t)\cdot\xi \in S^3, \\ C_j : t \in \mathbb{R} \to (\cos t + j\sin t)\cdot\xi \in S^3, \\ C_k : t \in \mathbb{R} \to (\cos t + k\sin t)\cdot\xi \in S^3. \end{cases} \tag{17}$$

Vom verifica doar faptul că C_i este pe sfera S^3 pentru celelalte două curbe calculul fiind similar. Avem imediat:

$$C_i(t) = (\xi^1\cos t - \xi^2\sin t) + i(\xi^2\cos t + \xi^1\sin t) + j(\xi^3\cos t - \xi^4\sin t) + k(\xi^4\cos t + \xi^3\sin t) \quad (17)$$

şi suma pătratelor parantezelor rotunde dă exact $\|\xi\|_4^2 = 1$.

Observaţia 1 Vectorii tangenţi X_ξ, Y_ξ, Z_ξ sunt chiar liniar independenţi deoarece:

$$rang\begin{pmatrix} -\xi^2 & \xi^1 & -\xi^4 & \xi^3 \\ -\xi^3 & \xi^4 & \xi^1 & -\xi^2 \\ -\xi^4 & -\xi^3 & \xi^2 & \xi^1 \end{pmatrix}$$

este mai mic strict decât 3 dacă şi numai dacă $\xi = 0$ care nu aparţine sferei S^3. În concluzie, cei 3 vectori constituie chiar o bază în $T_\xi S^3$!

Observaţia 2 În spaţiul ambiant $\mathbb{R}^4$ avem că X_ξ, Y_ξ, Z_ξ sunt toţi versori datorită apartenenţei lui ξ la sfera S^3. În problema anterioară am obţinut expresia lor intrinsecă folosind harta h_N. Să presupunem acum că baza lui $T_\xi U_N$ natural asociată hărţii h_N i.e. $\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}|_u, \frac{\partial}{\partial u^2}|_u, \frac{\partial}{\partial u^3}|_u\right\}$ ar fi ortonormată şi să calculăm norma lui X_ξ folosind expresia intrinsecă (12):

$$\|X_\xi\|^2_{intrinsec} = (-u^2+u^1u^3)^2+(u^1+u^2u^3)^2+\frac{1}{4}\left[(u^1)^2+(u^2)^2-(u^3)^2-1\right]^2 = ... = \left(\frac{1+\|u\|^2}{2}\right)^2. \tag{18}$$

Prin urmare, pentru a obţine că X_ξ, Y_ξ, Z_ξ sunt şi intrinsec versori (!) vom defini ca produs scalar pe fiecare spaţiu tangent:

$$< \cdot, \cdot > |_{T_u S^n(R)} = \frac{4R^2}{(R^2+\|u\|^2)^2} < \cdot, \cdot >_{euclidian} . \tag{19}$$

Cu alte cuvinte, metrica Riemanniană=prima formă fundamentală a sferei $S^n(R)$ ca hipersuprafaţă în $\mathbb{R}^{n+1}$ este *conform euclidiană*:

$$g_{S^n(R)}(u) = \frac{4R^2}{(R^2+\|u\|^2)^2} g_{euclidian}, \quad g_{ij}(S^n(R), u) = \frac{4R^2}{(R^2+\|u\|^2)^2}\delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{20}$$

S11.5 Fie $M^n = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuprafaţă regulată în $\mathbb{R}^{n+1}$ definită de funcţia netedă $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ce este submersie pe M. Dat $x \in M$ să se exprime extrinsec spaţiul tangent $T_x M \subset T_x \mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ folosind *vectorul gradient al lui* F:

$$\nabla F(x) = (F_1, ..., F_{n+1})^t(x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad F_i := \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad 1 \leq i \leq n+1. \tag{21}$$

Rezolvare Conform problemei **S11.1** avem $T_x M = kerdF(x)$ dar matricea linie a operatorului liniar $dF(x)$ este exact transpusa matricii coloană a lui $\nabla F(x)$. În concluzie avem exprimarea extrinsecă:

$$T_x M = (span\{\nabla F(x)\})^\perp = \{u \in \mathbb{R}^{n+1}; < \nabla F(x), u >_{n+1} = 0\}. \tag{22}$$

S11.6 Fie vectorul $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{\bar{0}\}$. Datorită formulei (22) suntem interesaţi de descompunerea în sumă directă:

$$\mathbb{R}^m = span\{x\} \oplus (span\{x\})^\perp; \quad dim: m = 1 + (m-1). \tag{23}$$

Să se studieze această descompunere utilizând spaţiile vectoriale matriceale $Sym(m)$ şi $o(m)$ şi să se aplice la hipersuprafeţe regulate din $\mathbb{R}^{n+1}$.

