Aspecte metodice în predarea geometriei

Mircea Crâşmăreanu

10 Octombrie 2022

Cuprins

Cursul 1

Coordonate polare în plan

În planul (afin euclidian !) π fixăm reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$. Deci O este un punct fixat al planului numit *pol* iar $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ este o bază ortonormată: $\bar{i}$, $\bar{j}$ sunt versori ortogonali, $\bar{i} \perp \bar{j}$. Semidreapta $(Ox$ determinată de direcţia şi sensul lui $\bar{i}$ o numim *semiaxa polară*.

Fixăm punctul $M \in \pi$. Vectorul $\bar{r}_M = \overrightarrow{OM}$ îl numim *vectorul de poziţie al lui M în raport cu* $\mathcal{R}$. Acest vector se descompune în mod unic în baza B: $\bar{r}_M = x_M \bar{i} + y_M \bar{j}$. Spunem atunci că M are *coordonatele* (carteziene) (x_M, y_M) *în raport cu* $\mathcal{R}$ şi notăm $M(x_M, y_M)$. Spre exemplu, avem $O(0,0)$.

Dacă $M \neq O$ atunci numim *coordonatele polare* ale lui M în raport cu $\mathcal{R}$ perechea $(r, \theta) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi]$ dată de:

$$r := \|\overrightarrow{OM}\| = \|\bar{r}_M\| > 0, \ \theta := \measuredangle_{orientat}(\bar{i}, \overrightarrow{OM}). \tag{1.1}$$

Observaţie. Pentru O putem considera $r = 0$ dar unghiul θ este nedefinit; deci coordonatele polare pentru O sunt nedeterminate. În concluzie, coordonatele polare se folosesc pe $\pi \setminus \{O\}$! $\square$

Din definiţia funcţiilor trigonometrice cosinus şi sinus avem imediat expresia coordonatelor carteziene în funcţie de cele polare:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{1.2}$$

formulă dată de Isaac Newton în 1670. Deoarece am exclus cazul $M = O$ i.e. avem $(x, y) \neq (0, 0)$ putem inversa:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \theta = arctg\frac{y}{x}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Formula distanţei euclidiene între două puncte $A_1(\rho_1, \theta_1)$, $A_2(\rho_2, \theta_2)$ date prin coordonatele lor polare

$$d_e(A_1, A_2) = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2 - \theta_1)} = \sqrt{(\rho_2^2 - \rho_1^2)^2 + 4\rho_1\rho_2\sin^2\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \tag{1.4}$$

se obţine imediat din expresia distanţei euclidiene date de teorema lui Pitagora. Să remarcăm că prima egalitate din (1.4) este exact *Teorema cosinusului*! În particular, dacă A_1 şi A_2 sunt pe aceeaşi dreaptă prin origine i.e. $\theta_1 = \theta_2$ atunci, aşa cum era de aşteptat, avem:

$$d_e(A_1, A_2) = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos 0} = |\rho_2 - \rho_1|. \tag{1.4bis}$$

Exemple 1 1. *Cercul* de rază R centrat în origine are ecuaţia carteziană:

$$C: \ x^2 + y^2 = R^2 \tag{1.5}$$

respectiv ecuaţia polară $C: \ r = R$.
2. *Spirala lui Arhimede* $C: r = a\theta$ cu a constantă reală strict pozitivă. A fost utilizată de Arhimede în secolul III î.H. în legătură cu problema trisecţiunii unui unghi.
3. *Spirale sinusoidale* $C: r = a(\cos(m\theta))^{\frac{1}{m}}$. Avem, printre altele, hiperbola ($m = -2$), parabola ($m = -\frac{1}{2}$), cardiotida ($m = \frac{1}{2}$), lemniscata lui Bernoulli ($m = 2$).
4. Fie C o conică nedegenerată definită ca locul geometric al punctelor din plan cu proprietatea că raportul distanţelor la un punct fix F (numit *focar*) şi la o dreaptă fixă d (numită *directoare*) este o constantă e numită *excentricitate*. Alegem reperul ortonormat din plan cu $\bar{j}$ versorul lui d, $\bar{i}$ versorul perpendicularei din F pe d iar O piciorul perpendicularei din F pe d. Atunci, un calcul imediat dă $C: r := \frac{e}{1-e\cos\theta}$ cu $e < 1$ pentru elipsă, $e = 1$ pentru parabolă şi $e > 1$ pentru hiperbolă. Pentru a obţine şi a doua ramură a hiperbolei se înlocuieşte 1 de la numitor cu (-1). Această ecuaţie în coordonate polare a conicelor nedegenerate este foarte utilă în mecanica cerească. Se dovedeşte astfel că planetele descriu o traiectorie eliptică cu Soarele în unul din focare. Oare cine este al doilea focar?
□

Ecuaţiile (1.2) determină funcţia $F: (0, +\infty) \times (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$F(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta). \tag{1.6}$$

Restricţia lui F la mulţimea deschisă $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ este inversabilă şi din (1.3) avem inversa $F^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ dată de:

$$F^{-1}(x,y) := \left(\sqrt{x^2+y^2}, arctg\frac{y}{x}\right). \tag{1.7}$$

Această inversabilitate a lui F se poate studia şi utilizând calculul diferenţial şi Teorema de inversare locală. Amintim mai întâi:

Definiţia 2 Fie U şi W deschişi în $\mathbb{R}^n$ şi $F: U \to W$ o bijecţie. Spunem că F este *difeomorfism* dacă F şi F^{-1} sunt netede i.e. diferenţiabile de clasă C^∞.

Teorema de inversare locală *Fie V deschis în $\mathbb{R}^n$, $F: V \to \mathbb{R}^n$ netedă şi $x_0 \in V$. Dacă aplicaţia liniară tangentă=diferenţiala $DF(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este izomorfism liniar atunci există U deschis în V cu $x_0 \in U$ aşa încât $F(U)$ este deschis în $\mathbb{R}^n$ şi $F|_U: U \to F(U)$ este difeomorfism.*

Practic, matricea transformării liniare $DF(x_0)$ în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$ este exact matricea Jacobiană:

$$JacF(x_0) := \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)(x_0) \in M_n(\mathbb{R}) \tag{1.8}$$

şi deci $DF(x_0)$ este izomorfism liniar dacă şi numai dacă $JacF(x_0) \in GL(n,\mathbb{R})$=*$n$-grupul liniar general real*=grupul n-matricilor inversabile.

Pentru F dată de (1.6) avem evident că funcţile sale componente (F^1, F^2) sunt netede şi:

$$JacF(r,\theta) = \begin{pmatrix} F^1_r & F^1_\theta \\ F^2_r & F^2_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Determinantul acestei matrici este:

$$|JacF(r,\theta)| = r > 0 \tag{1.10}$$

şi reobţinem că F este difeomorfism pe deschisul maximal $(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)$.

În coordonate polare metrica euclidiană a planului, $g_e = dx^2 + dy^2$, devine:

$$g_e = [d(r\cos\theta)]^2 + [d(r\sin\theta)]^2 = (dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta)^2 + (dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (1.11)$$

O metrică de forma:

$$g = dr^2 + f^2(r)d\theta^2 \quad (1.12)$$

se numesc *metrică warped plană*; funcţia $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+$ trebuie să fie de clasă C^∞. Prin urmare, metrica euclidiană este un exemplu de metrică warped plană. Cu $r = constant = 1$ obţinem pe cercul unitate S^1 metrica *unghiulară* sau *sferică*: $ds_1 = d\theta$. Spre exemplu, distanţa unghiulară dintre punctele $1 = M_1(1,0) \in Ox$ şi $i = M_2(0,1) \in Oy$ este, aşa cum era de aşteptat, $d_s(1,i) = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$ deoarece în cordonate polare avem $M_1(1,0), M_2(1,\frac{\pi}{2}) \in S^1$. Tot din distanţa unghiulară reobţinem şi lungimea cercului de rază R: $L(C(O,R)) = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} R d\theta = 2\pi R$.

Mai general, fie S^n sfera unitate din $\mathbb{R}^{n+1}$ şi ds_n^2 metrica sa Riemann indusă din metrica Euclidiană $g_{can} = g_e$ a lui $\mathbb{R}^{n+1}$. O metrică Riemann în dimensiunea $(n+1)$ de forma:

$$g = dr^2 + f^2(r)ds_n^2 \quad (1.13)$$

cu $f : (0,T) \to (0,+\infty)$ de clasă C^∞ o numim *metrică warped* (generală); deci g este metrică Riemann pe varietatea diferenţială $M^{n+1} = (0,T)\times S^n$. Spre exemplu, chiar metrica sferei S^{n+1} este:

$$ds_{n+1}^2 = dr^2 + \sin^2 r ds_n^2 \quad (1.14)$$

cu $T = \pi$. Putem vizualiza pentru S^2 acest fapt astfel: intersectăm S^2 cu planul vertical $x = 0$ şi luăm în considerare semicercul inferior al cercului de secţiune. Capătului din stânga al acestui semicerc, care este punctul $(0,-1,0$ îi asociem $r = 0$ iar capătului din dreapta al acestui semicerc, care este punctul $(0,1,0)$ îi asociem $r = \pi$. Pe fiecare punct al acestui semicerc construim pe verticală cercul de rază $\sin r$. La mijlocul acestui semicerc, care este punctul $(0,0,-1)$ avem $r = \frac{\pi}{2}$ şi pe verticală avem cercul de rază $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ adică exact S^1. Această parcurgere a semicercului indicatşi plasare pe verticală de cercuri produce exact sfera S^2 cu metrica warped $ds_2 = dr^2 + \sin^2 r ds_1^2 = dr^2 + \sin^2 r d\theta^2$! (A se vedea desenul de la finalul acestui Curs!)

Revenind la cazul plan de mai sus avem descompunerea dată de coordonatele polare $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = (0, T = \infty) \times S^1$ iar produsul este exact conul circular drept având pe $\mathcal{C}(O,r)$ ca cerc de secţiune la nivelul $r \in (0,+\infty)$ şi generatoarea=semidreapta reală strict pozitivă. Acest con are scos vârful O!

Subiecte Gradul II, 2016, Iaşi

1. Elaboraţi un proiect didactic pentru lecţia de predare "Ecuaţii ale dreptei în plan", (clasa a X-a, geometrie), prezentând:
-Ecuaţia determinată de un punct şi pantă (punct şi direcţie), ecuaţia determinată de două puncte, ecuaţiile parametrice, ecuaţia generală (cu justificarea lor).
-Rezolvaţi şi comentaţi din punct de vedere metodic exerciţiul:
Să se determine mulţimea punctelor M din plan cu proprietatea că există $t \in \mathbb{R}$ a. î. $\overrightarrow{OM} = (4-t)\bar{i} + (3t-2)\bar{j}$ unde $\{O,\bar{i},\bar{j}\}$ este un reper cartezian.

2. Exemplificaţi fundamentarea cunoştinţelor de divizibilitate prin rezolvarea următorului exerciţiu: Dacă $n \in \mathbb{N}$ atunci $3n^2 - 1$ nu se divide nici cu 3, nici cu 5 şi nici cu 7.

3. Se consideră funcţia: $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{2(x-1)}{x+1}$.
a) Să se traseze graficul şi să se determine punctele de pe grafic în care tagenta este paralelă cu

dreaptă $9y = 2x$.
b) Elaboraţi un barem de notare pentru punctul a).

Soluţii

1. Multţimea cerută este dreapta $d : \bar{r}(t) = (4 - t, 3t - 2)$ ce trece prin punctul $M_0(4, -2)$ şi are vectorul director $\bar{a} = (-1, 3) \neq \bar{0}$.

3. Derivata este: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2}$ care o egală cu $\frac{2}{9}$. Obţinem ecuaţia de gradul 3:

$$g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 20x - 9 = 0$$

pentru care căutăm soluţii în intervalul $(0, \frac{9}{2})$ datorită inegalităţii:

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{9} = \frac{9 - 2x}{9x} = \frac{4}{(x+1)^2} > 0.$$

Prin încercări avem că volorile întregi 1, 2, 3 şi 4 nu sunt solţii, deci căutăm soluţii raţionale $\frac{m}{n}$ cu n divizor al lui 2. Obţinem că $x_0 = \frac{1}{2}$ este solţie. Derivata funcţiei g este:

$$g'(x) = 2(3x^2 - 5x + 10)$$

cu discriminantul $\Delta = 25 - 4 \cdot 30 < 0$. Deci g are semn constant egal cu cel al coeficientului dominant i.e. $g' > 0$ deci g este funcţie strict crescătoare. Prin urmare, punctul cerut este unic $M_0(\frac{1}{2}, -\ln 2 + \frac{2}{3})$.

SEMINARUL 1: Punct. Dreaptă. Plan. Poziţii relative

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

S1.1 (problema 27, p. 75) Fie $M, N \in (AB)$ a. î. $3[AM] = 2[MB]$, $2[AN] = 3[NB]$ şi $[MN] = 6\ cm$. Aflaţi lungimile: $[AM]$, $[NB]$ şi $[AB]$.

Rezolvare $[AM] = [NB] = 12\ cm$, $[AB] = 30\ cm$.

S1.2 (problema 26, p. 75). Fie A şi B cu $[AB] = 8\ cm$ şi $M, N \in (AB)$ a. î. $\frac{[AM]}{[AB]} = \frac{1}{8}$ şi $\frac{[NB]}{[AB]} = \frac{3}{8}$. Se cer lungimile: $[AM]$, $[MB]$, $[AN]$; $[NB]$, $[MN]$.

Rezolvare $[AM] = 1\ cm$, $[MB] = 7\ cm$, $[AN] = 5\ cm$, $[NB] = 3\ cm$, $[MN] = 4\ cm$.

S1.3 (problema 25, p. 75) Fie A, B, C puncte coliniare în această ordine a. î. $[AB] = 4\ cm$ şi $[AC] = 12\ cm$. Fie M, N, P mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[CA]$. Arătaţi că $[MN]$ şi $[BP]$ au acelaşi mijloc.

Rezolvare vezi problema următoare.

S1.4 (problema 24, p. 75) Fie A, B, C şi D puncte coliniare în această ordine. Arătaţi că: i) dacă $[AB] \equiv [CD]$ atunci $[AD]$ şi $[BC]$ au acelaşi mijloc; ii) dacă $[AD]$ şi $[BC]$ au acelaşi mijloc atunci $[AC] \equiv [BD]$ (la soluţii apare $[AB] \equiv [CD]$).

Rezolvare i) Fie M mijlocul lui $[BC]$ i.e. $[BM] \equiv [MC]$. Din ipoteza $[AB] \equiv [CD]$ rezultă $[AM] \equiv [MD]$ ceea ce voiam; ii) Fie N mijlocul comun lui $[BC]$ şi $[AD]$. Deci $[BM] \equiv [MC]$ şi $[AM] \equiv [MD]$. Rezultă $[[AB] \equiv [CD]]$.

S1.5 (problema 23, p. 75) Fie A, B, C şi D puncte coliniare în această ordine şi $M \in (BC)$ a. î. $[AB] = 3\ cm$, $[AC] = 5\ cm$, $[BD] = 5\ cm$ şi $[AM] = 4\ cm$. Arătaţi că: i) $[AB] \equiv [CD]$; ii) $[AD]$ şi $[BC]$ au acelaşi mijloc, anume M.

Rezolvare i) $[AB] = [CD] = 3\ cm$; ii) $[AM] = [MD] = 4\ cm$, $[BM] \equiv [MC] = 1\ cm$.

S1.6 (problema 22, p. 75) Fie A, B, C, D, E, F, G puncte coliniare în această oridine a. î. B, C, E, F sunt mijloacele lui $[AC]$, $[BD]$, $[DF]$ şi respectiv $[EG]$ iar $[CD] > [DE]$. Dacă $[AG] = 18\ cm$ atunci aflaţi $[CE]$ şi $[BF]$.

Rezolvare $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD]$ şi $[DE] \equiv [EF] \equiv [FG]$ implică $[CE] = \frac{1}{2}[AG] = 6\ cm$ şi $[BF] = 2[CE] = 12\ cm$.

S1.7 (problema 21, p. 75) Fie $C \in (AB)$ cu $[AC] < [CB]$, $D \in AB$ a. î. A este mijlocul lui $[CD]$ şi $E \in AB$ a. î. B este mijlocul lui $[CE]$. Arătaţi că: i) $[CD] < [AB]$; ii $[DE] = 2[AB]$.

Rezolvare i) $[AC] < [CB]$ implică $[AC] + [AC] < [AC] + [CB]$ deci $[CD] < [AB]$. ii) $[DE] = [DC] + [CE] = 2[AC] + 2[CB] = 2([AC] + [CB]) = 2[AB]$.

S1.8 (problema 20, p. 75) Fie M mijlocul lui $[AB]$ şi $C \in (AM)$ oarecare. Fie $D \in (AB)$ a. î. $[CD] \equiv [CA]$. Arătaţi că $[BD] = 2[CM]$.

Rezolvare Cazul 1: $D \in (AM)$: avem $[BD] = [BM] + [MD] = [BM] + [MA] - [AD] = 2[AM] - 2[AC] = 2([AM] - [AC]) = 2[CM]$. Cazul 2: $D \in (MB)$ analog.

S1.9 (problema 19, p. 75) Fie M mijlocul lui $[AB]$ şi $P \in AB$ a. î. $P \notin (AB)$. Arătaţi că $[PM] = \frac{1}{2}([PA] + [PB])$.

Rezolvare Cazul 1: $P \in (AB$: avem $[PM] = [PB]+[BM] = [PB]+\frac{1}{2}[AB] = \frac{1}{2}([AB]+2[PB]) = \frac{1}{2}(([AB] + [BP]) + [PB]) = \frac{1}{2}([PA] + [PB])$. Cazul 2: $D \in (MB)$ analog.

S1.10 (problema 18, p. 75) Fie A, B, C coliniare în această ordine şi M, N, P mijloacele lui $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$. Arătaţi că: i) $[NP] = \frac{1}{2}[AB]$; ii) $[MP] = \frac{1}{2}[BC]$; iii) $[MN] = \frac{1}{2}[AC]$.

Rezolvare i) $[NP] = [PC] - [NC] = \frac{1}{2}([AC] - [BC]) = \frac{1}{2}[AB]$. ii) şi iii) analog.

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

T1.1 (problema 10, p. 78) Fie punctele coliniare $A - B - C$ şi M, N, P mijloacele segementelor $[AB]$, $[BC]$ respectiv $[CA]$. Să se arate că:

$$\frac{[MN]}{[CA]} + \frac{[NP]}{[AB]} + \frac{[PM]}{[BC]} = \frac{3}{2}.$$

T1.2 (problema 11, p. 78) Fie punctele A, B, C a. î. $[AB] = 1,4\ dm$, $BC = 6\ cm$ şi $[AC] = 80\ mm$. i) Propoziţia "Punctele date sunt coliniare" este adevărată sau falsă? De ce? ii) Se cere distanţa dintre mijlocul lui $[AB]$ şi mijlocul lui $[BC]$.

T1.3 (problema 12, p. 78) Fie $M_0, M_1, ..., M_{2004}$ puncte situate, în această ordine, pe dreapta d şi M mijlocul segmentului $[M_0M_{2004}]$. Ştiind că $[M_0M_1] = 1\ cm$, $[M_1M_2] = 2\ cm$, ..., $[M_{2003}M_{2004}] = 2004\ cm$ se cere lungimile $[M_0M]$ şi $[M_{300}M_{400}]$.

T1.4 (problema 9, p. 77) Punctul M_1 este mijlocul segmentului $[AB]$, punctul M_2 este mijlocul lui $[AM_1]$, M_3 este mijlocul lui $[AM_2]$, etc. Dacă $[AB] = 2^{101} \cdot 5\ cm$ atunci aflaţi $[AM_{100}]$.

T1.5 (problema 8, p. 77) Dacă A, B, C sunt puncte coliniare atunci aflaţi valoarea produsului:

$$P = ([AB] + [BC] - [AC])([AB] + [AC] - [BC])([AC] + [BC] - [AB]).$$

T1.6 (problema 7, p. 77) Fie A, B, M, N puncte coliniare cu $\frac{[MA]}{[MB]} = \frac{[NA]}{[NB]}$. Punctele M şi N coincid sau nu? De ce?

T1.7 (problema 6, p. 77) Fie punctele distincte pe segmentul (AB) a. î. $[AM] \cdot [AN] = [BM] \cdot [BN]$. Se cere numărul:

$$r = \frac{[AM]}{[NB]} + \frac{[AN]}{[MB]}.$$

T1.8 (problema 3, p. 77) Se cere numărul dreptelor determinate de vârfurile unui cub.

T1.9 (problema 4, p. 76) Se cere maxim de drepte trecând prin cel puţin două dintre punctele $A_1, A_2, ..., A_{10}$ distincte două câte două.

T1.10 (problema 9, p. 76) Se dau punctele coliniare $A - B - C - D$ a. î. segmentele $[AD]$ şi $[BC]$ au acelaşi mijloc. Se cere numărul $r = \frac{[AB]}{[CD]}$.

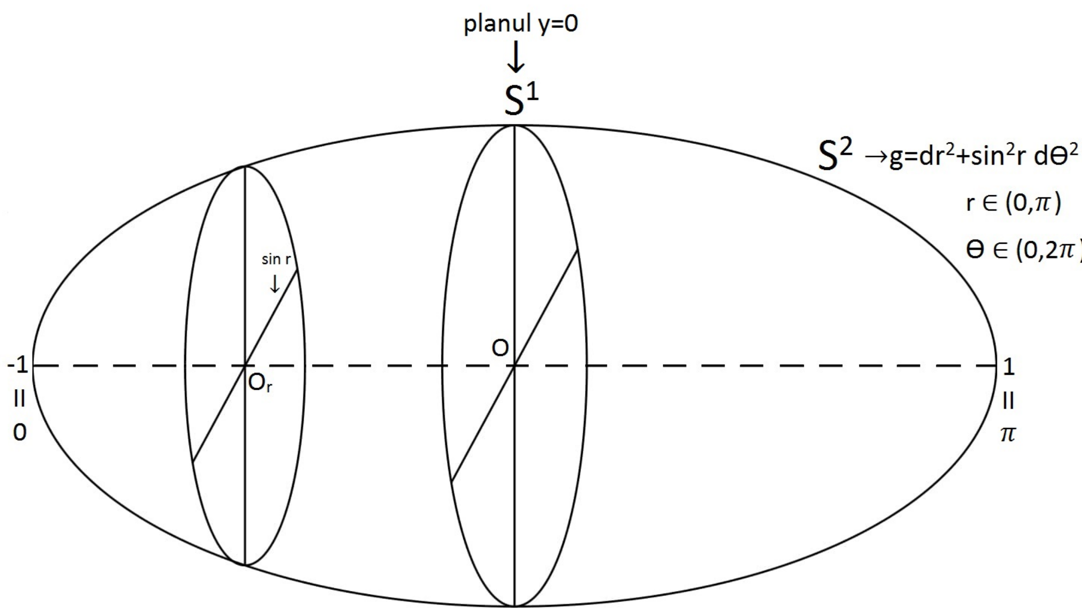

Fig. 1

Cursul 2

Geometria complexă a planului

În cursul precedent am văzut că dat un reper ortonormat $\mathcal{R}$ în planul (afin) π acesta asociază bijectiv oricărui punct $M \in \pi$ perechea coordonatelor sale carteziene (x_M, y_M). Acest fapt sugerează utilizarea numerelor complexe în geometria plană.

Reamintim că până la un izomorfism liniar există 3 algebre reale 2-dimensionale: $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(x^2 + 1)$, $\mathbb{A} = \mathbb{R}[X]/(x^2 - 1)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}[X]/(x^2)$. Teoria primei algebre este cea mai bogată, fapt ce corespunde proprietăţii lui $\mathbb{C}$ de a fi corp comutativ relativ la înmulţirea internă. Orice număr complex z are descompunerea unică, numită *expresia algebrică*:

$$z = x + iy = \Re z + i\Im z \tag{2.1}$$

unde $x = \Re z$ este *partea reală a lui* z iar $y = \Im z$ este *partea imaginară a lui* z. Lui $z \in \mathbb{C}$ îi asociem *conjugatul* $\bar{z} \in \mathbb{C}$:

$$\bar{z} := x - iy \tag{2.2}$$

şi *modulul* $|z| \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$:

$$|z|^2 := z\bar{z} = x^2 + y^2. \tag{2.3}$$

Singurul număr complex de modul nul este 0 iar aplicaţia de conjugare este o *involuţie* a lui $\mathbb{C}$: $\bar{\ } \circ \bar{\ } = 1_{\mathbb{C}}$. Ambele aplicaţii sunt multiplicative:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

În planul (afin) π fixăm reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$. Prin urmare, folosind ideile/notaţiile din cursul precedent avem aplicaţia:

$$Iden_{\mathcal{R}} : \pi \to \mathbb{C}, \quad M \to z_M := x_M + iy_M \tag{2.4}$$

care este evident o bijecţie. Prin urmare, un reper ortonormat induce o "identificare" $Ident_{\bullet}$ a planului cu mulţimea $\mathbb{C}$. Numărul complex z_M îl numim *afixul punctului* $M \in \pi$ *în raport cu* $\mathcal{R}$ iar modulul său este exact raza polară a lui M:

$$|z_M| = r_M \tag{2.5}$$

şi atunci distanţa euclidiană dintre punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ este:

$$d_e(M_1, M_2) := |z_2 - z_1|. \tag{2.6}$$

Avem următoarea compunere de bijecţii:

$$\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \pi\setminus\{O\} \equiv_{\mathcal{R}} \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to (0,+\infty)\times(-\pi,\pi] = \mathbb{R}^*_+ \times S^1, \quad z \to M(x,y) \to (r,\theta) \tag{2.7}$$

ceea ce spune că orice număr complex nenul are, pe lângă expresia algebrică, şi o *expresie trigonometrică*:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{2.8}$$

Unghiul $\theta \in (-\pi,\pi)$ se numeşte *argumentul redus al lui* z. Obţinem astfel o serie de aplicaţii ale trigonometriei în algebra complexă:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)], \quad z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)], \tag{2.9}$$

$$(\cos t + i\sin t)^n = \cos(nt) + i\sin(nt), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]. \tag{2.10}$$

$$z = r(\cos t + i\sin t) \& n \in \mathbb{N}^* \to n{-}roots : Z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{t+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{t+2k\pi}{n}\right)\right], k \in \{0,...,n-1\}. \tag{2.11}$$

Aplicaţia 2.1 *Raportul în care un punct împarte un segment*

Fie punctele distincte A şi B în π şi scalarul $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Spunem că punctul M coliniar cu A şi B *împarte* segmentul $[AB]$ în raportul λ dacă:

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}. \tag{2.12}$$

Atenţie:
i) unii autori scriu relaţia precedentă doar scalar dar ea trebuie scrisă vectorial,
ii) valoarea $\lambda = -1$ este exclusă pentru că ar implica $\overrightarrow{AB} = \bar{0}$ fals deoarece punctele sunt distince.

Relaţia (2.12) se exprimă:

$$\bar{r}_M - \bar{r}_A = \lambda(\bar{r}_B - \bar{r}_M) \tag{2.13}$$

ceea ce dă vectorul de poziţie a lui M:

$$\bar{r}_M = \frac{1}{1+\lambda}\bar{r}_A + \frac{\lambda}{1+\lambda}\bar{r}_B \tag{2.14}$$

Analog, în numere complexe:

$$z_M = \frac{1}{1+\lambda}z_A + \frac{\lambda}{1+\lambda}z_B. \tag{2.15}$$

În particular, M este *mijlocul lui* $[AB]$ dacă $\lambda = 1$:

$$z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_B). \tag{2.16}$$

□

Aplicaţia 2.2 Pentru $n \geq 3$ rădăcinile de ordinul n ale unităţii:

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1 \tag{2.16}$$

sunt afixele vârfurilor unui poligon regulat $\mathcal{P}_n$ cu n vârfuri înscris în cercul unitate S^1. Lungimea laturii lui $\mathcal{P}_n$ este:

$$l_n = 2\sin\frac{\pi}{n}. \tag{2.17}$$

Spre exemplu, pentru $n = 4$ obţinem $l_4 = \sqrt{2}$ în acord cu faptul că rădăcinile de ordinul 4 sunt $\{\pm 1, \pm i\}$ şi $\sqrt{2}$ este ipotenuza triunghiului dreptunghic isoscel de catetă 1.

Pentru orice $n \geq 3$ unul din vârfuri este chiar $z_0 = 1$ iar dacă n este par avem pe axa reală şi vârful $z_{\frac{n}{2}} = -1$. Deoarece ecuaţia lui S^1 este $z\bar{z} = 1$ avem că $\bar{z} = \frac{1}{z}$ şi deci axa reală este axă de simetrie pentru $\mathcal{P}_n$: $z \in \mathcal{P}_n$ implică $\bar{z} \in \mathcal{P}_n$. $\square$

Aplicaţia 2.3 Spunem că triunghiul ΔABC este *pozitiv orientat* dacă ordinea de parcurgere a vârfurilor $A \to B \to C$ este în sens trigonometric i.e. antiorar. În acest caz, dacă $a, b, c \in \mathbb{C}$ sunt afixele vârfurilor atunci aria triunghiului este:

$$S(\Delta) = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}. \tag{2.18}$$

Dat $z \in \mathbb{C}^*$ se cere aria pentru $A(z)$, $B((i+1)z)$, $C(iz)$. Avem:

$$S(\Delta) = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ (1+i)z & (1-i)\bar{z} & 1 \\ iz & -i\bar{z} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ iz & -i\bar{z} & 0 \\ iz & -i\bar{z} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ iz & -i\bar{z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}(-2i|z|^2) = \frac{|z|^2}{2}.$$

$\square$

Subiecte Gradul II, 2015, Iaşi

1. Elaboraţi un proiect didactic pentru lecţia de predare ”Paralelogramul” (clasa a VII-a), avându-se în vedere următoarele: definiţie, enunţ şi demonstraţie pentru cel puţin două caracterizări ale paralelogramului.
Utilizaţi noţiunile folosite pentru a demonstra teorema liniei mijlocii într-un triunghi.

2. Exemplificaţi fundamentarea noilor cunştinţe de la lecţia ”Inducţia matematică” prin rezolvarea următorului exerciţiu:
Demonstraţi inegalitatea: $\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{3n+1} > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. La clasa a XI-a pentru evaluarea finală, elevii primesc următoarea problemă: Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
a) Să se studieze monotonia lui f şi să se determine marginea inferioară şi cea superioară pentru $\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$.
b) Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel: $a_0 = a \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = a_n f(a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se studieze convergenţa.
Elaboraţi un barem de notare rezolvând complet problema anterioară.

SEMINARUL 2: Unghiuri

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

S2.1 (problema 4, p. 87) Aflaţi măsurile a două unghiuri opuse la vârf ce sunt: i) complementare; ii) suplementare.

Rezolvare i) 45°; ii) 90°.

S2.2 (problema 3, p. 87) Arătaţi că bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf sunt semidrepte opuse.

Rezolvare .

S2.3 (problema 2, p. 87) Fie $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle COD$ opuse la vârf şi $(OE$, $(OF$ bisectoarele lor. Dacă $m(\measuredangle COD) = 80°$ aflaţi $m(\measuredangle EOF)$.

Rezolvare 180°.

S2.4 (problema 1, p. 87) Fie $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle COD$ opuse la vârf. Aflaţi măsura celorlalte trei unghiuri dacă: i) $m(\measuredangle AOB) = 45°$; ii) $m(\measuredangle AOB) = 90°$; iii) $m(\measuredangle AOB) = 114°$.

Rezolvare i) 35°, 145°, 145°; ii) 90°; iii) 114°, 66°, 66°.

S2.5 (problema 16, p. 86) Unghiurile $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle AOC$ sunt suplementare şi neadiacente. Aflaţi unghiul format de bisectoarele lor dacă $m(\measuredangle AOB) = 150°$.

Rezolvare 60°.

S2.6 (problema 15, p. 86) Unghiurile $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle AOC$ sunt complementare şi neadiacente. Aflaţi unghiul format de bisectoarele lor dacă $m(\measuredangle AOB) = 40°$.

Rezolvare 5°.

S2.7 (problema 14, p. 86) Se cere măsura unui unghi φ ştiind că mšura complementului său este $\frac{5}{14}$ din măsura suplementului său.

Rezolvare 40°.

S2.8 (problema 13, p. 86) Aflaţi unghiul φ ce este: i) $\frac{1}{3}$ din suplementul său; ii) 80% din suplementul său; iii) $\frac{1}{4}$ din complentul său; iv) 50% din complementul său.

Rezolvare i) 45°; ii) 80°; iii) 18°; iv) 30°.

S2.9 (problema 12, p. 86) Aflaţi măsura a două unghiuri α şi β: i) suplementare ştiind că $\beta - \alpha = 24°$; ii) complementare ştiind că $\beta - \alpha = 8°$.

Rezolvare i) 72° şi 102°; ii) 41° şi 49°.

S2.10 (problema 9, p. 85) Unghiurile $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle BOC$ sunt adiacente complementare cu $m(\measuredangle BOC) = 36°$. Aflaţi: i) $m(\measuredangle AOB)$; ii) măsura unghiului format de bisectoarele lor.

Rezolvare i) 54°; ii) 45°.

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

T2.1 (problema 12, p. 91) Fie $(OX_1$ bisectoarea unghiului $\measuredangle AOB$, $(OX_2$ bisectoarea unghiului $\measuredangle AOX_1$, $(OX_3$ bisectoarea unghiului $\measuredangle AOX_2$, etc. Ştiind că $m(\measuredangle AOB) = 160°$ aflaţi: i) $m(\measuredangle AOX_5)$; ii) $\measuredangle(X_1OX_3)$.

T2.2 (problema 11, p. 91) Fie $(OX$, $(OY$ şi $(OZ$ bisectoarele unghiurilor $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$ respeciv $\measuredangle COA$. Arătaţi că:

$$\frac{m(\measuredangle XOY)}{m(\measuredangle COA)} + \frac{m(\measuredangle XOZ)}{m(\measuredangle BOC)} + \frac{m((\measuredangle YOZ)}{m(\measuredangle AOB)} = \frac{3}{2}.$$

T2.3 (problema 10, p. 91) Aflaţi măsura unghiului format de bisectoarele a două dintre unghiurile formate de intersecţia a două drepte concurente.

T2.4 (problema 11, p. 91) Dacă $m(\measuredangle AOB) = 60^\circ$ şi $m(\measuredangle BOC) = 80^\circ$ aflaţi: i) $m(\measuredangle AOC)$; ii) măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri.

T2.5 (problema 10, p. 90) Bisectoarele a două unghiuri adiacente formează un unghi de 70°. Aflaţi măsura celor două unghiuri ştiind că unul este un sfert din celălalt.

T2.6 (problema 6, p. 89) Fie unghiurile $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$ şi $\measuredangle COA$ în jurul punctului O. Aflaţi măsura acestor unghiuri ştiind că: i) $\frac{1}{2}m(\measuredangle AOB) = \frac{1}{3}m(\measuredangle BOC) = \frac{1}{5}m(\measuredangle COA)$; ii) $4m(\measuredangle AOB) = 3m(\measuredangle BOC) = 6m(\measuredangle COA)$.

T2.7 (problema 5, p. 89) a) Se dau 5 unghiuri în jurul unui punct având măsurile 5 numere naturale consecutive. Se cer aceste măsuri. b) Se dau 3 unghiuri în jurul unui punct având măsurile numere naturale pare consecutive. Se cer aceste măsuri.