Rezolvare Vectorul nenul x considerat ca matrice coloană $(m, 1)$ defineşte două aplicaţii:

$$sym(x; \cdot) : \mathbb{R}^m \simeq M_{m,1}(\mathbb{R}) \to Sym(m), \quad o(x; \cdot) : \mathbb{R}^m \simeq M_{m,1}(\mathbb{R}) \to o(m)$$

date de:

$$sym(x; y) := \frac{1}{\|x\|^2}(x \cdot y^t + y \cdot x^t), \quad o(x; y) := \frac{1}{\|x\|^2}(x \cdot y^t - y \cdot x^t). \tag{24}$$

Deoarece $sym(x;x) = \frac{2}{\|x\|^2} x \cdot x^t$ avem că descompunerea (23) se exprimă prin:

$$span\{x\} = \mathbb{R} \cdot x = \{\lambda x; \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad (span\{x\})^{\perp} = Im(I_m - \frac{1}{2} sym(x;x)) \tag{25}$$

i.e. vectorul oarecare $u \in \mathbb{R}^m$ are descompunerea unică:

$$u = u_x^{\|} + u_x^{\perp}, \quad u_x^{\|} := \frac{< x, u >}{\|x\|^2} x, \quad u_x^{\perp} = (I_m - \frac{1}{2} sym(x;x))(u). \tag{26}$$

De aici obţinem şi formula *reflecţiei faţă de hiperplanul* $\pi(x)$ ce are pe x ca normală:

$$R_{\pi(x)} : u \in \mathbb{R}^m \to u - \frac{2 < x, u >}{\|x\|^2} x \in \mathbb{R}^m, \quad u + R_{\pi(x)}(u) = 2u_x^{\perp}. \tag{27}$$

Aplicaţia 1 Folosind formalismul problemei **S11.5** avem exprimarea extrinsecă a spaţiului tangent al unei hipersuprafeţe:

$$T_x M = Im(I_{n+1} - \frac{1}{2} sym(\nabla F(x); \nabla F(x))). \tag{28}$$

O a doua exprimare a subspaţiului $(span\{x\})^{\perp}$ este dată de:

Propoziţie *$(span\{x\})^{\perp} = o(m) \cdot x$ i.e. dat $y \in \mathbb{R}^m$ avem $y \in (span\{x\})^{\perp}$ dacă şi numai dacă există $A \in o(m)$ a.î. $y = A \cdot x$.*

Demonstraţie *Suficienţa* Presupunem că $y = A \cdot x$ cu $A \in o(m)$. Avem imediat:

$$< x, y >=< x, A \cdot x >=< A^t \cdot x, x >=< -A \cdot x, x >= - < x, A \cdot x > \to < x, y >= 0.$$

Necesitatea Vom arăta că dacă $y \in (span\{x\})^{\perp}$ atunci $o(x,y)(x) = -y$ de unde rezultă concluzia deoarece $-o(x;y) \in o(m)$. În adevăr, din $y \in (span\{x\})^{\perp}$ rezultă:

$$o(x;y)(x) = \frac{1}{\|x\|^2} \left[x \cdot (y^t \cdot x) - y \cdot (x^t \cdot x)\right] = \frac{1}{\|x\|^2} [0 \cdot x - \|x\|^2 \cdot y] = -y$$

folosind $y^t \cdot x =< x, y >= 0$ şi $x^t \cdot x = \|x\|^2$.

Aplicaţia 2 A doua exprimare extrinsecă a spaţiului tangent al unei hipersuprafeţe este:

$$T_x M = o(n+1) \cdot \nabla F(x). \tag{29}$$

S11.7 Să se aplice formulele anterioare la $\xi \in S^n(R) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Rezolvare Deoarece $\nabla F(\xi) = 2\xi$ avem exprimările extrinseci:

$$T_\xi S^n(R) = Im(I_{n+1} - 2sym(\xi;\xi)) = o(n+1) \cdot \xi. \tag{30}$$

Caz particular $n = 1$ Ştim expresia generală a spaţiului vectorial $o(2)$ din problema **S8.7**:

$$A = A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = tJ$$

cu J structura aproape complexă a planului din problema **S10.4**. În concluzie:

$$T_\xi S^1(R) = \mathbb{R} \cdot J(\xi) = \mathbb{R} \cdot (i\xi) = \mathbb{R} \cdot (-\xi^2, \xi^1). \tag{31}$$

Obţinem deci şi o exprimare a fibratului tangent ca varietate 2-dimensională:

$$TS^1(R) = \cup_{\xi \in S^1(R)}(\mathbb{R} \cdot (-\xi^2, \xi^1)) = \{Rt(-\sin x, \cos x) \in \mathbb{R}^2; (x,t) \in \mathbb{R}^2\}. \qquad (32)$$

S11.8 Având în vedere formula (29) să se exprime vectorii tangenţi X_ξ, Y_ξ, Z_ξ folosind $o(4)$.

Rezolvare Avem:

$$X_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \xi, Y_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \xi, Z_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \xi \quad (33)$$

şi toate cele 3 matrici aparţin spaţiului vectorial $o(4)$. Deci vectorul generic $u \in T_\xi S^3$ are expresia $u = u(a,b,c) := aX_\xi + bY_\xi + cZ_\xi$ cu $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ şi:

$$u(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -c & b \\ b & c & 0 & -a \\ c & -b & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \xi. \qquad (34)$$

Dacă identificăm prima coloană cu cuaternionul (pur complex) $C_1 = q := ai + bj + ck$ avem că celelalte coloane sunt:

$$C_2 = q \cdot i, \quad C_3 = q \cdot j, \quad C_4 = q \cdot k. \qquad (35)$$

În concluzie, fibratul tangent al sferei S^3 este varietatea 6-dimensionalaă:

$$TS^3 = \{(q, q \cdot i, q \cdot j, q \cdot k) \cdot \xi; q \in \{0\} \times \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}, \xi \in S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}\}. \qquad (36)$$