T2.8 (problema 4, p. 88) Fie $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle BOC$ adiacente complementare cu $m(\measuredangle AOB) = 50^\circ$, $(OD$ şi $(OE$ semidrepte opuse semidreptelor $(OA$ respectiv $(OB$ iar $(OF$ şi $(OG$ bisectoarele unghiurilor COD respectiv AOE. Se cere $m(\measuredangle FOG)$.

T2.9 (problema 3, p. 88) În jurul punctului O se dau unghiurile $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle COD$, $\measuredangle DOE$ şi $\measuredangle EOA$ de măsuri: x, $5x - 10^\circ$, $2x + 30^\circ$, $6x$ respectiv $3x$. i) Aflaţi măsurile lor. ii) Arătaţi că punctele A, O, D sunt coliniare. iii) Aflaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\measuredangle AOE$ şi $\measuredangle DOE$.

T2.10 (problema 6, p. 87) Fie punctele coliniare $A - O - B$ şi punctele C, D situate de o parte şi de alta a dreptei AB. Dacă bisectoarele $(OE$ şi $(OF$ a unghiurilor $\measuredangle BOC$ şi respectiv $\measuredangle AOD$ sunt semidrepte opuse atunci punctele C, O, D sunt coliniare.

Cursul 3

Funcţii olomorfe în plan. Ecuaţii Cauchy-Riemann

Fixăm deschisul $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ şi funcţia $F : \Omega \to \mathbb{C}$. Această aplicaţie poate fi privită în două moduri: $F = F(x, y)$ şi $F = F(z, \bar{z})$. Studiul diferenţiabilităţii pentru primul mod este cunoscut şi se realizează prin intermediul derivatelor parţiale F_x, F_y şi am prezentat în primul curs această abordare prin intermediul matricii Jacobiene. Dorim o abordare analoagă pentru al doilea mod de considerare al funcţiilor complexe de variabilă complexă. În acest scop introducem:

Definiţia 3.1 i) F este C^1 *pe* Ω dacă în prima interpretare $F = F(x, y)$ avem că există derivatele paţiale $\frac{\partial F}{\partial x} := F_x$, $\frac{\partial F}{\partial y} := F_y$ şi acestea sunt continue: $F_x, F_y \in C^0(\Omega \subseteq \mathbb{R}^2)$.
ii) F se numeşte *analitică pe* Ω dacă pentru orice $p \in \Omega$ există un disc D centrat în p şi inclus în Ω a. î. $F|_D$ se dezvoltă în serii de puteri:

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - p)^n, \quad z \in D. \tag{3.1}$$

Remarcăm că membrul drept nu depinde de $\bar{z}$!
iii) Dacă F este C^1 pe Ω atunci *diferenţiala* sa este 1-forma diferenţială:

$$dF = F_x dx + F_y dy = F_z dz + F_{\bar{z}} d\bar{z}, \quad dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dz - idy. \tag{3.2}$$

Cum $\{dx, dy\}$ constituie o bază în spaţiul vectorial al 1-formelor diferenţiale un calcul imediat dă *derivatele complexe*:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \overline{\frac{\partial}{\partial z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3.3}$$

cu inversele:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right). \tag{3.4}$$

iv) F se numeşte *olomorfă pe* Ω dacă este C^1 şi independentă de $\bar{z}$: $F_{\bar{z}} = 0$.
v) *Operatorul Cauchy-Riemann* pe funcţii $C^1(\Omega)$ este: $\bar{\partial} F := F_{\bar{z}} d\bar{z}$. Operatorul Cauchy-Riemann pe 1-forme diferenţiale este:

$$\bar{\partial}\omega = \bar{\partial}(Adz + Bd\bar{z}) := A_{\bar{z}} d\bar{z} \wedge dz. \tag{3.5}$$

Pentru $F \in C^2(\Omega)$ putem introduce un operator ∂ a.î:

$$\partial\bar{\partial} F := F_{\bar{z}z} dz \wedge d\bar{z}. \tag{3.6}$$

În coordonatele reale (x, y) obţinem *operatorul Laplace pe funcţii*:

$$4\partial\bar{\partial} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{3.7}$$

Rezultatul central al analizei complexe dă următoarea echivalenţă între noţiunile introduse anterior:

Teorema 3.2 *Fie $F : \Omega \to \mathbb{C}$ de clasă C^1. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:
1) *F este analitică,* 2) *F este olomorfă,*
3) *F aparţine nucleului operatorului Cauchy-Riemann*: $\bar{\partial}F = 0$,
4) *diferenţiala lui F este 1-forma*: $dF = F_z dz$,
5) *F satisface ecuaţia Cauchy-Riemann*: $F_x + iF_y = 0$.

Demonstraţia acestui rezultat aparţine Cursului de Analiză Complexă dar facem câteva observaţii asupra ecuaţiei CR. Presupunem că F are exprimarea complexă $F = u + iv = \Re F + i\Im F$ şi atunci:

$$F_x + iF_y = u_x + iv_x + i(u_y + iv_y) = (u_x - v_y) + i(u_y + v_x) \tag{3.8}$$

şi deci ecuaţiile CR pentru u şi v constituie sistemul:

$$CR : \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \tag{3.9}$$

Putem exprima matriceal acest sistem CR:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

sau echivalent, prin intermediul gradientului celor două funcţii:

$$\nabla v = J \cdot \nabla u \tag{3.11}$$

unde J este matricea pătratică din (3.10). Să observăm că J este analogul matriceal al unităţii complexe i:

$$J^2 = -I_2 \tag{3.12}$$

ceea ce se numeşte *structură aproape complexă*. Acest fapt sugerează următoarea noţiune:

Definiţia 3.3 Matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ o numim *Cauchy-Riemann* dacă are expresia:

$$A := A(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Fie $CR - M_2(\mathbb{R})$ mulţimea acestor matrici.

Propoziţia 3.4 i) *$CR - M_2(\mathbb{R})$ cu operaţiile matriceale uzuale formează o algebră reală 2-dimensională izomorfă cu $\mathbb{C}$ via aplicaţia*: $A(a, b) \leftrightarrow z = a + ib$.
ii) *$CR - M_2(\mathbb{R})$ este centralizatorul matricii J în $M_2(\mathbb{R})$ i.e. spaţiul vectorial al tuturor matricilor din $M_2(\mathbb{R})$ ce comută cu J.*
iii) *Intersecţia dintre $CR - M_2(\mathbb{R})$ şi 2-grupul liniar special $SL(2, \mathbb{R})$ este exact 2-grupul ortogonal special $SO(2)$.*

Demonstraţie ii) Prin calcul direct:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -a \\ a & -b \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

iii) Determinantul matricii $A(a,b)$ este a^2+b^2 şi acesta este egal cu $+1$ dacă şi numai dacă există $t \in \mathbb{R}$ aşa încât:

$$a = \cos t, \quad b = \sin t \to A = A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO(2). \tag{3.14}$$

□

Fie $z, w \in \mathbb{C}$ cu expresia: $z = x^1 + ix^2$, $w = y^1 + iy^2$. Se verifică imediat identităţile:

$$h(z,w) := z \cdot \bar{w} =< z, w >_e + i\omega_e(z,w), \quad \omega_e(z,w) :=< z, i \cdot w >_e, \tag{3.15}$$

cu $< \cdot, \cdot >_e$ produsul scalar euclidian din $\mathbb{R}^2$:

$$< z, w >_e = x^1y^1 + x^2y^2. \tag{3.16}$$

h defineşte un *produs scalar complex* sau *formă hermitiană* pe $\mathbb{C}$ iar ω_e este 2-*forma* (diferenţială) *fundmentală* asociată metricii hermitiene (chiar Kähler) $g_e =< \cdot, \cdot >_e$:

$$\omega_e(z,w) = x^2y^1 - x^1y^2 = -\omega_e(w,z). \tag{3.17}$$

Matriceal, identitatea (3.15) se scrie cu vectorii $z, w \in \mathbb{R}^2$ ca matrici coloană (cu 2 linii date de coordonate):

$$h(z,w) = z^t \cdot I_2 \cdot w + i(z^t \cdot J \cdot w) \tag{3.18}$$

unde t înseamnă transpusa. Avem şi:

$$h(z,z) = |z|^2 = \|z\|_e^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2, \quad \omega_e(z,z) = 0. \tag{3.19}$$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ putem generaliza la $\mathbb{C}^n$. Dacă: $z = (z^1, ..., z^n)$ şi $w = (w^1, ..., w^n)$ atunci definim:

$$h(z,w) = h_{i\bar{j}} z^i \bar{w}^j, \quad \overline{h_{i\bar{j}}} = h_{j\bar{i}} \leftrightarrow \overline{h(w,z)} = h(z,w). \tag{3.20}$$

Exemplul 3.5 Aplicaţia $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $F(z) = iz$ roteşte pe z cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ în sens trigonometric i.e. antiorar. F este evident olomorfă (nu apare $\bar{z}$ în expresia lui $F(z)$) şi transformare liniară: $F(x,y) = (-y, x)$. Deci $u(x,y) = -y$, $v(x,y) = x$ şi se verifică imediat şi ecuaţiile CR (3.9):

$$u_x = 0 = v_y, \quad u_y = -1 = -v_x.$$

Matricea Jacobiană a lui F este constantă (deoarece F este operator liniar) şi coincide cu J!. □

Exemplul 3.6 Aplicaţia $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $F(z) = z^2$ este evident olomorfă. Avem $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$ şi se verifică imediat ecuaţiile CR:

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x.$$

Matricea Jacobiană a lui F este: $JF(x,y) = 2A(x,y)$. Avem imediat identităţile trigonometrice: $u(\cos t, \sin t) = \cos(2t)$, $v(\cos t, \sin t) = \sin(2t)$ consecinţe ale identităţii Moivre pentru z^2 cu $z = \cos t + i \sin t \in S^1$. □

Exemplul 3.7 Funcţia $F : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $F(z) = \frac{1}{z}$ este evident olomorfă. De altfel se verifică imediat sistemul CR pentru funţiile scalare $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$. □

Observaţia 3.8 Mulţimea $Hol(\Omega)$ a tuturor funţiilor olomorfe pe Ω este o algebră reală infinit-dimensională deoarece din regula Leibniz avem că produsul a două funcţii olomorfe este tot o funţie olomorfă. De asemenea, din *regula lanţului*:

$$\frac{\partial(F^2 \circ F^1)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F^2}{\partial w}\frac{\partial F^1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F^2}{\partial \bar{w}}\frac{\partial \overline{F^1}}{\partial \bar{z}} \tag{3.21}$$

rezultă că şi compunerea a două funţii olomorfe este olomorfă. Există şi rezultate de *rigiditate*: orice funcţie olomorfă $F : \mathbb{C} \to \mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$ este o constantă!

Pentru funcţia olomorfă $F = u + iv$ determinantul matricii sale Jacobiene este pătratul normei câmpului vectorial gradient pentru funcţiile componente:

$$\det JF = \|\nabla u\|^2 = \|\nabla v\|^2 \geq 0. \tag{3.22}$$

□

Subiecte Gradul II, 2014, Iaşi, Varianta 1

1. Elaboraţi un proiect didactic pentru lecţia de predare ”Condiţii de paralelism şi condiţii de perpendicularitate a două drepte în plan” (clasa a X-a). Justificaţi formulele de caracterizare, iar ca aplicaţie rezolvaţi următorul:

Exerciţiu. Fie familia de drepte: $d_\lambda : 2x - y - 6 + \lambda(x - y - 4) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.
(i) Să se determine λ astfel încât dreapta d_λ să fie paralelă cu dreapta $d : 3x + 2y - 6 = 0$.
(ii) Să se determine λ astfel încât dreapta d_λ să fie perpendiculară pe dreapta d.

2. Exemplificaţi fundamentarea cunoştinţelor privind continuitatea şi derivabilitatea funcţiilor, reprezentând grafic funcţia: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1}, \ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ x^3, x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

3. Pentru evaluarea finală a cunoştinţelor de algebră, elevii primesc următoarele subiecte:
(i) Enuntaţi şi demonstraţi teorema lui Bézout privind restul împărţirii unui polinom la $X - a$.
(ii) Să se determine polinomul f de gradul 2 care împărţit la $X - 1$ dă restul 6, împărţit la X dă restul 3 si împărţit la $X + 1$ dă restul 2.
Elaboraţi un barem de notare rezolvând complet subiectele.

Soluţii

1. (i) Scriem d_λ în forma canonică: $d_\lambda : (\lambda + 2)x + (-\lambda - 1)y - 6 - 4\lambda = 0$. Avem $d_\lambda \parallel d$ dacă şi numai dacă avem proporţionalitatea coeficienţilor lui x şi y:

$$\frac{\lambda + 2}{3} = \frac{-\lambda - 1}{2}$$

cu soluţia unică $\lambda = -\frac{7}{5}$.
(ii) $d_\lambda \perp d$ dacă şi numai dacă direcţiile celor două drepte sunt ortogonale i.e. $<(\lambda+2, -\lambda-1), (3, 2)>= 0$ ceea ce dă soluţia unică $\lambda = -4$.

3. (ii) Considerăm $f(x) = ax^2 + bx + c$ şi avem ipoteza: $f(1) = 6$, $f(0) = 3$, $f(-1) = 2$ de unde rezultă imediat: $c = 3$, $b = 2$ şi $a = 1$.

SEMINARUL 3: METODA TRIUNGHIURILOR CONGRUENTE

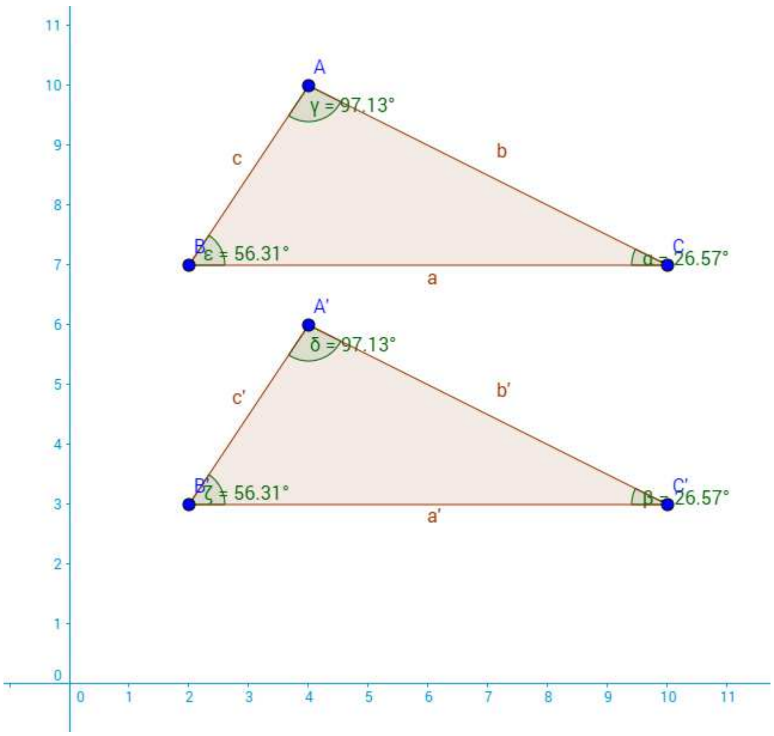

Figure 3.1: *Triunghiuri congruente*

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

S3.1 (problema 6, p. 97) Avem ΔABC şi ΔDBC isoscel cu baza comună şi $[AB] \equiv [BD]$. Arătaţi că $\Delta ABC \equiv \Delta DBC$ şi scrieţi perechile de unghiuri congruente corespondente.

Rezolvare LLL.

S3.2 (problema 5, p. 97) Fie $(Oz$ bisectoarea lui $\measuredangle xOy$ şi $M \in (Ox$, $N \in (Oy$, $P \in (Oz$ a. î. $\measuredangle MPO \equiv \measuredangle NOP$. Arătaţi că $\Delta MOP \equiv \Delta NOP$ şi scrieţi celelalte elemente congruente corespondente.

Rezolvare ULU.

S3.3 (problema 4, p. 96) Pe laturile lui $\measuredangle xOy$ se consideră punctele: $B, C \in (Ox$, $D, E \in (Oy$ a. î. $[OD] \equiv [OB]$ şi $[OE] \equiv [OC]$. Arătaţi că $\Delta ODC \equiv \Delta OBE$ şi scrieţi celalalte elemente congruente corespondente.

Rezolvare LUL.

S3.4 (problema 4, p. 95) Fie $(Oz$ bisectoarea lui $\measuredangle xOy$ şi punctele $A \in (Ox$, $B \in (Oy$ şi $C \in (Oz$ a. î. $\Delta AOC \equiv \Delta BOC$. Stabiliţi natura lui ΔAOB şi ΔABC.

Rezolvare ΔAOB şi ΔABC sunt isoscele.

S3.5 (problema 3, p. 95) Fie $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$. Dacă: i) $[PR] = 3\ cm$, $[QR] = 5\ cm$ şi $[PQ] = 4,5\ cm$ aflaţi lungimile laturilor în ΔABC; ii) $m(\measuredangle C) = 50°$, $m(\measuredangle B) = 70°$ şi $m(\measuredangle A) = 60°$ aflaţi unghiurile din ΔABC.

Rezolvare i) $[AC] = [PR] = 3\ cm$; $[BC] = [QR] = 5\ cm$; $[AB] = [PQ] = 4,5\ cm$; ii) $m(\measuredangle C) = m(\measuredangle R) = 50°$, $m(\measuredangle B) = m(\measuredangle Q) = 70°$, $m(\measuredangle A) = m(\measuredangle P) = 60°$.

S3.6 (problema 2, p. 95) Arătaţi că: i) dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ şi $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ atunci $\Delta DEF \equiv \Delta MNP$; ii) dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ şi $\Delta ABC \equiv \Delta DFE$ atunci ΔABC este isoscel; iii) dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ şi $\Delta ABC \equiv \Delta FDE$ atunci ΔABC eset echilateral.

Rezolvare .

S3.7 (problema 7, p. 93) Fie ΔABC şi $D \in (AB)$ a. î. $[CD] \equiv [AD]$. Aflaţi $[CD]$ ştiind că perimetrele pentru ΔBDC şi ΔABC sunt 13 *cm* respectiv 21 *cm*.

Rezolvare 8 *cm*.

S3.8 (problema 6, p. 93) Fie ΔABC şi $D \in (AC)$. Aflaţi $[BD]$ ştiind că perimetrul lui ΔABD, ΔBDC şi ΔABC este 13 *cm*, 17 *cm* respectiv 18 *cm*.

Rezolvare 6 *cm*.

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

T3.1 (problema 12, p. 102) Pe laturile congruente $[AC]$ şi $[AB]$ din ΔABC isoscel se consideră punctele M şi N iar pe bisectoarea din A punctul P a. î. $\measuredangle NPB = \measuredangle MPC$. Arătaţi că $[BN] \equiv [CM]$.

T3.2 (problema 11, p. 102) Laturile $[AB]$, $[AC]$ şi $[BC]$ din ΔABC sunt direct proporţionale cu $0,(12)$, $0,(15)$ respectiv $0,(6)$ iar laturile $[DE]$, $[EF]$ şi $[DF]$ din ΔDEF sunt invers proporţionale cu $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{22}$ respectiv $\frac{1}{4}$. Dacă cele două triunghiuri au perimetre egale atunci sunt congruente.

T3.3 (problema 10, p. 102) În ΔABC isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$ fie $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ a. î. $[AM] - [MB] = [AN] - [NC]$. Dacă $\{P\} = MC \cap NB$ atunci P este situat pe bisectoarea din A.

T3.4 (problema 12, p. 101) În ΔABC fie E mijlocul lui $[BC]$ şi $F \in (AE)$. Arătaţi că: i) dacă $[BF] \equiv [CF]$ atunci $[AB] \equiv [AC]$. ii) Reciproc, dacă $[AB] \equiv [AC]$ atunci $[BF] \equiv [CF]$.

T3.5 (problema 11, p. 101) Fie $[AA']$ bisectoare în ΔABC isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$. Fie punctul oarecare $P \in (AA'$. Dreptele BP şi CP intersectează laturile $[AC]$ respectiv $[AB]$ în M respectiv N. Arătaţi că $[BN] \equiv [CM]$.

T3.6 (problema 10, p. 100) În ΔABC isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$ fie punctele $D \in (AC)$, $E \in (AB)$, $F \in (DB$ şi $G \in (EC$ a. î. $[AD] \equiv [AE]$, $[BD] \equiv [FB]$ şi $[CE] \equiv [CG]$. Arătaţi că $[BG] \equiv [CF]$.

T3.7 (problema 16, p. 99) Fie ΔABC oarecare cu $[AB] < [AC]$ şi $D \in [AC]$ a. î. $[AD] \equiv [AB]$. Fie M mijlocul lui $[BD]$. Dreptele AM şi BC se intersectează în N. Arătaţi că: i) $\Delta ABM \equiv \Delta ADM$; ii) ΔBND este isoscel.

T3.8 (problema 15, p. 99) Fie ΔABC isoscel cu baza $[BC]$, E mijlocul lui $[AB]$ şi punctul $F \in (CE$ a. î. $[AF] \equiv [AC]$. Fie M şi N mijloacele segmentelor $[AC]$ şi $[AF]$. Arătaţi că: i) $[BM] \equiv [CE]$; ii) $[BN] \equiv [FE]$, iii) $[BM] + [BN] = [CF]$.

T3.9 (problema 14, p. 99) În ΔABC oarecare punctele M şi N sunt mijloacele laturilor $[AB]$ respectiv $[AC]$ iar D şi E sunt puncte ce aparţin semidreptelor opuse lui $(MC$ respectiv $(NB$ a. î. $[MD] \equiv [MC]$ şi $[NE] \equiv [NB]$. Arătaţi că $[AD] \equiv [AE]$.

T3.10 (problema 13, p. 99) Fie punctul C mijlocul segmentului $[AB]$ şi punctele D şi E situate de o aprte şi de alta a dreptei AB a. î. $2[BD] \equiv [AB]$, $[AE] \equiv [AB]$ şi $\measuredangle DBA \equiv \measuredangle EAB$. Arătaţi că $[AD] \equiv [CE]$.

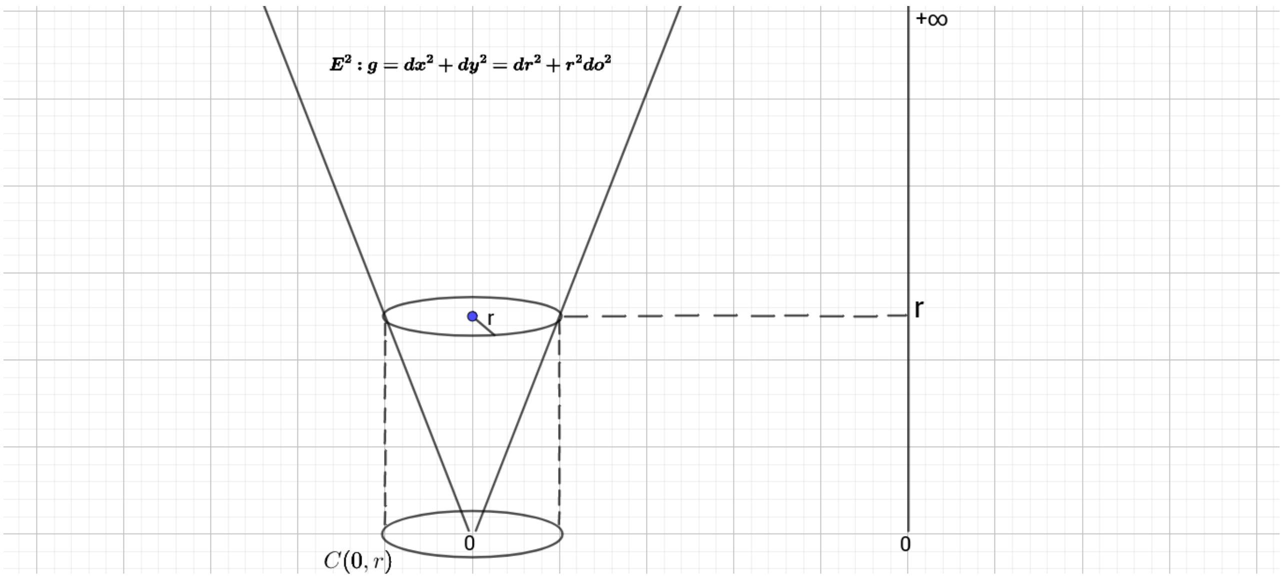

Fig 3.2

Cursul 4

Aplicaţii ale algebrei complexe în studiul conicelor

Fixăm polinomul $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ de forma:

$$P(X,Y) := \sum_{a=0}^{m} \sum_{b=0}^{n} c_{ab} X^a Y^b, \quad c_{ab} \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Definiţia 4.1 Spunem că P *are gradul* $k \in \mathbb{N}$ şi notăm $P \in \mathbb{R}_k[X, Y]$ dacă $a + b > k$ implică $c_{ab} = 0$ şi există măcar o pereche (a, b) cu $a + b = k$ şi $c_{ab} \neq 0$.

Să considerăm varianta complexă a lui P dată prin intermediul lui $z := X + iY$. Din:

$$X = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad Y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \tag{4.2}$$

obţinem:

$$P(X,Y) = F(z, \bar{z}) = \sum_{a,b \geq 0} d_{ab} z^a \bar{z}^b, \quad d_{ab} \in \mathbb{C}. \tag{4.3}$$

Observăm că valorile lui F sunt reale, fiind valorile lui P, şi atunci relaţia $F = \bar{F}$ se exprimă la nivel de coeficienţi prin "simetria conjugată":

$$d_{ab} = \overline{d_{ba}}. \tag{4.4}$$

Suntem astfel conduşi la următoarea noţiune:

Definiţia 4.3 i) Polinomul $F \in \mathbb{C}_k[z, \bar{w}]$ se numeşte *Hermitian* dacă:

$$F(z, \bar{w}) = \overline{F(w, \bar{z})}. \tag{4.5}$$

ii) Matricea $D \in M_n(\mathbb{C})$ o numim *Hermitiană* dacă: $\bar{D}^t = D$ i.e. elementele sale verifică (4.4). Fie $H(n)$ mulţimea lor.

Consideraţiile precedente conduc la:

Propoziţia 4.4 *Fie polinomul* $F(z, \bar{w}) = \sum d_{ab} z^a \bar{w}^b$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:
1) F *este Hermitian*, 2) *Pentru orice* $z \in \mathbb{C}$ *avem că* $F(z, \bar{z}) \in \mathbb{R}$, 3) $d_{ab} = \overline{d_{ba}}$.

În continuare, reamintim pe scurt elementele principale din teoria conicelor. Fixăm punctele distincte $P, Q \in \pi$ cu afixele $p, q \in \mathbb{C}$. Fie şi constanta $c \in (0, +\infty) = \mathbb{R}^*_+$.

Definiţia 4.5 i) *Elipsa* E determinată de *focarele* P, Q şi constanta c este mulţimea punctelor $M(z) \in \pi$ a căror sumă a distanţelor la P şi Q este c:

$$E : |z-p| + |z-q| = c. \tag{4.6}$$

ii) i) *Hiperbola* H determinată de *focarele* P, Q şi constanta c este mulţimea punctelor $M(z) \in \pi$ a căror diferenţă absolută a distanţelor la P şi Q este c:

$$H : |z-p| - |z-q| = \pm c. \tag{4.7}$$

iii) *Cercul de centru* P *şi rază* c este mulţimea punctelor aflate la distanţa c de P:

$$C(P, c) : |z-p| = c. \tag{4.8}$$

Pentru definiţia parabolei avem nevoie de un rezultat tehnic:

Propoziţia 4.6 *Fie dreapta* $d : z(t) = z_0 + tv \in \mathbb{C}$, $v \neq 0$, *şi punctul* $M(z)$*. Atunci distanţa de la* M *la* d *este*:

$$dist(M, d) = \left| \frac{1}{\bar{v}} \Im[(z-z_0)\bar{v}] \right| = \left| \frac{(z-z_0)\bar{v} - \overline{(z-z_0)}v}{2\bar{v}} \right|. \tag{4.9}$$

Definiţia 4.7 Fie punctul $P(p)$ şi dreapta d ce nu conţine pe P. *Parabola* Pa cu *focarul* P *şi directoarea* d este mulţimea punctelor din plan egal depărtate de P şi d:

$$Pa : (\Im[(z-z_0)\bar{v}])^2 = |v|^2 |z-p|^2. \tag{4.10}$$

Putem obţine elipsa, hiperbola şi parabola de o manieră unitară folosind *excentricitatea* $e \in \mathbb{R}_+^*$:

Teorema 4.8([3, p. 55]) *Fie polinomul de gradul* 2*:*

$$F_e(z, \bar{z}) := |z-p|^2 - e^2 \left| \frac{(z-z_0)\bar{v} - \overline{(z-z_0)}v}{2\bar{v}} \right|^2. \tag{4.11}$$

Avem că F *este Hermitian şi mulţimea sa de nivel zero este elipsă dacă* $e \in (0, 1)$*, parabolă dacă* $e = 1$ *şi hiperbolă dacă* $e > 1$.

Invarianţii ortogonali ai unei conice Γ se exprimă folosind scrierea reală: $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ cu $f \in \mathbb{R}[x, y]$ având gradul 2:

$$f(x, y) := r_{11}x^2 + 2r_{12}xy + r_{22}y^2 + 2r_{10}x + 2r_{20}y + r_{00}, \quad r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{22}^2 \neq 0. \tag{4.12}$$

Aceşti invarianţi sunt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{10} \\ r_{12} & r_{22} & r_{20} \\ r_{10} & r_{20} & r_{00} \end{vmatrix}, \quad D = \delta + r_{11}r_{00} - r_{10}^2 + r_{22}r_{00} - r_{20}^2, \quad I = r_{11} + r_{22}, \quad \delta = r_{11}r_{22} - r_{12}^2. \tag{4.13}$$

Aşa cum am procedat la începutul cursului complexificăm ecuaţia (4.12) şi obţinem:

$$\Gamma : F(z, \bar{z}) := Az^2 + Bz\bar{z} + \bar{A}\bar{z}^2 + Cz + \bar{C}\bar{z} + r_{00} = 0 \tag{4.14}$$

cu:

$$A = \frac{r_{11} - r_{22}}{4} - \frac{r_{12}}{2}i \in \mathbb{C}, \quad 2B = r_{11} + r_{22} = I \in \mathbb{R}, \quad C = r_{10} - r_{20}i \in \mathbb{C}. \tag{4.15}$$

Semnificaţia algebrică a rotaţiei utilizate pentru a elimina termenul mixt xy constă în a reduce/roti A pe dreapta reală iar translaţia ce elimină termenul y are aceeaşi semnificaţie relativ la C. Relaţia inversă dintre f şi F este:

$$r_{11} = B + 2\Re A, \quad r_{22} = B - 2\Re A, \quad r_{12} = -2\Im A, \quad r_{10} = \Re C, \quad r_{20} = -\Im C \tag{4.16}$$

Invarianţii lui Γ se exprimă în funcţie de A, B, C prin:

$$I = 2B, \quad \delta = B^2 - 4|A|^2, \quad D = \delta + 2r_{00}I - |C|^2 \tag{4.17}$$

$$\Delta = r_{00}(B^2 - 4|A|^2) - B|C|^2 + 2\Re C(\Re A\Re C + \Im A\Im C) + 2\Im C(\Re C\Im A - \Re A\Im C). \tag{4.18}$$

Invarianţii δ şi I sunt respectiv determinantul şi urma unei matrici (reale) *simetrice* şi al unei matrici (complexe) Hermitiene:

$$\delta = det\Gamma = det\Gamma^c, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix}, \quad \Gamma^c = \begin{pmatrix} B & 2\bar{A} \\ 2A & B \end{pmatrix}, \quad I = Tr\Gamma = Tr\Gamma^c. \tag{4.19}$$

Matricea Hermitiană Γ^c este de un tip special, elementele diagonalei principale fiind egale; deci mulţimea acestor matrici este un subspaţiu 3-dimensional în spaţiul vectorial real 4-dimensional $H(2)$ al matricilor complexe de ordinul 2 Hermitiene. Acest ultim spaţiu vectorial real este subspaţiu în $M_2(\mathbb{C})$ care are dimensiunea reală 8.

Examplul 4.9 Cercul centrat în origine de rază 1 îl numim *cercul unitate*:

$$S^1 : x^2 + y^2 = 1, \quad z\bar{z} = 1 \tag{4.20}$$

deci avem $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $r_{00} = -1$. Avem: $\Gamma = \Gamma^c = I_2$. $\square$

Exemplul 4.10 Spaţiul vectorial real 4-dimensional al matricilor complexe de ordinul 2 Hermitiene $H(2)$ are baza:

$$I_2, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

cu $\sigma_{1,2,3}$ numite *matricile Pauli*. Pentru:
i) σ_1 avem expresia pătratică asociată $f_{\sigma_1}(x, y) := 2xy$ deoarece $r_{11} = r_{22} = 0$ iar $r_{12} = 1$,
ii) σ_3 avem expresia pătratică asociată $f_{\sigma_2}(x, y) := x^2 - y^2$ deoarece $r_{11} = -r_{22} = 1$ iar $r_{12} = 0$.

Descompunerea lui Γ^c în baza lui $H(2)$ este:

$$\Gamma^c = BI_2 + (2\Re A)\sigma_1 + (2\Im A)\sigma_2, \quad \Gamma^c \in H(2) \cap \{\sigma_3 = 0\}. \tag{4.22}$$

Matricile $\{I_2, \sigma_1, \sigma_3\}$ constituie o bază în spaţiul 3-dimensional $Sym(2)$ al matricilor simetrice de ordin 2 iar descompunerea lui Γ în această bază este:

$$\Gamma = BI_2 + (-2\Im A)\sigma_1 + (2\Re A)\sigma_3. \tag{4.23}$$

Din (4.22) şi (4.23) avem că rotaţia în plan ce anuleaza termenul mixt xy înseamnă aducerea lui Γ^c în subspaţiul vectorial $span\{I_2, \sigma_1\}$ şi a lui Γ în subspaţiul vectorial $span\{I_2, \sigma_3\}$.

Să observăm că spaţiul vectorial 4-dimensional $M_2(\mathbb{R})$ are baza $\{I_2, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_3\sigma_1\}$ cu:

$$\sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Prin urmare, spaţiul 2-dimensional $CR - M_2(\mathbb{R})$ are baza $\{I_2, \sigma_3\sigma_1\}$: $A(a,b) = aI_2 - b(\sigma_3\sigma_1)$. $\square$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare dimensiunea acestor spaţii vectoriale de matrici este:

$$\dim Sym(n) = \frac{n(n+1)}{2} \leq \dim H(n) = n^2. \tag{4.25}$$

Egalitatea are loc doar pentru $n = 1$ când $Sym(1) = H(1) = \mathbb{R}$.