S11.9 Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ să se caracterizeze sfera unitară de dimensiune impară S^{2n-1} folosind *produsul scalar Hermitian* $< \cdot, \cdot >_H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$:

$$< z, w >_H := z^1 \bar{w}^1 + ... + z^n \bar{w}^n, \quad z = (z^1, ..., z^n) \in \mathbb{C}^n, \quad w = (w_1, ..., w^n) \in \mathbb{C}^n. \qquad (37)$$

Rezolvare Avem:

$$< w, z >_H = \overline{< z, w >_H}, \quad < z, z >_H = |z^1|^2 + ... + |z^n|^2 \qquad (38)$$

de unde rezultă:

$$S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n; < z, z >_H = 1\} \qquad (39)$$

şi pentru $\xi \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ avem exprimarea extrinsecă a spaţiului vectorial tangent:

$$T_\xi S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n; \Re(< z, \xi >_H) = 0\}. \qquad (40)$$

Deoarece partea reală a unui număr complex coincide cu partea reală a conjugatului său obţinem o *dualitate extrinsecă* a spaţiilor tangente unitare specifică sferei: dacă $z \in T_\xi S^m \cap S^m$ atunci şi $\xi \in T_z S^m \cap S^m$ pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$!

Cursul 22

Seminar 12 (2021): Aplicaţia liniară tangentă şi aplicaţia liniară cotangentă

SEMINAR 12

S12.1 Fie varietatea M^n şi punctul $p \in M$ oarecare. Pentru aplicaţia netedă $1_M : M \to M$ se cer $T1_M(p) = d1_M(p) : T_pM \to T_pM$ şi $T^*1_M(p) : T_p^*M \to T_p^*M$.

Rezolvare Fixăm pe M harta locală $h = (U, \varphi)$ cu $p \in U$. Atunci exprimarea locală a funcţiei date este:

$$\varphi \circ 1_M \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n : x \to x.$$

Prin urmare $\varphi \circ 1_M \circ \varphi^{-1} = 1_{\varphi(U)}$ şi deci:

$$T1_M(p) = 1_{T_pM}, \quad T^*1_M(p) = 1_{T_p^*M}.$$

S12.2 Se cere aplicaţia liniară tangentă dF asociată funcţiei netede (şi holomorfe) $F : \mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{C}^*$, $F(z) = z^2$. Generalizare: $F(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq 2$.

Rezolvare În coordonate polare aplicaţia $F(r, \varphi) = (\tilde{r}, \tilde{\varphi}) := (r^2, 2\varphi)$ are Jacobianul:

$$JF(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2diag(r, 1). \tag{1}$$

Prin urmare, folosind şi formulele din exerciţiul **S10.2** avem:

$$dF(r, \varphi)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}}\right) \cdot 2diag(r, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2r\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} = 2\sqrt{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} = \frac{2}{\sqrt[4]{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}}\left(\tilde{x}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{y}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right).$$

$$dF(r, \varphi)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}}\right) \cdot 2diag(r, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} = 2\left(-\tilde{y}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{x}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right).$$

În coordonate carteziene aplicaţia $F(x,y)=(\tilde{x},\tilde{y}):=(x^2-y^2,2xy)$ are Jacobianul:

$$JF(x,y)=2\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}. \tag{2}$$

$$dF(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}},\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right)\cdot 2\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=2\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}},\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=2\left(x\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}+y\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right).$$

$$dF(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}},\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right)\cdot 2\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=2\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}},\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right)\cdot\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}=2\left(-y\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}+x\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right).$$

Ultimele două relaţii se pot exprima şi prin:

$$dF(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=2\sqrt{\tilde{r}}\left(\cos\frac{\tilde{\varphi}}{2}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}+\sin\frac{\tilde{\varphi}}{2}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right),\quad dF(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=2\sqrt{\tilde{r}}\left(-\sin\frac{\tilde{\varphi}}{2}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}+\cos\frac{\tilde{\varphi}}{2}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right).$$

Pentru generalizare tratăm doar prima parte a problemei: din $F(r,\varphi)=(\tilde{r},\tilde{\varphi}):=(r^n,n\varphi)$ rezultă $JF(r,\varphi)=ndiag(r^{n-1},1)$. Rezultă:

$$dF(r,\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)=nr^{n-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}=n\tilde{r}^{\frac{n-1}{n}}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}},\quad dF(r,\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)=n\frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}}.$$

S12.3 Fixăm $a\in\mathbb{R}^*$ şi vectorul $b\in\mathbb{R}^n$. Fie aplicaţia netedă $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $F(x)=ax+b$. Dat $p\in\mathbb{R}^n$ se cere $dF(p):T_p\mathbb{R}^n\simeq\mathbb{R}^n\to T_{\tilde{p}}\mathbb{R}^n\simeq\mathbb{R}^n$.

Rezolvare Avem $\tilde{p}=ap+b$ şi Jacobianul aplicaţiei date este:

$$JF(x)=aI_n,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Prin urmare avem:

$$dF(p)\left(u^1\frac{\partial}{\partial p^1}|_p+...+u^n\frac{\partial}{\partial p^n|_p}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{p}^1},...,\frac{\partial}{\partial \tilde{p}^n}\right)\cdot aI_n\cdot\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}=a\left(u^1\frac{\partial}{\partial \tilde{p}^1}|_{\tilde{p}}+...+u^n\frac{\partial}{\partial \tilde{p}^n|_{\tilde{p}}}\right).$$

S12.4 Fie funcţia netedă $f:S^1\to S^1$, $f(z)=z^2$ i.e. $f(e^{ix})=e^{2ix}$. Să se studieze această funcţie în atlasul trigonometric al problemei **S8.5**.