Remarca 4.11 Reamintim că centrul conicei Γ este dat de anularea gradientului lui f: $f_x = 0 = f_y$. Cu relaţiile (3.4) din Cursul precedent rezultă că sistemul ce dă centrul lui Γ este: $F_z + F_{\bar{z}} = 0 = i(F_z - F_{\bar{z}})$ ceea ce înseamnă: $F_{\bar{z}} = 0 = F_z$:

$$\begin{cases} Bz + 2\bar{A}\bar{z} + \bar{C} = 0 \\ 2Az + B\bar{z} + C = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

adică matriceal:

$$\Gamma^c \cdot \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \bar{C} \\ C \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

$\square$

Remarca 4.12 Să presupunem $r_{12} = 0$. Atunci Γ şi Γ^c sunt matrici reale (!), pătratice de ordinul 2, cu aceeaşi urmă şi determinant. Rezultă că sunt *asemenea* i.e. există o matrice $S \in GL(2, \mathbb{R})$ aşa încât:

$$S\Gamma^c S^{-1} = \Gamma \tag{4.28}$$

ceea ce spune că Γ (având diagonala secundară nulă) este *forma diagonală* a lui Γ^c. Un calcul imediat dă:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = S(-\frac{\pi}{4}) \tag{4.29}$$

unde $S(\varphi)$ este matricea $A(\varphi)$ din relaţia (3.14) i.e. matricea rotaţiei trigonometrice de unghi φ.

În fapt, asemărea matricilor Γ, Γ^c are loc şi în cazul general $r_{12} \neq 0$ dar cu $S \in GL(2, \mathbb{C})$. Cu baza Pauli (4.21) relaţia de asemănare (4.28) se scrie:

$$BI_2 + (-2\Im A)\sigma_1 + (2\Re A)\sigma_3 = S[BI_2 + (2\Re A)\sigma_1 + (2\Im A)\sigma_2]S^{-1}, \tag{4.30}$$

şi vom căuta o matrice S *universală* i.e. c realizează asemănarea pentru orice pereche (Γ, Γ^c), deci grupând după $(\Re A, \Im A)$ avem:

$$\sigma_3 S = S\sigma_1, \quad -\sigma_1 S = S\sigma_2. \tag{4.31}$$

Căutând S de forma:

$$S = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

avem că prima ecuaţie (4.31) dă: $c = a$ şi $d = -b$ i.e.:

$$S = \begin{pmatrix} a & a \\ b & -b \end{pmatrix}. \tag{4.32}$$

A doua ecuaţie (4.31) dă $b = -ai$ deci:

$$S = S_a = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

şi pentru a fi în acord cu (4.29) luăm $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$S - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

Această matrice S satisface:

$$TrS_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \det S_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \bar{S}^t \cdot S = I_2. \tag{4.35}$$

Ultima relaţie din (4.35) spune că $S_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ este *matrice unitară*, $S \in U(2)$ cu:

$$U(n) = \{S \in M_n(\mathbb{C}); \bar{S}^t \cdot S = I_2\} \tag{4.36}$$

care este un grup Lie real de dimensiune n^2. Algebra sa Lie este spaţiul vectorial real al *matricilor anti-Hermitiene*:

$$u(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}); \bar{X}^t = -X\}. \tag{4.37}$$

Spre exemplu:

$$\begin{cases} U(1) = \{z \in M_1(\mathbb{C}); \bar{z} \cdot z = 1\} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = S^1, \\ u(1) = \{z \in \mathbb{C}; \bar{z} = -z\} = \{z \in \mathbb{C}; \Re z = 0\} = i\mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.38}$$

Topologic avem $U(2) = S^1 \times S^3$ deci grup compact ce este conex dar nu este simplu conex! Ca structură grupală avem $U(n) = S^1 \times SU(n)$ iar $SU(2)$ este grup compact, conex şi simplu conex, difeomorfic cu grupul Lie S^3. Algebra Lie este $u(2) = \frac{i}{2}H(2)$! Matricea $S_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ aparţine lui $U(2) \setminus SU(2)$!

O observaţie remarcabilă este că elementele bazei Pauli $\{I_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ aparţin lui $U(2)$! Pentru grupul Lie U(2) avem *descompunerea cosinus-sinus* i.e. orice matrice $A \in U(2)$ este un produs:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 & 0 \\ 0 & u_4 \end{pmatrix} = U(\varphi, u_1, u_2, u_3, u_4) \tag{4.39}$$

cu $\varphi \in \mathbb{R}$ şi $u_1, u_2, u_3, u_4 \in S^1$. Membrul drept din (4.39) este matricea:

$$\begin{pmatrix} u_1 u_3 \cos\varphi & u_1 u_4 \sin\varphi \\ -u_2 u_3 \sin\varphi & u_2 u_4 \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

şi comparând cu S din (4.34) obţinem:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad u_1 = u_3 = u_4 = 1, \quad u_2 = i, \tag{4.41}$$

şi deci:

$$S_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = U\left(\frac{\pi}{4}, 1, i, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} I_2. \tag{4.42}$$

□

Încheiem cu varianta complexă a lui Γ^{ex}:

$$\Gamma^{ex} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{10} \\ r_{12} & r_{22} & r_{20} \\ r_{10} & r_{20} & r_{00} \end{pmatrix}, \quad (\Gamma^{ex})^c = \begin{pmatrix} B & 2\bar{A} & \frac{\bar{C}}{\sqrt{2}} \\ 2A & B & \frac{C}{\sqrt{2}} \\ \frac{C}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{C}}{\sqrt{2}} & r_{00} \end{pmatrix} \in H(3). \tag{4.43}$$

Avem că Γ^{ex} şi $(\Gamma^{ex})^c$ au aceeaşi urmă, aceeaşi sumă a minorilor diagonali de ordinul 2 şi acelaşi determinant Δ.

Remarca 4.13 În fapt revenim la matricea generală S_a din (4.33) şi punem condiţia de a fi din $SU(2)$:

$$1 = 2a^2 i, \quad a^2 = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2} = \left(\frac{1-i}{2}\right)^2, \quad a = \pm\frac{1-i}{2}. \tag{4.44}$$

Avem deci două matrici din $SU(2)$:

$$S_\pm = S_{\pm\frac{1-i}{2}} = \pm\begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ -1-i & 1+i \end{pmatrix} = U\left(\frac{\pi}{4}, \mp i, \pm i, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right). \tag{4.45}$$

Izomorfismul dintre $SU(2)$ şi S^3 este dat de:

$$SU(2) = \{A(\alpha,\beta) \in M_2(\mathbb{C}); A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} \tag{4.46}$$

iar pentru matricile $S_\pm$ avem:

$$S_\pm = A\left(\pm\frac{1-i}{2}, \mp\frac{1+i}{2}\right). \tag{4.47}$$

Matricile de asemănare $S_\pm^{ex}$ dintre Γ^{ex} şi $(\Gamma^{ex})^c$ este de ordinul 3 şi se obţin din $S_\pm$ bordând cu linia $(0,0,1)$ şi coloana $(0,0,1)^t$. Obţinem matricile $S_\pm^{ex} \in SU(3)$!

Dimensiunea lui $SU(n) = \{A \in U(n); \det A = +1\}$ este $n^2 - 1$ şi deci $dimSU(3) = 9 - 1 = 8$. $SU(3)$ este fibratul principal peste S^5 cu fibra S^3!

Pentru sfera S^3 avem *fibtatul Hopf*:

$$\pi : S^3 \to S^2(\frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}\times\mathbb{C}, \quad \pi(\alpha,\beta) = \left(\frac{1}{2}(|\beta|^2 - |\alpha|^2), \alpha\overline{\beta}\right). \tag{4.48}$$

Numerele complexe α, β din (4.47) au acelaşi modul:

$$|\alpha_\pm| = |\beta_\pm| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta_\pm = -\overline{\alpha}_\pm \tag{4.49}$$

şi deci:

$$\pi(\alpha_\pm, \beta_\pm) = \left(0, \frac{i}{2}\right) \tag{4.50}$$

ceea se spune că $\alpha_\pm$ şi $\beta_\pm$ sunt pe aceeaşi fibră $\pi^{-1}(0, \frac{i}{2}) \in S^2(\frac{1}{2})$! Să observăm că punctul $(0, \frac{i}{2})$ este chiar Polul Nord al sferei $S^2(\frac{1}{2})$. □

SEMINARUL 4: PERPENDICULARITATE. DISTANŢE

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

S4.1 (problema 1, p. 103) Fie unghiurile $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle BOC$ adiacente. Stabiliţi dacă $OA \perp OC$ în situaţiile următoare: i) $m(\measuredangle AOB) = 23°$ şi $m(\measuredangle BOC) = 67°$; ii) $m(\measuredangle AOB) = 14°25'$ şi $m(\measuredangle BOC) = 76°35'$; iii) $m(\measuredangle AOB) = 22°30'$ şi $m(\measuredangle BOC) = 3m(\measuredangle AOB)$.

Rezolvare Doar la a) şi c).

S4.2 (problema 2, p. 103) Fie $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle COD$ şi $\measuredangle DOA$ a. î. $OA \perp OD$ şi $OB \perp OC$. Arătaţi că $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle COD$ sunt suplementare.

Rezolvare .

S4.3 (problema 3, p. 103) Fie $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle COD$, $\measuredangle DOE$ şi $\measuredangle EOA$ a. î. $OB \perp OC$, punctele A, O, D sunt coliniare $OE \perp AD$. Dacă $m(\measuredangle AOC) = 130°$ aflaţi $m(\measuredangle AOB)$ şi $m(\measuredangle COD)$.

Rezolvare $m(\measuredangle AOB) = 40°$ şi $m(\measuredangle COD) = 50°$.

S4.4 (problema 4, p. 103) Fie $(OC$ bisectoarea lui $\measuredangle AOB$, punctele B şi D de aceeaşi parte a lui OC a. î. $OC \perp OD$ şi $m(\measuredangle BOD) = 50°$. Aflaţi $m(\measuredangle AOB)$.

Rezolvare $m(\measuredangle AOB) = 2m\measuredangle BOC) = 2 \cdot 40° = 80°$.

S4.5 (problema 5, p. 103) Fie $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle AOC$ neadiacente complementare iar $\measuredangle BOC$ şi $\measuredangle COD$ adiacente complementare. Ştiind că $m(\measuredangle COD) = 52°$ aflaţi $m(\measuredangle BOC)$ şi $m(\measuredangle AOB)$.

Rezolvare $m(\measuredangle BOC) = 38°$, $m(\measuredangle AOB) = 26°$.

S4.6 (problema 6, p. 103) Fie $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle AOC$ neadiacente suplementare şi $(OE$ bisectoarea lui $\measuredangle BOC$. Ştiind că $m(\measuredangle AOB) = 36°$ arătaţi că $OE \perp OA$.

Rezolvare $m(\measuredangle BOC) = 108° \Rightarrow m(\measuredangle EOA) = m(\measuredangle EOB) + m(\measuredangle BOA) = 54° + 36° = 90°$ care înseamnă $OA \perp OE$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

T4.1 (problema 16, p. 104) Fie un segment $[AB] = 10\ cm$ şi punctul $M \in (AB)$ a. î. $\frac{[AM]}{[MB]} = \frac{2}{3}$. Fie dreapta a perpendiculară în M pe AB. Se cer $d(A, a)$ şi $d(B, a)$

T4.2 (problema 15, p. 104) Fie dreapta a şi punctul A situat la distanţa de 3 cm de a. Determinaţi punctele de pe a situate la distanţa de 5 cm faţă de A.

T4.3 (problema 14, p. 104) Fie unghiul alungit $\measuredangle AOB$. În acelaşi semiplan determinat de AB se construiesc unghiurile $\measuredangle AOC \equiv \measuredangle COD$ a. î. raportul măsurilor unghiuriler COD şi DOB este $\frac{5}{8}$. i) Calculaţi $m(\measuredangle COD)$ şi $m(\measuredangle DOB)$. ii) Dacă $[OE$ este bisectoarea lui $\measuredangle DOB$ arătaţi că $OE \perp OC$. iii) Aflaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\measuredangle DOB$ şi $\measuredangle AOC$.

T4.4 (problema 13, p. 104) Fie unghiul ascuţit $\measuredangle AOB$. Se duc: $[OC \perp [OA$ de acceaşi parte cu $[OB$ faţă de $[OA$ şi respectiv $[OD \perp [OB$ de aceeaşi parte cu $[OA$ faţă de $[OB$. Arătaţi că: i) $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle COD$ au aceeaşi bisectoare; ii) $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle COD$ sunt suplementare.

T4.5 (problema 12, p. 104) Fie $\measuredangle AOB$ de măsură mai mică de $40°$ şi $[OE$ semidreapta opusă lui $[OA$. De aceeaşi parte cu $[OB$ faţă de dreapta AE se duc: $[OC \perp [OA$ şi $[OD \perp [OB$ a. î. $m(\measuredangle DOE) = 2m(\measuredangle AOB)$. Aflaţi: i) $m(\measuredangle DOE)$; ii) $m(\measuredangle EOF)$; iii) $m(\measuredangle AOF)$ unde $[OF$ este bisectoarea lui $\measuredangle BOE$.

T4.6 (problema 11, p. 104) Fie $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle BOC$ adiacente suplementare a. î. $m(\measuredangle AOB) - m(\measuredangle BOC) = 50°$. i) Aflaţi: $m(\measuredangle AOB)$ şi $m(\measuredangle BOC)$; ii) Dacă $E \in Int(\measuredangle AOB)$, $m(\measuredangle BOE) = 50°$ şi $[OD$ este bisectoarea lui $\measuredangle BOE$ arătaţi că $OD \perp AC$.

T4.7 (problema 10, p. 104) Fie punctele coliniare $A - O - B$ şi punctele C, D şi E în acelaşi semiplan determinat de dreapta AB a. î. $m(\measuredangle BOC) = 50°$, $[OE \perp [OC$ şi $m(\measuredangle COD) = 20°$ cu $(OD \subset Int(\measuredangle COE)$. Dacă $[OF$ este bisectoarea lui $\measuredangle AOE$ atunci arătaţi că $OD \perp OF$.

T4.8 (problema 9, p. 103) Fie $\measuredangle AOB$ ascuţit, punctele coliniare $D-O-B$, C şi A de o parte şi de alta a dreptei BD a. î. $[OC\perp[OA$. Ştiind că $m(\measuredangle DOC)=4m(\measuredangle AOB)$ aflaţi: i) $m(\measuredangle AOB)$; ii) $m(\measuredangle BOC)$; iii) $m(\measuredangle COD)$; iv) $m(\measuredangle DOA)$.

T4.9 (problema 8, p. 103) Fie $\measuredangle AOB$ de 40°, $[OC\perp[OA$ şi $[OD\perp[OB$ a. î. interioarele unghiurilor $\measuredangle AOC$ şi $\measuredangle BOD$ sunt disjuncte. i) Aflaţi $m(COD)$; ii) Arătaţi că bisectoarele unghiurilor $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle COD$ sunt semidrepte opuse.

T4.10 (problema 7, p. 103) Fie unghiurile $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle AOC$ neadiacente complementare cu $m(\measuredangle AOB)=30^\circ$. Fie unghiul $\measuredangle DOC$ adiacent cu $\measuredangle COB$ cu $m(\measuredangle DOC)=60^\circ$ şi $[OE$ bisectoarea lui $\measuredangle DOC$. Arătaţi că: i) $[OD\perp[OB$; ii) $[OE\perp[OA$.

Cursul 5

Trigonometria ca aplicaţie a seriilor de puteri

În definiţia 3.1 am introdus, printre altele, noţiunea de funcţie analitică de variabilă complexă iar în teorema 3.2 am enunţat echivalenţa cu olomorfia. Analiticitatea se exprimă prin faptul că funcţia dată este sumă a unei serii de puteri. În prezentul curs vom ilustra acest concept aplicându-l în trigonometrie, în particular la geometria cercului unitate S^1.

Reamintim *criteriul raportului pentru serii* de numere complexe: Fie $a_n \in \mathbb{C}^*$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă $r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ există şi $r \in (0,1)$ atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Dacă $r > 1$ atunci seria diverge iar cazul $r = 1$ este nedeterminat.

Exemplul 5.1 *Seria geometrică* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ va converge în discul unitate $D^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ deoarece $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |z|$. Avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} z^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-z^{N+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}. \tag{5.1}$$

Din aceaste egalităţi vedem că avem convergenţa seriei geometrice *doar* pe D^1! □

Exemplul precedent arată că *putem defini* funcţia $\frac{1}{1-z}$ pe D^1 ca sumă a seriei geometrice. În fapt, formula integrală Cauchy arată un mod de derivare a dezvoltării în serii de puteri, pornind chiar de la seria geometrică, a oricărei funcţii analitice!

În fapt, există două serii de puteri ce domină teoria funcţiilor analitice: seria geometrică şi seria exponenţială. Pentru a introduce pe a doua avem nevoie de un rezultat tehnic:

Teorema 5.2 *Fie seria* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *convergentă pe discul* $D(R) := \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ *şi să notăm cu* $f(z)$ *suma acestei serii. Avem că funcţia* f *este diferenţiabilă pe* $D(R)$ *cu* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$. *Mai mult, şi seria* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$ *converge şi suma este o funcţie* F *diferenţiabilă cu* $F'(z) = f(z)$ *pe* $D(R)$.

Seria exponenţială este: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ şi pentru $z \neq 0$ putem aplica criteriul raportului:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{R}{n+1} \to 0 < 1. \tag{5.2}$$

Prin urmare, pentru orice bilă $B(R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R\}$ avem convergenţa (absolută şi uniformă) cu valoarea 1 în originea $z = 0$ deoarece $z^0 = 1 = 0!$. Aplicând teorema 5.2 obţinem o funcţie, numită *exponenţiala* şi notată e^z. O primă proprietate fundamentală a acestei funcţii este dată de:

Teorema fundamentală 5.3 *Pentru orice* $z, w \in \mathbb{C}$ *avem:*

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w = e^w \cdot e^z. \tag{5.3}$$

Demonstraţia 1 Datorită convergenţei absolute valoarea sumei nu depinde de modul de sumare! Avem:

$$e^{z+w} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k = \sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \frac{w^k}{k!}. \tag{5.4}$$

În ultimul membru facem $n = j + k$:

$$e^{z+w} = \sum_{j\geq 0} \sum_{k\geq 0} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!} = e^z e^w$$

ceea ce voiam.
Demonstraţia 2 Putem demonstra şi invers:

$$e^z \cdot e^w = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...\right)\left(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + ...\right) =$$

$$= 1 + (z+w) + \left(\frac{z^2}{2!} + zw + \frac{w^2}{2!}\right) + \left(\frac{z^3}{3!} + \frac{z^2}{2!}w + z\frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!}\right) + ... = e^{z+w}.$$

□

O a doua proprietate fundamentală dată de teorema 5.2 se referă la seria ce dă primitiva funcţiei exponenţiale. Această serie este:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{m\geq 1} \frac{z^m}{m!} = e^z - 1. \tag{5.5}$$

Am obţinut că funcţia exponenţială este propria sa primitivă:

$$(e^z)' = e^z. \tag{5.6}$$

Din teorema 5.3 obţinem că:

$$e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1 \tag{5.7}$$

cee a ce spune că $e^z \neq 0$ şi $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$. Deoarece aplicaţia de conjugare este continuă avem:

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}. \tag{5.8}$$

Fie $t \in \mathbb{R}$ şi numărul complex e^{it}. Din (5.8) avem:

$$\overline{e^{it}} = e^{-it} = \frac{1}{e^{it}} \tag{5.9}$$

ceea ce spune că $|e^{it}| = 1$ adică $e^{it} \in S^1$. Ştim parametrizarea cercului unitate S^1 cu funcţiile trigonometrice:

$$S^1 : z(t) = \cos t + i \sin t \tag{5.10}$$

şi deci există o funcţie $\varphi = \varphi(t)$ aşa încât: $e^{it} = \cos\varphi(t) + i \sin\varphi(t)$!

În fapt cunoaştem trigonometria funcţiilor cos şi sin, valorile lor în $t = 0$ şi derivatele lor:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} = I\cdot\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

cu I matricea din cursul 3 ce generalizează pe i. Prin urmare, o dezvoltare Taylor în apropierea lui $t = 0$ dă dezvoltarea în serie de puteri a funcţiilor trigonometrice:

$$\cos t = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin t = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{5.12}$$

Revenind la exponenţială avem:

$$e^{it} = \sum_{n\geq 0}\frac{(it)^n}{n!} = \sum_{k\geq 0}\frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k\geq 0}\frac{i^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos t + i\sin t \tag{5.13}$$

şi această identitate fundamentală are loc pentru orice t real, nu numai în apropierea lui 0!

Consideraţiile precedente ne permit extinderea funcţiilor trigonometrice la $\mathbb{C}$!

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{5.14}$$

ca şi demonstrarea formulei Moivre:

$$(\cos t + i\sin t)^n = \cos(nt) + i\sin(nt) \tag{5.15}$$

pentru $n \in \mathbb{N}^*$. În adevăr, primul membru este $(e^{it})^n$ şi avem $(e^{it})^n = e^{i(nt)}$ ceea ce dă membrul drept. De asemeni, relaţiile (5.14) sugerează şi varianta hiperbolică:

$$chz = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad shz = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad ch^2 z - sh^2 z = 1. \tag{5.16}$$

Obţinem astfel parametrizări pentru S^1, elipsa canonică şi hiperbola canonică:

$$S^1 : z(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi) \tag{5.17}$$

$$E(a,b) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z(t) = (a\cos t, b\sin t), \quad t \in [0, 2\pi) \tag{5.18}$$

$$H(a,b) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z(t) = (acht, bsht), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.19}$$

Din (5.17) şi formula fundamentală (5.3) obţinem că cercul unitate cu înmulţirea complexă $(S^1, \cdot)$ este grup comutativ. Cum avem periodicitatea funcţiilor trigonometrice cu perioada principală 2π rezultă:

$$e^{i(t+2k\pi)} = e^{it} \tag{5.20}$$

şi cum $(\mathbb{Z}, +)$ este subgrup normal în grupul comutativ $(\mathbb{R}, +)$ din prima teorema de izomorfism a grupurilor avem izomorfismul grupului factor:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1 \tag{5.21}$$

exact prin intermediul funcţiei exponenţiale $t \in \mathbb{R} \to e^{it} \in S^1$!

Din prima formulă (5.14) cu $z = \pi$ obţinem:

$$e^{i\pi} = -1 \tag{5.22}$$

sau încă *identitatea Euler*:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{5.23}$$

caz particular al sumei rădăcinilor de ordinul n ale unităţii:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{k}{n}} = 0 \tag{5.24}$$

dată de prima relaţie Viete pentru: $z^n - 1 = 0$.

SEMINARUL 5: Paralelism

S5.1 .

Rezolvare .

S5.2 .

Rezolvare .

S5.3 .

Rezolvare .

S5.4 .

Rezolvare .

\- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

T5.1 (problema 12, p. 121) În ΔABC fie $[AD]$ bisectoarea din A, $BB' \perp AD$ cu $B' \in AC$ şi $CC' \perp AD$ cu $C' \in AB$. Arătaţi că: i) $BB' \parallel CC'$; ii) $[BC'] \equiv [B'C]$.

T5.2 (problema 12, p. 119) Fie ΔABC isoscel cu baza BC iar $[BB']$ şi $[CC']$ bisectoaele din B respectiv C. Prin A se duc paralele la BB' şi CC' care taie dreapta BC în D respectiv E. Arătaţi că: i) $\measuredangle AEB \equiv \measuredangle ADC$; ii) dacă I este centrul cercului înscris în ΔABC atunci $[AI$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle EAD$.

T5.3 (problema 11, p. 119) Fie $[AD]$ bisectoarea din A în ΔABC. Paralela prin D la AB taie pe AC în E iar paralela prin E la AD taie BC în F. Arătaţi că: i) $\measuredangle EAD \equiv \measuredangle EDA$; ii) $[EF$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle DEC$.

T5.4 (problema 10, p. 119) Fie ΔABC oarecare şi $[BM]$ bisectoarea din B cu $M \in (AC)$. Paralela prin M la BC intersectează AB în N. Dacă $\measuredangle MBC \equiv \measuredangle MCB$ atunci arătaţi că $[MN$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle AMB$.

T5.5 (problema 16, p. 117) În ΔABC prin B ducem o paralelă la AC iar prin A ducem p paralelă la BC. Cele două paralele se intersectează în punctul D. Prelungim latura $[BC]$ cu segmentul egal $[BF]$ şi latura $[AC]$ cu segmentul egal $[AE]$. Arătaţi că: i) $\Delta DAB \equiv \Delta CBA$; ii) $DE \parallel AB$; iii) $DF \parallel AB$; iv) punctele D, E şi F sunt coliniare.

T5.6 (problema 15, p. 117) Fie ΔABC isoscel cu baza $[BC]$. Punctele D şi E sunt situate în semiplanul determinat de dreapta BC care conţine pe A a. î. $BD \parallel AC$, $[BD] \equiv [AC]$, $CE \parallel AB$ şi $[CE] \equiv [AB]$. Arătaţi că: i) $AD \parallel BC$; ii) $AE \parallel BC$; iii) punctele A, D şi E sunt coliniare.

T5.7 (problema 14, p. 117) În ΔABC prin A ducem o paralelă la BC şi prin C ducem o paralelă la AB. Cele două paralele se intersectează în punctul D. Arătaţi că: i) $[AD] \equiv [BC]$; ii) $[CD] \equiv [AB]$.

T5.8 (problema 13, p. 117) În ΔABC punctele D şi E sunt situate de o parte şi d ealta a dreptei AB a. î. avem ordinea D, A, E şi $AD \parallel BC$, $AE \parallel BC$, $[AD] \equiv [AE] \equiv [BC]$. Arătaţi că: i) $[BD] \equiv [AC]$; ii) $[EC] \equiv [AB]$; iii) punctele D, A şi E sunt coliniare.

T5.9 (problema 11, p. 117) Fie ΔABC cu $m(\measuredangle A) = 64°$ şi $D \in (BC)$ cu $DE \parallel AB$, $E \in (AC)$. Ştiind că $m(\measuredangle ADE) = 32°$ arătaţi că $[AD$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle BAC$.

T5.10 (problema 10, p. 117) Fie ΔABC cu $m(\measuredangle C) = 40°$ şi $[CD]$ bisectoarea unghiului C. Ducem $DE \parallel BC$ cu $E \in (AC)$. Se cer măsurile unghiurilor în ΔDEC.

Cursul 6

Legi de grup pe conice Pell generalizate

Am finalizat cursul precedent cu structura de grup comutativ al cercului unitate S^1 ca subgrup în grupul abelian $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. În acest curs vom generaliza această structură pe o clasă remarcabilă de conice, clasă ce include pe S^1.

Definiţia 6.1 Conica Γ dată în (4.12):

$$\Gamma : f(x,y) := r_{11}x^2 + 2r_{12}xy + r_{22}y^2 + 2r_{10}x + 2r_{20}y + r_{00}, \quad r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{22}^2 \neq 0 \tag{6.1}$$

o numim *Pell generalizată* dacă ecuaţia sa nu are termeni de gradul 1 şi $r_{11} = -r_{00} \neq 0$. În particular, o conică Pell generalizată o numim *Pell* dacă nu avem termenul mixt: $r_{12} = 0$.

Fixăm Γ o conică Pell generalizată. Cum $r_{11} = -r_{00} \neq 0$ prin împărţirea cu acest număr nenul putem scrie, cu renotarea indicilor rămaşi:

$$\Gamma : x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2 = 1. \tag{6.2}$$

Această conică este Pell dacă şi numai dacă $\alpha = 0$. Introducem pe mulţimea punctelor lui Γ înmulţirea:

$$(x,y) \odot_\Gamma (x',y') := (xx' - \beta yy', xy' + yx' + 2\alpha yy'). \tag{6.3}$$

Un calcul imediat dă că $(\Gamma, \odot_\Gamma)$ este grup comutativ, cu elementul neutru $e = (1,0) = 1 \in \Gamma$ iar inversul este:

$$(x,y)^{-1} = (x + 2\alpha y, -y) = (x,-y) + 2\alpha(y,0) \in \Gamma. \tag{6.4}$$

În particular, dacă Γ este Pell atunci inversul unui element z din $\Gamma \subset \mathbb{C}$ coincide cu conjugatul complex $\bar{z}$!

Definiţia 6.2 $(\Gamma, \odot_\Gamma)$ îl numim *grup Pell generalizat* şi-l notăm $gPell(\alpha, \beta)$. Dacă Γ este conică Pell atunci îl numim *grup Pell* şi-l notăm $Pell(\beta)$.

Exemplul 6.3 Cercul unitate S^1 este o conică Pell cu $\beta = 1$ şi deci:

$$(x,y) \odot_{S^1} (x',y') = (xx' - yy', xy' + yx') \tag{6.5}$$

care este exact înmulţirea din $\mathbb{C}$ restricţionată la S^1! Să observăm că $z \in S^1$ are inversul $z^{-1} = (x,-y) = \bar{z}$. $\square$

Revenim la grupul Pell generalizat (6.3) şi să-l scriem cu înmulţirea complexă:

$$z \odot_\Gamma z' = zz' + \Im z \Im z'(1-\beta, 2\alpha). \tag{6.6}$$

şi obţinem că S^1 este singura conică Pell generalizată cu înmulţirea comună cu cea a spaţiului ambiant $\mathbb{C}$.

De asemeni, cu formalismul relaţiilor $(4.14-15)$ conica Pell generalizată se scrie în variabila complexă:

$$\Gamma : F(z,\bar{z}) := Az^2 + Bz\bar{z} + \bar{A}\bar{z}^2 = 1 \tag{6.7}$$

cu:

$$A = \frac{1-\beta}{4} - \frac{\alpha}{2}i \in \mathbb{C}, \quad 2B = 1+\beta = I \in \mathbb{R} \tag{6.8}$$

de unde rezultă expresia complexă a înmulţirii Pell generalizate şi a inversului:

$$z \odot_\Gamma z' := zz' + 4\Im z \Im z' \bar{A}, \quad z_\Gamma^{-1} = \bar{z} - 4\Im z \Im A. \tag{6.9}$$

Să observăm şi caracterizarea: Γ=Pell dacă şi numai dacă $A \in \mathbb{R}$! Pentru grupul $Pell(\beta)$ obţinem înmulţirea complexă deformată cu un termen aditiv real:

$$z \odot_\Gamma z' := zz' + (1-\beta)\Im z \Im z'. \tag{6.10}$$

Denumirea de Pell vine de la *ecuaţia diofantică Pell*:

$$x^2 - dy^2 = 1, \quad d \in \mathbb{N}^* \tag{6.11}$$

studiată de matematicianul englez John Pell (1611-1685). Soluţiile $(\pm 1, 0)$ se numesc triviale şi sunt universale i.e. nu depind de d. Cazul $d = 1$, ce reprezintă o *hiperbolă echilateră*, nu mai are alte soluţii în afara celor triviale. Avem că această ecuaţie diofantică specială reprezintă o hiperbolă H_d, uneori chiar numită hiperbola Pell, şi vrem punctele de coordonate întregi de pe H_d. Dacă ştim o soluţie **ne-trivială** (x_1, y_1) atunci putem produce o infinitate de soluţii cu recurenţa liniară:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

dar această recurenţă liniară nu produce în mod necesar toate soluţiile!

Să observăm că matricea 2×2 din membrul drept al relaţiei precedente aparţine grupului $SL(2,\mathbb{R})$ deoarece are determinantul $x_1^2 - dy_1^2 = 1$ iar excentricitatea hiperbolei Pell H_d este:

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{d}} > 1.$$

O altă construcţie remarcabilă consideră hiperbola Pell $H_d : x^2 - dy^2 = 1$ cărei îi asociem ecuaţii diofantice:

$$ax^2 - 2bxy - cy^2 = \pm 1 \tag{6.13}$$

în care coeficienţii $a, b, c \in \mathbb{Z}$ satisfac $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$ şi $b^2 + ac = d$; de asemeni cerem $2b > a - c$ ceea revine la a spune că soluţia pozitivă a ecuaţiei $at^2 - 2bt - c = 0$ este de fapt mai mare decât 1. Fie k partea din $\mathbb{Z}$ a acelei soluţii. *Reducerea Euler* a ecuaţiei (6.13) se realizează cu substituţiile:

$$x = k\tilde{x} + \tilde{y}, \quad y = \tilde{x} \tag{6.14}$$

care transformă (6.13) în ecuaţia:

$$\tilde{a}\tilde{x}^2 - 2\tilde{b}\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{c}\tilde{y}^2 = \mp 1 \tag{6.15}$$

cu noii coeficienţi $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{Z}$ fiind funcţii de a, b, c, k şi satisfăcând condiţii similare lui a, b, c.

Exemplul 6.4 Vom obţine hiperbola Pell $d = 2$ plecând de la tripletul $a = b = c = 1$. Avem $b^2 + ac = d = 2$ şi $2b = 2 > a - c = 0$. Ecuaţia $t^2 - 2t - 1 = 0$ are soluţiile $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ deci $k = 1$. Endomorfismul (6.14) devine:

$$x = \tilde{x} + \tilde{y}, \quad y = \tilde{x}$$

iar pentru ecuaţia iniţială (6.13) i.e. $x^2 - 2xy - y^2 = \pm 1$ obţinem noua ecuaţie $\tilde{y}^2 - 2\tilde{x}^2 = \pm 1$ cu $\tilde{a} = 2 > 0$, $\tilde{b} = 0$ şi $\tilde{c} = 1 > 0$; dar avem acum $2\tilde{b} = 0 < \tilde{a} - \tilde{c} = 1$.

Hiperbola Pell $x^2 - 2y^2 = 1$ are soluţiile $x_n + y_n\sqrt{2} = \pm(3 + 2\sqrt{2})^n$ i.e.:

$$x_n = \pm\frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^2}{2}, \quad y_n = \pm\frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}, \tag{6.16}$$

cu $(x_0, y_0) = \pm(1, 0)$ şi $(x_1, y_1) = \pm(3, 2)$. În coordonata complexă $z := x + iy$ hiperbola H_2 are ecuaţia:

$$H_2 : z^2 + \bar{z}^2 - 6|z|^2 + 4 = 0. \tag{6.17}$$

□

Exemplul 6.5 O conică Pell Γ o vom numi *auto-Pell* dacă punctul $A = \left(\frac{1-\beta}{4}, -\frac{\alpha}{2}\right)$ aparţine lui Γ. Cu formula (6.2) pentru Γ rezultă ecuaţia:

$$(\beta - 1)^2 + 4\alpha^2(2\beta - 1) = 16 \tag{6.18}$$

şi avem următoarele 6 soluţii întregi:
1) $(\alpha_1, \beta_1) = (0, -3)$ deci $A_1 = 1 = (1, 0)$ şi conica (hiperbolă cu excentricitatea $e = \frac{2}{\sqrt{3}}$) auto-Pell $\Gamma_1 : x^2 - 3y^2 = 1$. Soluţie ne-trivială a ecuaţiei Pell asociate este $(x_1, y_1) = (2, 1)$.
2) $(\alpha_2, \beta_2) = (0, 5)$ deci $A_2 = -1 = (-1, 0)$ şi conica (elipsă cu excentricitatea $e = \frac{2}{\sqrt{5}}$) auto-Pell $\Gamma_2 : x^2 + 5y^2 = 1$. Singurele soluţii întregi ale ecuaţiei Pell asociate sunt $(\pm 1, 0)$.
3) $(\alpha_3^\pm, \beta_3^\pm) = (\pm 2, 1)$ deci $A_3^\pm = \mp i = (0, \mp 1)$ şi conica (hiperbolă cu excentricitatea 2) auto-Pell $\Gamma_3^\pm : x^2 \pm 4xy + y^2 = 1$. O soluţie ne-trivială ecuaţiei diofantice asociate este $(\mp 4, 1)$.
4) $(\alpha_4^\pm, \beta_4^\pm) = (\pm 2, -31)$ deci $A_4^\pm = (8, \mp 1)$ şi conica (hiperbolă cu excentricitatea e=1.0179...) auto-Pell $\Gamma_4^\pm : x^2 \pm 4xy - 31y^2 = 1$.
□

SEMINARUL 6: Măsura unghiurilor într-un triunghi

S6.1 .