Rezolvare În harta trigonometrică avem $f_\varphi:=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}\to\mathbb{R}$ dată de:

$$t\to^{\varphi^{-1}}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)=(\cos x,\sin x)\to^f(\cos 2x,\sin 2x)\to^\varphi\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Semnificaţia eliminării valorii $t=\pm 1$ de la numitorul ultimei fracţii este dat de faptul că $\varphi^{-1}(\pm 1)=(0,\pm 1)=\pm i$ şi $f(\pm i)=P(0,-1)$ punctul scos din deschisul domeniu al hărţii trigonometrice!.

Avem:

$$(f_\varphi)'(t)=2\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}>0$$

ceea ce spune că f_φ este funcţie strict crescătoare.

S12.5 Fie funcţia netedă $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = i \cdot z$ i.e. $f(e^{ix}) = e^{i(x+\frac{\pi}{2})}$. Să se studieze această funcţie în atlasul trigonometric al problemei **S8.5**.

Rezolvare În harta trigonometrică avem $f_\varphi := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ dată de:

$$t \to^{\varphi^{-1}} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) = (\cos x, \sin x) \to^{f} \left(\cos(x+\frac{\pi}{2}), \sin(x+\frac{\pi}{2})\right) \to^{\varphi} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}} = \frac{1+t}{1-t}.$$

Semnificaţia eliminării valorii $t = 1$ de la numitorul ultimei fracţii este dat de faptul că $\varphi^{-1}(1) = (0,1) = i$ şi $f(i) = P(0,-1)$ punctul scos din deschisul domeniu al hărţii trigonometrice!.

Avem:

$$(f_\varphi)'(t) = \frac{2}{(1-t)^2} > 0$$

ceea ce spune că f_φ este funcţie strict crescătoare.

S12.6 Fie U deschis nevid din $\mathbb{R}^n$ şi funcţia $f \in C^\infty(U)$. *Hessiana lui* f este aplicaţia $H^f : U \to Sym(n)$ dată de $H^f(x) = (H^f_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ cu:

$$H^f_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = H^f_{ji}. \tag{3}$$

Se cere Hessiana funcţiei *pătratul normei euclidiene* i.e. a funcţiei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f(x) = \|x\|^2$.

Rezolvare Avem imediat $H^f(x) = 2I_n$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$. Deci considerată ca aplicaţie Hessiana lui f este constantă.

S12.7 Fie applicaţia netedă $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $F(x) = -x$ a cărei restriţie $\mathscr{A} = F|_{S^n} : S^n \to S^n$ o numim *aplicaţia antipodală*. Să se studieze această aplicaţie în atlasul dat de proiecţiile stereografice din cei doi poli.

Rezolvare În raport cu cele două hărţi avem $\varphi_N \circ \mathscr{A} \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dată de:

$$\mathbb{R}^n \ni u \to^{\varphi_S^{-1}} \frac{1}{1+\|u\|_n^2}(2u, 1-\|u\|_n^2) \to^{\mathscr{A}} \frac{1}{1+\|u\|_n^2}(-2u, \|u\|_n^2 - 1) \to^{\varphi_N}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\|u\|^2-1}{\|u\|^2+1}} \cdot -\frac{2u}{1+\|u\|^2} = -u.$$

Prin urmare, $\mathscr{A}$ este aplicaţie netedă şi deoarece:

$$d(\varphi_N \circ \mathscr{A} \circ \varphi_S^{-1})(u) : T_u\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \to T_{-u}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$$

este:

$$d(\varphi_N \circ \mathscr{A} \circ \varphi_S^{-1})(u) = -I_n \in GL(n, \mathbb{R})$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^n$ avem că $\mathscr{A}$ este chiar un difeomorfism al sferei S^n cu $\mathscr{A}^{-1} = \mathscr{A}$ şi diferenţiala:

$$d(\varphi_N \circ \mathscr{A} \circ \varphi_S^{-1})(u)(X_u \in T_u\mathbb{R}^n) = -X_{-u} \in T_{-u}\mathbb{R}^n.$$

S12.8 Să se studieze aplicaţia antipodală pe cercul $S^1\setminus\{P(-1,0)\}$ folosind atlasul trigonometric.

Rezolvare Expresia locală $\mathscr{A}_\varphi := \varphi\circ\mathscr{A}\circ\varphi^{-1}$ lui $\mathscr{A}$ în harta trigonometrică este:

$$\mathbb{R}^* \ni t \rightarrow^{\varphi^{-1}} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \rightarrow^{\mathscr{A}} \left(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{-2t}{1+t^2}\right) \rightarrow^{\varphi} \frac{1-\frac{t^2-1}{t^2+1}-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{t^2-1}{t^2+1}-\frac{2t}{1+t^2}} =$$

$$= \frac{t^2+1-t^2+1-2t}{t^2+1+t^2-1-2t} = \frac{2(1-t)}{2t(t-1)} = -\frac{1}{t}.$$

Să observăm că punctul $t=0$ se duce prin φ^{-1} în $(1,0)$ care prin aplicaţia antipodală $\mathscr{A}$ se duce exact în punctul P pe care nu-l considerăm! Prin urmare, $\mathscr{A}$ este aplicaţie netedă cu diferenţiala:

$$d(\mathscr{A}_\varphi)(t) = (\mathscr{A}_\varphi)'(t) = \frac{1}{t^2} > 0$$

Deci $\mathscr{A}$ este chiar difeomorfism pe $S^1\setminus\{P, 1=(1,0)\}$ cu $\mathscr{A}^{-1}=\mathscr{A}$ şi $\mathscr{A}_\varphi$ funcţie strict crescătoare.