Rezolvare .

S6.2 .

Rezolvare .

S6.3 .

Rezolvare .

S6.4 .

Rezolvare .

S6.5 .

Rezolvare .

S6.6 .

Rezolvare .

S6.7 .

Rezolvare .

S6.8 .

Rezolvare .

S6.9 .

Rezolvare .

S6.10 .

Rezolvare .

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

T6.1 (problema 7, p. 124) Fie ΔABC dreptunghic în A şi cu bisectoarea $[AD]$. Dacă $m(\measuredangle ADC) = 105^\circ$ atunci aflaţi măsurile unghiurilor lui ΔABC.

T6.2 (problema 6, p. 124) În ΔABC cu $m(\measuredangle A) = 120^\circ$ avem $[AD]$ şi $[AE]$ bisectoarea interioară respectiv exterioară a lui $\measuredangle A$. Ştiind că $m(\measuredangle AEB) = 10^\circ$ se cer $m(\measuredangle EAD)$, $m(\measuredangle B)$ şi $m(\measuredangle C)$.

T6.3 (problema 5, p. 124) Fie ΔABC cu $m(\measuredangle C) = 30^\circ$, $[AD]$ bisectoarea din A şi $m(\measuredangle ADB) = 70^\circ$. Se cer unghiurile lui ΔABC.

T6.4 (problema 4, p. 124) Se cer măsurile unghiurilor exterioare pentru ΔABC ştiind că măsura unghiului exterior din C este 105° şi $3m(\measuredangle A) = 4m(\measuredangle B)$.

T6.5 (problema 3, p. 124) Se cer măsurile unghiurilor în ΔABC ştiind că măsura unghiului exterior din A este 140° şi $m(\measuredangle B) - m(\measuredangle C) = 20^\circ$.

T6.6 (problema 2, p. 123) Se cer măsurile unghiurilor în ΔABC ştiind că unghiurile exterioare au măsuri de: i) 120° şi 130°; ii) 140° şi 70°; iii) 160° şi 110; iv) 130° şi 100°.

T6.7 (problema 1, p. 123) Se cer măsurile unghiurilor exterioare pentru ΔABC ştiind că: i) $m(\measuredangle A) = 30^\circ$ şi $m(\measuredangle B) = 45^\circ$; ii) $m(\measuredangle B) = 115^\circ$ şi $m(\measuredangle C) = 23^\circ$; iii) $m(\measuredangle A) = 90^\circ$ şi $m(\measuredangle C) = 35^\circ$; iv) $m(\measuredangle C) = 70^\circ$ şi $m(\measuredangle A) = 40$.

T6.8 (problema 15, p. 123) În ΔABC avem $m(\measuredangle A) = 75^\circ$, $m(\measuredangle B) = 55^\circ$ şi $[CE]$ bisectoarea din C. Fie $F \in (BC)$ a. î. $m(\measuredangle CEF) = 25^\circ$. i) Arătaţi că $EF \parallel AC$, ii) aflaţi măsurile unghiurilor în ΔBEF.

T6.9 (problema 14, p. 123) ΔABC are măsurile unghiurilor $\measuredangle A$ şi $\measuredangle B$ proporţionale cu 4 şi 7 şi $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle B) = 110^\circ$. Fie I centrul cercului înscris. Se cer măsurile unghiurilor în ΔABC şi ΔAIB.

T6.10 (problema 13, p. 123) În ΔABC ascuţitunghic fie ortocentrul H. Dacă $m(\measuredangle AHB) = 110^\circ$ se cere $m(\measuredangle C)$.

Cursul 7

Funcţii armonice în plan

În cursul 3 am introdus Laplacianul pe funcţii din $C^k(\Omega)$ pentru $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k \geq 2$:

$$4\partial\bar{\partial} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{7.1}$$

Această aplicaţie este un operator $\mathbb{R}$-liniar $\Delta : C^k(\Omega) \to C^{k-2}(\Omega)$ ceea ce conduce considerarea nucleului său adică la următorul tip remarcabil de funcţii:

Definiţia 7.1 $u \in C^k(\Omega)$ se numeşte *armonică* dacă aparţine nucleului lui Δ: $\Delta u = 0$.

Pentru a obţine clase speciale de funcţii armonice în plan fie $F : \Omega_d \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ cu expresia $F = u + iv$. Avem că $F \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^2)$ dacă şi numai dacă u şi v aparţin lui $C^k(\Omega)$. Reamintim ecuaţiile CR:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \tag{7.2}$$

Obţinem imediat că atât $u = \Re F$ şi $v = \Im F$ sunt armonice dacă F este olomorfă!

Există şi o reciprocă a acestui rezultat, [3, p. 92]:

Teorema 7.2 *Fie $u \in C^2(\Omega)$ cu Ω deschis în $\mathbb{R}^2$ conţinând orginea O. Dacă u este armonică atunci funcţia:*

$$F(z) := 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + c \tag{7.3}$$

este olomorfă pentru o valoare a constantei c şi $u = \Re F$. Avem: $c = -\overline{F(0)}$.

Exemplul 7.3 $F(z) = z^2$ este evident olomorfă. Rezultă funcţiile armonice: $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$. Expresia complexă a acestor două funcţii este: $u(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2)$, $v(z,\bar{z}) = \frac{1}{2i}(z^2 - \bar{z}^2)$. $\square$

Armonicitatea este invariată de aplicaţiile olomorfe:

Propoziţia 7.4 *Fie Ω_1 şi Ω_2 deschişi în $\mathbb{C}$. Fie $H : w \in \Omega_2 \to z \in \Omega_1$ olomorfă şi $U : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ armonică. Atunci $u = U \circ H : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ este armonică.*

Demonstraţie Trebuie să calculăm Laplacianul $4u_{w\bar{w}}$. Cu regula lanţului pentru derivarea compunerilor avem:

$$u_{w\bar{w}} = (U_z H_w)_{\bar{w}} = U_{z\bar{z}} H_{\bar{w}} H_w = 0$$

deoarece $H_{\bar{w}} = 0$ şi $U_{z\bar{z}} = 0$. $\square$

Ca aplicaţie geometrică a funcţiilor armonice de două variabile prezentăm *reprezentarea Weierstrass* a suprafeţelor minimale. Fie suprafaţa regulată $S \subset \mathbb{R}^3$ cu parametrizarea netedă $\bar{r} : U_d \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$S : \bar{r}(u,v) = (x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v)), \quad (u,v) \in U. \tag{7.4}$$

Forma I-a fundamentală a lui S este pull-backul metricii euclidiene g_{can} a spaţiului ambient $\mathbb{R}^3$ prin $\bar{r}$:

$$g = \|\bar{r}^*\|^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad E = \|\bar{r}_u\|^2, F =< \bar{r}_u, \bar{r}_v >_{\mathbb{R}^3} = g_{can}(\bar{r}_u, \bar{r}_v), G = \|\bar{r}_v\|^2. \tag{7.5}$$

Scufundarea lui S în varietatea Riemann $(\mathbb{R}^3, g_{can} =<,>)$ produce şi forma a II-a fundamentală a lui S şi apoi, curbura totală (Gauss) $K = K(u,v)$ respectiv curbura medie $H = H(u,v)$. Dacă $H = 0$ atunci S se numeşte *minimală*; pentru detalii a se vedea [2].

Introducem un tip special de parametrizare pentru suprafeţele regulate:

Definiţia 7.5 Parametrizarea $\bar{r}$ a lui S o numim *izotermă* dacă g este multiplu conform al metricii euclidiene 2-dimensionale:

$$E = G > 0, \quad F = 0. \tag{7.6}$$

Orice suprafaţă regulată admite o parametrizare izotermă. Fie $\bar{N}$ versorul normalei lui S. Avem următorul calcul, [4, p. 116]:

Propoziţia 7.6 *Dacă $\bar{r}$ este parametrizare izotermă atunci:*

$$\Delta\bar{r} := \bar{r}_{uu} + \bar{r}_{vv} = 2EH\bar{N}. \tag{7.7}$$

În consecinţă, dacă S este şi minimală atunci funcţiile x^1, x^2, x^3 sunt armonice.

Această consecinţă permite următoarea reperezentare Weierstrass a suprafeţelor minimale: fie $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3 : U \to \mathbb{C}$ olomorfe astfel încât:

$$\left(\varphi^1_z\right)^2 + \left(\varphi^2_z\right)^2 + \left(\varphi^3_z\right)^2 = 0. \tag{7.8}$$

Atunci următoarea aplicaţie vectorială reprezintă o suprafaţă minimală:

$$\bar{r} = \left(\Re \int \varphi^1(z)dz, \Re \int \varphi^2(z)dz, \Re \int \varphi^3(z)dz\right). \tag{7.9}$$

Spre exemplu, fie funcţiile $p = p(z)$ olomorfă şi $q = q(z)$ meromorfă: dacă p are pe z_0 ca zerou de ordin $2m$ atunci q să aibă pe z_0 ca pol de ordin mai mic decât m. Atunci funcţiile:

$$\varphi^1 = p(1+q^2), \quad \varphi^2 = -ip(1-q^2), \quad \varphi^3 = -2ipq \tag{7.10}$$

satisfac condiţia (7.8). Rezultă suprafaţa minimală S cu parametrizarea:

$$\bar{r}(z) = \left(\Re\{\int_a^z p(w)(1+q^2(w))dw\}, \Re\{\int_a^z -ip(w)(1-q^2(w))dw\}, \Re\{\int_a^z -2ip(w)q(w))dw\}\right) \tag{7.11}$$

cu $a \in \Omega$ o constantă.

Exemple 7.7 i) Fie $p(z) = 1$, $q(z) = iz$ pe $\Omega = \mathbb{C}$. Obţinem:

$$\bar{r}(z) = \left(\Re(z - \frac{z^3}{3}), \Re - i(z + \frac{z^3}{3}), \Re(z^2)\right) \tag{7.12}$$

sau, trecând în variabile reale: $z = u + iv$:

$$\bar{r}(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2 v, u^2 - v^2) \tag{7.13}$$

care este *suprafaţa Enneper*.
ii) Pentru acelaşi p dar $q(z) = \frac{1}{z}$ pe $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ obţinem *elicoidul* iar $q(z) = \frac{i}{z}$ pe acelaşi Ω generează *catenoidul*. $\square$

Încheiem acest curs cu o caracterizare a ecuaţiilor Cauchy-Riemann asociate funcţiei $F(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ folosind *câmpul vectorial Polya* asociat:

$$V_F := u\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial y}. \tag{7.14}$$

Mai precis, definim pentru V_F rotorul şi divergenţa prin:
1) $curl(V_F) := \nabla \times V_F = (-v_x - u_y)\bar{k}$=câmp vectorial ın $\mathbb{R}^3$,
2) $div(V_F) :=< \nabla, V_F >= u_x - v_y$=câmp scalar pe $\mathbb{R}^2$.

Rezultă imediat că f satisface ecuaţiile Cauchy-Riemann dacă şi numai dacă avem simultan $curl(V_F) = 0 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ şi $div(V_F) = 0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$!

Definiţia 7.8 Câmpul vectorial $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ se numeşte:
i) *irotaţional* dacă $curl(V) = 0$,
ii) *incompresibil* sau *solenoidal* dacă $div(V) = 0$.

Prin urmare, funcţia F este olomorfă dacă şi numai dacă câmpul Polya asociat V_F este simultan irotaţional şi incompresibil!

SEMINARUL 7: ÎNĂLŢIMI

S7.1 .

Rezolvare .

S7.2 .

Rezolvare .

S7.3 .

Rezolvare .

S7.4 .

Rezolvare .

S7.5 .

Rezolvare .

S7.6 .

Rezolvare .

S7.7 .

Rezolvare .

S7.8 .

Rezolvare .
S7.8 .

Rezolvare .

S7.10 .

Rezolvare .

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Dan Zaharia, Maria Zaharia, *Matematică 6, Algebră, Geometrie*, partea a II-a (semestrul 2), Mate 2000-Consolidare, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2014.

T7.1 (problema 8, p. 115) Fie $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, $[AD]$ înălţimea din A şi $[A'D']$ înălţimea din A'. Arătaţi că $[AD] \equiv [A'D']$.

T7.2 (problema 9, p. 115) Fie ΔABC isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$ şi înălţimile $[BB']$, $[CC']$. Arătaţi că $[BB'] \equiv [CC']$.

T7.3 (problema 10, p. 115=reciproca rezultatului precedent) Fie ΔABC şi înălţimile $[BB']$, $[CC']$. Dacă $[BB'] = [CC']$ atunci ΔABC este isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$.

T7.4 (problema 12, p. 115) Fie ΔABC dreptunghic în A. Pe ipotenuza BC se consideră punctul D a. î. $[AC] \equiv [DC]$. În D se consideră perpendiculara pe BC şi fie E punctul de intersecţie cu AC şi F cu AB. Arătaţi că: i) $[AB] \equiv [DE]$; ii) $CF \perp BE$.

T7.5 (problema 13, p. 115) Fie bisectoarea $(OM$ a unghiului ascuţit $\measuredangle XOY$. Se construiesc $MA \perp OX$ şi $MB \perp OY$ cu $A \in [OX$ şi $B \in OY$. Arătaţi că $[MA] \equiv [MB]$.

T7.6 (problema 14, p. 115) Se dă ΔABC echilateral de latură l şi fie $\Delta A'B'C'$ echilateral cu lungimea unei laturi oarecare egală cu înălţimea h din ΔABC. Să se arate că $l = 1,(3)h'$ cu h' înălţimea din $\Delta A'B'C'$.

T7.7 (problema 15, p. 115) Fie punctul M pe cateta $[AB]$ din ΔABC dreptunghic în A şi fie N intersecţia perpendicularei MP pe BC, $P \in (BC)$ cu dreapta AC. Arătaţi că $CM \perp BN$. *Sugestie*: M este ortocentru în ΔBCN, rezultă concluzia.

T7.8 (problema 16, p. 115) Fie ΔABC isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$. În punctele B şi C se construiesc perpendiculare pe AB respectiv AC care se intersectează în O. Se prelungeşte segmentul $[BO]$ cu un segment $[OM]$ a. î. $[BO] \equiv [OM]$. Se ştie că perpendiculara în M pe OM întâlneşte prelungirea laturii $[AC]$ în N. Arătaţi că: i) $[MN] \equiv [CN]$; ii) $ON \perp MC$.

T7.9 (problema 17, p. 115) Fie ΔABC cu $m(\measuredangle ABC) = 45°$. Fie $D \in (AC)$ a. î. $[AD] \equiv [DC]$. Dacă E şi F sunt picioarele înălţimilor din A respectiv C cu $E \in (BC)$ şi $F \in (AB)$ arătaţi că unghiul $\measuredangle EDF$ este drept.

T7.10 (problema 18, p. 115) Fie ΔABC fixat. Pe prelungirile laturii BC se consideră punctele D şi E a. î. ΔABD şi ΔACE sunt isoscele cu $B \in (DC)$ şi $C \in (BE)$. Înălţimile BM şi CN ale ΔABD şi respectiv ΔACE cu $BM \perp AD$ şi $CN \perp AE$ se intersectează în O. Arătaţi că $[AO$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle BAC$.

Cursul 8

Triplete pitagoreice

Definiţia 8.1 Fie $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Acest triplet îl numim *pitagoreic* dacă reprezintă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic: $x^2 + y^2 = z^2$.

Prin împărţirea cu z^2 rezultă:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1 \tag{8.1}$$

deci punctul $M(Z_M = \frac{x}{z} + i\frac{y}{z})$ este punct raţional pe S^1. Mai precis, M aparţine primului sector din S^1.

Observaţia 8.2 Un punct din planul complex având afixul cu partea reală şi partea imaginară numere raţionale se numeşte *punct raţional*. Mulţimea punctelor raţionale situate pe S^1 se notează $C(\mathbb{Q})$ şi este subgrup al lui $(S^1, \cdot)$ cu înmulţirea $\cdot$ complexă din formula (6.5). $\square$

Ştim parametrizările trigonometrică (5.10) şi exponenţială (5.17) ale lui S^1. Avem însă nevoie de o parametrizare raţională şi o vom determina folosind *proiecţia stereografică* din polul nord N.

Avem că N are coordonatele carteziene $(0, 1)$ şi considerăm $U_N = S^1 \setminus \{N\}$ care este un deschis pe S^1. Fie aplicaţia $\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}$ dată de $\varphi_N(P)$ este intersecţia dreptei NP cu axa Ox. Presupunem $P(a, b) \in U_N$, atunci ecuaţia lui NP este:

$$NP : \frac{x - 0}{a - 0} = \frac{y - 1}{b - 1}. \tag{8.2}$$

Cum $Ox : y = 0$ rezultă:

$$\varphi_N(P(a, b)) = x = \frac{a}{1 - b}. \tag{8.3}$$

Aplicaţia φ_N este bijecţie şi în fapt, ne trebuie inversa φ^{-1}. Fie $M(t, 0) \in \mathbb{R} = Ox$. Dreapta NM are ecuaţia:

$$NM : \frac{x - 0}{t - 0} = \frac{y - 1}{0 - 1} \tag{8.4}$$

ceea ce dă: $x = t(1 - y)$; ceea ce este exact relaţia (8.3) cu $a \to x$ şi $b \to y$. Intersectăm dreapta NM cu S^1:

$$t^2(1 - y)^2 = 1 - y^2 \to t^2(1 - y) = 1 + y \to \frac{t^2}{1} = \frac{1 + y}{1 - y} \to \frac{t^2}{1 + t^2} = \frac{1 + y}{2} \to 1 + y = \frac{2t^2}{1 + t^2}.$$

Rezultă:

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad 1 - y = \frac{2}{1 + t^2} \to x = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

În concluzie, avem parametrizarea raţională a lui S^1:

$$S^1 : z(t) := \varphi_N^{-1}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{1+t^2}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8.5}$$

Considerăm acum $t \in \mathbb{Q}$ deci $t = \frac{m}{n}$ şi facem ”rocada” $x \leftrightarrow y$ deoarece în relaţia (8.1) rolurile lui x şi y sunt simetrice:

$$(x, y) \in S^1 = \left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \frac{2mn}{m^2+n^2}\right) \tag{8.6}$$

ceea ce dă:

Teorema 8.3 *Expresia tripletelor pitagoreice este:*

$$(x, y, z) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2) \tag{8.7}$$

cu $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$. Dacă cerem ca x şi y să fie prime între ele, $(x, y) = 1$, atunci m şi n au parităţi diferite.