Reamintim că pentru parametrizarea trigonometrică $(\cos x, \sin x)$ a lui S^1 avem $t = tg\frac{x}{2}$. Deci $\mathscr{A}_\varphi(t) = \tilde{t} = -\frac{1}{t}$ cu $\tilde{t} = tg\frac{\tilde{x}}{2}$. Rezultă:

$$tg\frac{\tilde{x}}{2} = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}} = -ctg\frac{x}{2}$$

şi această ecuaţie trigonometrică în $\tilde{x}$ are soluţiile:

$$\frac{\tilde{x}}{2} = \frac{x}{2} \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \tilde{x} = x\pm\pi.$$

Rezultă $\mathscr{A}(\cos x, \sin x) = (\cos\tilde{x}, \sin\tilde{x}) = (\cos(x\pm\pi), \sin(x\pm\pi)) = -(\cos x, \sin x)$ exact cum era de aşteptat!

S12.9 Să se studieze n-grupul ortogonal $O(n)$ ca subvarietate regulată în $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Rezolvare Funcţia $F : M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow Sym(n) = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $F(X) = X^t\cdot X - I_n$ este evident netedă (fiind polinomială de gradul 2) şi avem $O(n) = F^{-1}(O_n)$ cu O_n=matricea nulă. Fixăm $X\in M_n(\mathbb{R})$ şi calculăm $dF(X) : T_X M_n(\mathbb{R}) \simeq M_n(\mathbb{R}) \rightarrow T_{F(X)}Sym(n) \simeq Sym(n)$:

$$dF(X)(A) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[F(X+tA) - F(X)\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(X+tA)^t\cdot(X+tA) - X^t\cdot X] =$$

$$= A^t\cdot X + X^t\cdot A = X^t\cdot A + (X^t\cdot A)^t. \tag{3}$$

Să arătăm că $dF(X)$ este surjectivă pe $O(n)$: pentru $X\in O(n)$ şi $B\in Sym(n)$ ecuaţia matriceală $dF(X)(A) = B = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^t$ cu necunoscuta A are soluţia unică:

$$X^t\cdot A = \frac{1}{2}B \rightarrow A = \frac{1}{2}X\cdot B.$$

Prin urmare $F|_{O(n)}$ este submersie şi deci $O(n)$ este subvarietate regulată în $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ de dimensiune: $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, exact ceea ce ştiam din problema **S8.7**. Mai mult, spaţiul tangent în elementul neutru al acestui grup Lie este:

$$T_{I_n}O(n) = kerdF(I_n) = o(n) \tag{4}$$

înlocuind $X = I_n$ în formula (3). Pentru $X \in O(n)$ arbitrar avem:

$$T_X O(n) = X \cdot o(n). \tag{5}$$

S12.10 Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(u,v) = (x,y,z) := (u+v, u^2-v^2, 2uv)$; avem $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Fie $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, $\theta = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ i.e. pentru orice $\tilde{p} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ avem $\theta(\tilde{p}) = \alpha(\tilde{p})dx|_{\tilde{p}} + \beta(\tilde{p})dy|_{\tilde{p}} + \gamma(\tilde{p})dz|_{\tilde{p}} \in T^*_{\tilde{p}}\mathbb{R}^3$. Dat $p = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ cu $F(p) = \tilde{p}$ se cere $F^*_p[\theta(\tilde{p}] \in T^*_p\mathbb{R}^2$.

Soluţie $F^*\theta = \alpha(\tilde{p}(p))d(u+v)|_p + \beta(\tilde{p}(p))d(u^2-v^2)|_p + \gamma(\tilde{p}(p))d(2uv)|_p = [\alpha(u,v) + 2\beta(u,v)u + 2\gamma(u,v)v]du|_p + [\alpha(u,v) - 2\beta(u,v)v + 2\gamma(u,v)u]dv|_p$.

Cursul 23

Seminar 13 (2021): Algebra Lie a câmpurilor vectoriale

SEMINAR 13

$$\mathfrak{X}(M^n) \ni X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \to [X,Y] := [X,Y]^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad [X,Y]^k := X(Y^k) - Y(X^k).$$

S13.1 Fie varietatea 1-dimensională M şi $A, B \in \mathfrak{X}(M)$ cu expresia locală $A = a(x)\frac{\partial}{\partial x}$, $B = b(x)\frac{\partial}{\partial x}$ cu a şi b funcţii nenule. În ce condiţii aceste câmpuri vectoriale comută?

Rezolvare Avem: $[A,B] = [a(x)b'(x) - b(x)a'(x)]\frac{\partial}{\partial x}$ şi deci $[A,B] = 0$ dacă şi numai dacă $ab' = a'b$. Putem scrie această condiţie sub forma:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

şi prin integrare rezultă proporţionalitatea celor două funcţii: $b(x) = Ca(x)$ cu $C > 0$ o constantă.

S13.2 Fie varietatea $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ şi câmpurile vectoriale $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ exprimate în relaţiile (4) din problema **S10.2** în funcţie de câmpurile vectoriale $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Să se verifice pe această cale comutarea $[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] = 0$.

Rezolvare Avem:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = \left[\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right] =$$

$$= \cos\varphi\left(-\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\sin\varphi}{r}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) +$$

$$+ \sin\varphi\left(-\frac{\sin\varphi}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\cos\varphi}{r}\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = 0.$$

S13.3 Invers, folosind expresia câmpurilor vectoriale $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ în funcţie de câmpurile vectoriale $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ să se verifice comutarea $[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}] = 0$.

Rezolvare Avem:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right] = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}, -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right] =$$

$$= y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial}{\partial y} +$$

$$+ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} = 0.$$

În adevăr, coeficienţii câmpurilor vectoriale $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ sunt:

$$\frac{\partial}{\partial x} : -\frac{y}{r} + \frac{y^3}{r^3} + \frac{x^2 y}{r^3} = \frac{-y+y}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : \frac{x}{r} + \frac{-y^2 x}{r^3} + \frac{-x^3}{r^3} = \frac{x-x}{r} = 0.$$

S13.4 Conform problemei **S11.3** pe sfera S^3 avem câmpurile vectoriale globale:

$$\begin{cases} X := -\xi^2\frac{\partial}{\partial \xi^1} + \xi^1\frac{\partial}{\partial \xi^2} - \xi^4\frac{\partial}{\partial \xi^3} + \xi^3\frac{\partial}{\partial \xi^4}, \\ Y := -\xi^3\frac{\partial}{\partial \xi^1} + \xi^4\frac{\partial}{\partial \xi^2} + \xi^1\frac{\partial}{\partial \xi^3} - \xi^2\frac{\partial}{\partial \xi^4}, \\ Z := -\xi^4\frac{\partial}{\partial \xi^1} - \xi^3\frac{\partial}{\partial \xi^2} + \xi^2\frac{\partial}{\partial \xi^3} + \xi^1\frac{\partial}{\partial \xi^4}. \end{cases} \tag{1}$$

Să se arate că $\{X, Y, Z\}$ formează o subalgebră Lie a algebrei Lie $\mathfrak{X}(S^3)$.

Rezolvare Avem:

$$[X,Y] = -\xi^2\frac{\partial}{\partial \xi^3} + \xi^1\left(-\frac{\partial}{\partial \xi^4}\right) + \xi^4\frac{\partial}{\partial \xi^1} + \xi^3\frac{\partial}{\partial \xi^2} + \xi^3\frac{\partial}{\partial \xi^2} + \xi^4\frac{\partial}{\partial \xi^1} - \xi^1\frac{\partial}{\partial \xi^4} + \xi^2\left(-\frac{\partial}{\partial \xi^3}\right) = -2Z. \tag{2}$$

Prin permutări circulare obţinem:

$$[Y,Z] = -2X, \quad [Z,X] = -2Y \tag{3}$$

şi deci avem concluzia: croşetul Lie a oricăror două din cele 3 câmpuri vectoriale aparttţine lui $span\{X, Y, Z\}$.

S13.5 O matrice oarecare $A \in M_n(\mathbb{R})$ defineşte *câmpul vectorial liniar* $V_A \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ prin:

$$V_A(x) = (A\cdot x)^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x = (a^i_j x^j)\frac{\partial}{\partial x^i}|_x, \quad x = (x^1, ..., x^n)^t \in \mathbb{R}^n, \quad A = (a^i_j)_{1\le i,j\le n}.$$

Să se arate că mulţimea câmpurilor vectoriale liniare pe $\mathbb{R}^n$ constituie o subalgebră Lie în algebra Lie $(\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n), [\cdot,\cdot])$ anti-izomorfă cu algebra Lie $(L(GL(n,\mathbb{R})) = gl(n,\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot])$ i.e.:

$$[V_A, V_B] = -V_{[A,B]}, \quad [A,B] := A\cdot B - B\cdot A. \tag{4}$$

Rezolvare Avem:

$$[V_A, V_B] = a^i_j x^j\left(b^k_i\frac{\partial}{\partial x^k}\right) - b^i_j x^j\left(a^k_i\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = -[(a^k_i b^i_j - b^k_i a^i_j)x^j]\frac{\partial}{\partial x^i}|_x =$$

$$= -([A,B]^k_j x^j)\frac{\partial}{\partial x^i} = -V_{[A,B]}.$$

Câmpul vectorial Euler $E \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ este:

$$E := x^i \frac{\partial}{\partial x^i} = V_{I_n} \tag{5}$$

şi avem: $[\frac{\partial}{\partial x^a}, E] = \frac{\partial}{\partial x^a}$ pentru $1 \leq a \leq n$. Mai mult, deoarece matricea unitate comută cu orice altă matrice avem că pentru orice câmp vectorial liniar $[V_A, E] = 0$.

S13.6 Pentru $n = 2$ am scris expresia lui E în coordonate polare şi coordonate complexe în problema **S10.3**. Se cer câmpurile $[\frac{\partial}{\partial r}, E]$ şi $[\frac{\partial}{\partial \varphi}, E]$ şi expresiile acestor paranteze Lie în coordonate carteziene.

Rezolvare Deoarece $[\frac{\partial}{\partial r}, E = r\frac{\partial}{\partial r}] = \frac{\partial}{\partial r}$ rezultă:

$$\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Analog din $[\frac{\partial}{\partial \varphi}, E = r\frac{\partial}{\partial r}] = 0$ rezultă:

$$\left[-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right] = 0.$$

Temă Efectuaţi direct în coordonate carteziene calculul ultimelor două formule!

S13.7 Să se reobţină croşetele Lie din problema **S13.4** scriind $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S^3)$ ca pe câmpuri vectoriale liniare şi folosind formula (4).

Rezolvare În problema **S11.8** am scris X, Y, Z ca fiind: $X = V_A$, $Y = V_B$, $Z = V_C$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avem imediat:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

şi folosind anti-simetria acestor matrici:

$$B \cdot A = (-B^t) \cdot (-A^t) = B^t \cdot A^t = (A \cdot B)^t = C^t = -C$$

ceea ce spune că:

$$[A, B] = C - (-C) = 2C \to [X, Y] = [V_A, V_B] = -V_{[A,B]} = -V_{2C} = -2V_C = -2Z$$

adică relaţia (2). Prin permutări circulare obţinem (3).

S13.8 Fie $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, $X = yz\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = zx\frac{\partial}{\partial y}$, $Z = xy\frac{\partial}{\partial z}$. Să se verifice pe aceste câmpuri vectoriale *identitatea Jacobi*:

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0. \tag{6}$$

Rezolvare Avem:

$$[X,Y] = zyz\frac{\partial}{\partial y} - zxz\frac{\partial}{\partial x} = z^2\left(y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Prin permutări circulare avem şi:

$$[Y,Z] = x^2\left(z\frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad [Z,X] = y^2\left(x\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Prin urmare:

$$[[X,Y],Z] = [yz^2\frac{\partial}{\partial y} - xz^2\frac{\partial}{\partial x}, xy\frac{\partial}{\partial z}] =$$

$$= yz^2x\frac{\partial}{\partial z} - xz^2y\frac{\partial}{\partial z} - xy2yz\frac{\partial}{\partial y} + xy2xz\frac{\partial}{\partial x} = 2x^2yz\frac{\partial}{\partial x} - 2xy^2z\frac{\partial}{\partial y}. \tag{7}$$

Prin permutări circulare avem:

$$[[Y,Z],X] = 2xy^2z\frac{\partial}{\partial y} - 2xyz^2\frac{\partial}{\partial z}, \quad [[Z,X],Y] = -2x^2yz\frac{\partial}{\partial x} + 2xyz^2\frac{\partial}{\partial z}. \tag{8}$$

Adunăm (7) cu cele două relaţii (8) şi obţinem zero.

S13.9 Aceeaşi cerinţă ca la problema anterioară dar pentru câmpurile vectoriale:

$$X = yz\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \alpha zx\frac{\partial}{\partial y}, \quad Z = \beta xy\frac{\partial}{\partial z}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare TEMĂ!

S13.10 Fie varietea $\mathbb{R}$. Câmpurile vectoriale $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = x\frac{\partial}{\partial x}$, $Z = x^2\frac{\partial}{\partial x}$ constituie o *reprezentare* a algebrei Lie $sl(2, \mathbb{R})$.

Rezolvare Avem:

$$[X,Y] = X, \quad [Y,Z] = Z, \quad [Z,X] = -2Y.$$

Cursul 24

Seminar 14 (2021): Fluxul unui câmp vectorial

SEMINAR 14

S14.1 Se cere fluxul câmpului vectorial unghiular $\frac{\partial}{\partial\varphi} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})$ dat de formula (3) din problema **S10.2**:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Să se arate că acest câmp vectorial este invariat de grupul său 1-parametric $(\phi_t)_t$.

Rezolvare Avem sistemul diferenţial cu data iniţială $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$:

$$\begin{cases} \dot{x} := \frac{dx}{dt} = -y \\ \dot{y} := \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Derivând prima ecuaţie din nou rezultă:

$$\ddot{x} = -x$$

despre care ştim soluţia generală: $x(t) = A\cos t + B\sin t$ şi din datele iniţiale avem: $A = x(0) = x_0$, $B = \dot{x}(0) = -y_0$ şi deci:

$$x(t) = x_0\cos t - y_0\sin t, \quad y(t) = y_0\cos t + x_0\sin t.$$

În concluzie, fluxul câmpului vectorial unghiular este:

$$\phi_t : p(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \tilde{p}(x\cos t - y\sin t, y\cos t + x\sin t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$ deci câmpul vectorial unghiular este complet. Avem legea de conservare:

$$x^2(t) + y^2(t) = x(0)^2 + y(0)^2 = R^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

În coordonate polare avem sistemul diferenţial:

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

cu soluţia: $r(t) = constant = R > 0$, $\varphi(t) = t \in [0, 2\pi]$; deci curbele integrale ale câmpului vectorial unghiular sunt cercuri centrate în origine.

Să mai observăm că sistemul diferenţial în coordinate carteziene este liniar:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -J \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

cu J=structura aproape complexă a planului punctat din problema **S10.4**.

Difeomorfismului ϕ_t al varietăţii $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ îi asociem aplicaţia liniară tangentă $(\phi_t)_{*,p} : TpM \to T_{\tilde{p}}M$ dată de matricea sa Jacobiană:

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO(2)$$

şi deci:

$$(\phi_t)_{*,p}(X_p) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\tilde{p}} \\ y_{\tilde{p}} \end{pmatrix} = X_{\tilde{p}}$$

ceea ce arată invarianţa lui X la acţiunea grupului 1-parametric $(\phi_t)_t \in \mathbb{R}$.

S14.2 Se cere fluxul câmpului vectorial Euler $E \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})$:

$$E = r\frac{\partial}{\partial r} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Să se arate că acest câmp vectorial este invariat de grupul său 1-parametric $(\phi_t)_t$.

Rezolvare Avem sistemul diferenţial cu data iniţială $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$:

$$\begin{cases} \dot{x} := \frac{dx}{dt} = x \\ \dot{y} := \frac{dy}{dt} = y, \end{cases}$$

cu soluţia $x(t) = x_0 e^t$, $y(t) = y_0 e^t$. Deci fluxul lui E este:

$$\phi_t : p(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \tilde{p}(e^t(x, y)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi deci E este câmp vectorial complet. Avem legea de conservare (pentru $x(0) \neq 0$):

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y(0)}{x(0)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

În coordonate polare avem sistemul diferenţial:

$$\begin{cases} \dot{r} = r \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

cu soluţia $r(t) = r_0 e^t$, $\varphi(t) = constant = \varphi_0$; deci curbele integrale ale lui E sunt dreptele prin origine (dar fără O) de pantă φ_0.

Difeomorfismului ϕ_t al varietăţii $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ îi asociem aplicaţia liniară tangentă $(\phi_t)_{*,p} : TpM \to T_{\tilde{p}}M$ dată de matricea sa Jacobiană:

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = e^t I_2$$

şi deci:

$$(\phi_t)_{*,p}(E_p) = e^t I_2 \cdot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = e^t(x_p, y_p) = \begin{pmatrix} x_{\tilde{p}} \\ y_{\tilde{p}} \end{pmatrix} = X_{\tilde{p}}$$

ceea ce arată invarianţa lui E la acţiunea grupului 1-parametric $(\phi_t)_t \in \mathbb{R}$.

S14.3 Să se verifice comutarea $\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}, E = r\frac{\partial}{\partial r}\right] = 0$ prin comutarea fluxurilor asociate:

$$\phi_t^{\frac{\partial}{\partial \varphi}} \circ \phi_s^E = \phi_s^E \circ \phi_t^{\frac{\partial}{\partial \varphi}}.$$

Rezolvare Avem:

$$(x, y) \rightarrow^{\phi^{\frac{\partial}{\partial \varphi}}} (x\cos t - y\sin t, y\cos t + x\sin t) \rightarrow^{\phi^E} e^s(x\cos t - y\sin t, y\cos t + x\sin t).$$

Analog:

$$(x, y) \rightarrow^{\phi^E} e^s(x, y) \rightarrow^{\phi^{\frac{\partial}{\partial \varphi}}} e^s(x\cos t - y\sin t, y\cos t + x\sin t)$$

şi se observăm că avem acelaşi rezultat final.

S14.4 Este *complet* orice câmp vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$?

Rezolvare Fie $X = x^2\frac{\partial}{\partial x}$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$. Curba integrală a lui X prin x_0 este soluţia unică a problemei Cauchy:

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0.$$

Din $\dot{x}/x^2 = 1$ prin integrare avem:

$$-\frac{1}{x(t)} = t + C$$

cu C constanta de integrare. Prin urmare:

$$x(t) = -\frac{1}{t + C}, \quad x_0 = -\frac{1}{C}$$

ceea ce spune că trebuie să considerăm doar $x_0 \neg 0$ şi avem:

$$C = -\frac{1}{x_0}$$

ceea ce dă soluţia finală:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Datorită expresiei de la numitor această curbă nu este definită în $\tilde{t} = \frac{1}{x_0}$ deci câmpul vectorial X **nu** este complet. În concluzie, răspunsul problemei este negativ!

Observaţie Dacă varietatea M este compactă atunci orice câmp vectorial pe M este complet!

S14.5 Se cere fluxul câmpului vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Rezolvare Avem sistemul diferenţial:

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

cu soluţia:

$$x(t) = e^t x_0, \quad y(t) = e^{-t} y_0$$

ceea ce dă legea de conservare:

$$x(t)y(t) = x_0 y_0 = C$$

ceea ce spune că curbele integrale ale lui X sunte hiperbole echilatere: $xy = C$.

S14.6 .

Rezolvare .

S14.7 .

Rezolvare .

Bibliografie

[1] M. Abate; F. Tovena, *Curves and Surfaces*, Springer, 2012.

[2] M. Anastasiei; M. Crâşmăreanu, *Lectures on geometry (Curves and surfaces)* (in Romanian), 200 p., Ed. Tehnopress, Iaşi. 2005.

[3] M. Crâşmăreanu, *Curves and surfaces: Problem Book* (in Romanian), 101 p., Ed. Cermi, Iaşi, 2003.

[4] A. Fédenko et coll., *Recueil d'exercices de géométrie différentielle*, Mir, Moscou, 1982.

[5] S. Montiel; A. Ros, *Curves and Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics vol. 69, A.M.S., 2005.

[6] V. Rovenski, *Modeling of curves and surfaces with MATLAB®*, Springer, 2010.

Index