Exemplul canonic 8.4 Tripletul pitagoreic clasic $(3, 4, 5)$ se obţine din (8.7) cu $m = 2$ şi $n = 1$. Să observăm totodată că punctele raţionale $M_1(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) \in S^1$, $M_2(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \in S^1$ sunt exact contraimaginile prin proiecţia stereografică a lui $2 \in Ox$ respectiv $3 \in Ox$:

$$M_1 = \varphi_N^{-1}(2), \quad M_2 = \varphi_N^{-1}(3). \tag{8.8}$$

□

În fapt, trecerea $x \to y$ înseamnă să rotim planul cu $\frac{\pi}{2}$ şi deci cu proiecţia stereografică din punctul $(-1, 0) \in S^1$ obţinem:

$$S^1 \setminus \{(-1, 0)\} : z(T) = \left(\frac{T^2-1}{1+T^2}, \frac{2T}{1+T^2}\right), \quad T \in \mathbb{R} \tag{8.9}$$

şi cu substituţia $T = \frac{1}{t}$ obţinem:

$$S^1 \setminus \{(-1, 0)\} : z(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8.10}$$

Preferăm această parametrizare raţională deoarece cu sunstituţia: $t = tg\frac{\theta}{2}$ obţinem formulele trigonometrice uzuale:

$$(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{1-tg^2\frac{\theta}{2}}{1+tg^2\frac{\theta}{2}}, \frac{2tg\frac{\theta}{2}}{1+tg^2\frac{\theta}{2}}\right) \tag{8.11}$$

sau încă:

$$(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}, 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}). \tag{8.12}$$

De asemeni, putem exprima în complex relaţia (8.11) prin:

$$S^1 \setminus \{(-1, 0)\} : z(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2} = \frac{(1+it)^2}{|1+it|^2} = \frac{1+it}{1-it}. \tag{8.13}$$

Compactificarea lui $S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ cu punctul $(-1, 0) \in S^1$ se obţine făcând limita $t \to \infty$!

Să mai observăm că tripletul pitagoreic $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ este exact $(\Re z^2, \Im z^2, |z^2|)$ pentru numărul complez $z = m + in$.

Observaţia 8.5 Putem generaliza cazul cercului unitate discutat mai sus, în sensul următor. Fie Γ o conică ce admite puncte raţionale şi să presupunem că am determinat un astfel de punct. Atunci folosind proiecţia stereografică din acel punct putem da o parametrizare raţională pentru Γ. Cazul punctelor integrale de pe Γ este mult mai complicat şi determinarea lor este echivalentă cu soluţionarea unei ecuaţii Pell! $\square$

În final un tabel cu câteva triplete pitagoreice şi aria triughiului dreptunghic asociat:

m	n	x	y	z	$S = xy/2$
2	1	3	4	5	6
3	2	5	12	13	30
4	1	15	8	17	60
4	3	7	24	25	84
5	2	21	20	29	210

. (8.14)

SEMINARUL 8: Triunghiul dreptunghic

S8.1 .

Rezolvare .

S8.2 .

Rezolvare .

S8.3 .

Rezolvare .

S8.4 .

Rezolvare .

S8.5 .

Rezolvare .

S8.6 .

Rezolvare .

S8.7 .

Rezolvare .

S8.8 .

Rezolvare .

S8.9 .

Rezolvare .

S8.10 .

Rezolvare

\- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Dan Zaharia, Maria Zaharia, *Matematică 6, Algebră, Geometrie*, partea a II-a (semestrul 2), Mate 2000-Consolidare, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2014.

T8.1 (problema 3, p. 117) Fie ΔABC dreptunghic în A. Pe dreapta AB se consideră punctul D a. î. A este mijlocul lui $[BD]$. Arătaţi că $[CD] \equiv [CB]$.

T8.2 (problema 4, p. 117) Se consideră tripletele de puncte coliniare $A - O - B$ şi $C - O - D$. Ştiind că $m(\measuredangle ACO) = m(\measuredangle DBO) = 90°$ şi $[AO] \equiv [DO]$ arătaţi că ΔBOC este isoscel.

T8.3 (problema 9, p. 117) Fie ΔABC şi $\Delta A'B'C'$ isoscele cu baza $[BC]$ respectiv $[B'C']$. Dacă $m(\measuredangle ABC) = m(\measuredangle A'B'C')$ şi $d(A, BC) = d(A', B'C')$ arătaţi congruenţa celor două triunghiuri.

T8.4 (problema 10, p. 117) În ΔMNP se consideră $MQ \perp NP$ cu $Q \in (NP)$. Dacă $[NQ] \equiv [PQ]$ arătaţi că $[MN] \equiv [MP]$.

T8.5 (problema 11, p. 117) Fie punctele C şi D situate de o parte şi de alta a dreptei AB. Dacă $m(\measuredangle ACB) = m(\measuredangle ADB) = 90°$ şi $[AC] \equiv [BD]$ arătaţi că: $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle BAD$; ii) $[BC] \equiv [AD]$.

T8.6 (problema 12, p. 117) Se dau punctele coliniare $A - O - B$ şi punctele C şi D situate de aceeaşi parte a dreptei AB a. î. $CA \perp AB$, $DB \perp AB$ şi $[AC] \equiv [OB]$ respectiv $[BD] \equiv [OA]$. Arătaţi că: i) $[OC] \equiv [OD]$; ii) $m(\measuredangle ODB) = m(\measuredangle AOC)$.

T8.7 (problema 13, p. 118) Fie ΔMNP isoscel cu $[MN] \equiv [MP]$ şi punctele R şi Q în exterior a. î. $m(\measuredangle MRN) = m(\measuredangle MQP) = 90°$ şi $[MR] \equiv [MQ]$. Arătaţi că: i) $[PQ] \equiv [RN]$; ii) $\measuredangle MNR \equiv \measuredangle MPQ$.

T8.8 (problema 14, p. 118) Triunghiurile dreptunghice MNQ şi MNP au ipotenuza MN comună. Segmentele QN şi PM se intersectează în O a. î. $[PO] \equiv [QO]$. Arătaţi că: i) $[QM] \equiv [PN]$; ii) $[MP] \equiv [NQ]$.

T8.9 (problema 15, p. 118) Fie ΔABC isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$ şi M intersecţia perpendicularei în B pe AB cu perpendiculara în C pe AC. Arătaţi că: i) $[MB] \equiv [MC]$; ii) $(AM$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle BAC$.

T8.10 (problema 16, p. 118) Fie ΔABC isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$. Perpendiculara din C pe AB şi în B pe BC se intersectează în M iar perpendiculara din B pe AC şi în C pe BC se intersectează în N. Arătaţi că: i) $[BM] \equiv [CN]$; ii) $[AM] \equiv [AN]$.

Cursul 9

Transformări omografice

În cursul precedent am utilizat proiecţia stereografică a cercului unitate S^1 din punctul său $(-1,0) \in S^1$ pentru a parametriza raţional pe S^1. Am obţinut $S^1 \setminus \{(-1,0)\} \sim \mathbb{R}$ ceea ce ne conduce la:

Definiţia 9.1 Mulţimea $\mathbb{C}P(1) := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \sim S^2$ o numim *sfera Riemann* sau *spaţiul proiectiv complex* 1*-dimensional.*

Expresia proiecţiei stereografice amintite era (8.13): $f(t) = \frac{it+1}{it-1}$, $t \in \mathbb{R}$. În prezentul curs generalizăm această aplicaţie la:

Definiţia 9.2 Fie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ a. î. matricea:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

este inversabilă: $detA = ad - bc \neq 0$, i.e. $A \in GL(2,\mathbb{C})$=2*-grupul liniar general complex.* Aplicaţia $f_A : \mathbb{C}P(1) \to \mathbb{C}P(1)$ dată de:

$$f_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, \quad f_A\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad f_A(\infty) = \frac{a}{c}, \tag{9.1}$$

o numim *omografie* sau *transformare omografică* sau încă *transformare Möbius.*

Observaţii 9.3 i) În literatura de limbă engleză astfel de transformări se mai numesc *linear fractional transformations*, [3, p. 60].
ii) Să observăm matricile A şi λA cu $\lambda \neq 0$ definesc aceeaşi funcţie f! Prin urmare, deoarece $detA \neq 0$ putem considera $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon detA}}$ pentru $\varepsilon = sqn(detA)$ şi noua matrice λA are determinantul ε. În concluzie, dacă iniţial $detA > 0$ atunci ne putem restrânge la matrici $A \in GL(2,\mathbb{C})$ cu $detA = 1$ i.e. elemente $A \in SL(2,\mathbb{C})$=2*-grupul liniar special complex.*
iii) $SL(2,\mathbb{C})$ este o varietate diferenţială reală de dimensiune:

$$4 \quad (componentele\ matricii) \times 2 \quad (complex = 2\ real) - 1 \quad (condiţia\ determinant) = 7.$$

Mai reamintim că o varietate diferenţială cu structură de grup se numeşte *grup Lie.* În concluzie, $SL(2,\mathbb{C})$ este grup Lie real 7-dimensional. $\square$

Putem verifica imediat structura de grup pe operaţia de compunere a funcţiilor:

$$f_{A'} \circ f_A(z) = \frac{a'f_A(z)+b'}{c'f_A(z)+d'} = \frac{(a'a+b'c)z+(a'b+b'd)}{(c'a+d'c)z+(c'b+d'd)} = f_{A'\cdot A}(z), det(A'A) = detA'detA = 1 \cdot 1 = 1.$$

Inversa lui f_A este:

$$f_{A^{-1}} \leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

fapt ce se poate verifica şi direct, rezolvând în necunoscuta z ecuaţia:

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1.$$

Există 3 clase speciale de omografii:
1) translaţii, $T_\beta : z \to z + \beta, \infty \to \infty$. Matriceal:

$$T_\beta := \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}). \tag{9.3}$$

2) dilataţii + rotaţii: $M_\alpha : z \to \alpha z$, $\infty \to \infty$. Dacă $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$ atunci M_α schimbă scala cu factorul $|\alpha|$ şi roteşte cu unghiul θ în sens trigonometric. Matriceal:

$$M_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \to \alpha \neq 0. \tag{9.4}$$

3) *inversiunea* $R : z \to \frac{1}{z}$, $0 \leftrightarrow \infty$. Matriceal:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \setminus SL(2, \mathbb{R}). \tag{9.5}$$

Să observăm că R este o *involuţie*: $R^2 = I_2$, ceea ce se mai numeşte *structură aproape produs*. Să observăm că endomorfismul lui $\mathbb{R}^2$ ce are pe R ca matrice în raport cu baza canonică este exact simetria faţă de prima bisectoare. $\square$

Următorul rezultat dă structura grupului omografiilor:

Teorema 9.4 *Orice omografie f se descompune ca produs de cele 3 omografii speciale.*

Demonstraţie Cazul I) $c = 0$. Din $ad - bc \neq 0$ rezultă $a \neq 0$ şi $d \neq 0$. Deci: $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ceea ce spune că sau $f = M$ sau $f = T$ sau $f = T_{\frac{b}{d}} M_{\frac{a}{d}}$.
Cazul II) $c \neq 0$. Cu descompunerea:

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz+d)} \tag{9.6}$$

rezultă:

$$f = T_{\frac{a}{c}} M_{\frac{bc-ad}{c}} R T_d M_c. \tag{9.7}$$

Să mai observăm că $T_0 = I_2$. $\square$

Exemplul 9.5 În cursul 4 am aflat matricea:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \tag{9.8}$$

şi deci putem asocia transpusei S^t transformarea omografică:

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}, \quad f_{S^t}(z) = \frac{z - i}{z + i} \tag{9.9}$$

numită *transformarea Cayley*. Această funcţie transformă *conform* semi-planul superior $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\}$ pe discul unitate $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ şi în mod injectiv axa reală $\mathbb{R}$ pe cercul unitate S^1! $\square$

Definiţia 9.6 Fixăm punctele $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ având afixele $z_1, ..., z_4 \in \mathbb{C}$ şi din care măcar 3 sunt distincte. *Biraportul* acestor puncte este numărul complex:

$$(A, B; C, D) := \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} =: (z_1, z_2; z_3, z_4). \tag{9.9}$$

Dacă $z_j = \infty$ atunci biraportul este limita $\lim_{z_j \to \infty}(...z_j...)$.

Un rezultat central al teoriei omografiilor este ca acestea invariază biraportul:

Teorema 9.7 *Fie omografia f oarecare. Avem:*

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)). \tag{9.9}$$

SEMINARUL 9: Bisectoare

S9.1 .

Rezolvare .

S9.2 .

Rezolvare .

S9.3 .

Rezolvare .

S9.4 .

Rezolvare .

S9.5 .

Rezolvare .

S9.6 .

Rezolvare .

S9.7 .

Rezolvare

S9.8 .

Rezolvare .

S9.9 .

Rezolvare .

S9.10 .

Rezolvare .

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Dan Zaharia, Maria Zaharia, *Matematică 6, Algebră, Geometrie*, partea a II-a (semestrul 2), Mate 2000-Consolidare, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2014.

T9.1 (problema 7b, p. 120) Fie I centrul cercului înscris în ΔABC cu $m(\measuredangle IBC) = 15°$, $m(\measuredangle ICA) = 45°$ şi $m(\measuredangle IAC) = 30°$. Se cer unghiurile triunghiului dat.

T9.2 (problema 9, p. 120) Fie $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ şi $[AA']$ respectiv $[MM']$ bisectoarele din A respectiv M. Arătaţi că $[AA'] \equiv [MM']$.

T9.3 (problema 10, p. 120) Fie I centrul cercului înscris în ΔABC cu $m(\measuredangle BAC) = 54°$. Se cere $m(\measuredangle BIC)$

T9.4 (problema 12, p. 120) În ΔABC bisectoarea $[AA']$ este perpendiculară pe BC. Arătaţi că ΔABC este isoscel.

T9.5 (problema 15, p. 121) Fie ΔABC cu $[AB] < [AC]$, $[AD]$ bisectoarea din A şi $E \in (AC)$ a. î $[AE] \equiv [AB]$. i) Arătaţi că $[A'E] \equiv [BA']$. ii) Dacă $[AB] = 4\ cm$, $[BC] = 5\ cm$ şi $[CA] = 6\ cm$ aflaţi perimetrul pentru ΔABC şi $\Delta A'EC$.

T9.6 (problema 17, p. 121) Fie ΔABC cu $[AB] < [AC]$ şi $[AA']$ bisectoarea din A. Fie $D \in (AC$ a. î. $[AB] \equiv [AD]$. Arătaţi că $AA' \perp BD$.

T9.7 (problema 18, p. 121=reciproca problemei anterioare) Fie ΔABC cu $[AB] < [AC]$ şi $[AA']$ bisectoarea din A. Perpendiculara din B pe AA' intersectează pe AC în D. Arătaţi că $[AB] \equiv [AD]$.

T9.8 (problema 19, p. 121) Fie I centrul cercului înscris în ΔABC şi $D \in (BC)$ a. î. $ID \perp BC$. Dacă $[DI] = 5\ cm$ se cere $d(I, AB)$ şi $d(I, AC)$.

T9.9 (problema 20, p. 121) Fie ΔABC isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$ şi E un punct pe bisectoarea $(AA'$. Arătaţi ca $(EA'$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle BEC$.

T9.10 (problema 21, p. 121) Fie d_1, d_2 drepte perpendiculare în O. Fie $A, B \in d_1$ a. î. $[OA] \equiv [OB]$ şi $M \in d_2$ oarecare. Arătaţi că $[MO$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle AMB$.

Cursul 10

Inversiunea în plan

Fixăm cercul $\mathcal{C}(O,R)$ în planul dat π.

Teorema 10.1 *Fie punctele A, B, A', B' pe acest cerc aşa încât dreptele AB, $A'B'$ se intersectează în punctul $P \in \pi$. Avem atunci egalitatea:*

$$<\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}>=<\overrightarrow{PA'},\overrightarrow{PB'}>. \tag{10.1}$$

Demonstraţie Triunghiurile $\Delta PAB'$, $\Delta PA'B$ sunt asemenea deoarece au unghiul din P comun şi unghiurile congruente $\angle PB'A \equiv \angle PBA'$ (le corespund acelaşi arc de cerc AA'). Avem deci rapoartele egale:

$$\frac{PA}{PB'}=\frac{PA'}{PB} \tag{10.2}$$

şi cum vectorii din ambele produse scalare sunt coliniari rezultă relaţia (10.1). $\square$

Corolarul 10.2 *Fie punctul $P \in \pi$ şi dreapta variabilă d prin P ce intersectează cercul $\mathcal{C}(O,R)$ în punctele A, B. Atunci produsul scalar $p_{\mathcal{C}}(P) :=<\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}>$ este constant.*

Definiţia 10.3 Numărul real $p_{\mathcal{C}}(P)$ se numeşte *puterea punctului P faţă de cercul* $\mathcal{C}(O,R)$.

Avem astfel definită o funţie $p_{\mathcal{C}} : \pi \to \mathbb{R}$. Semnul acestei funcţii este dat de:

Teorema 10.4 *Avem:*
i) $p_{\mathcal{C}}(P) > 0$ *dacă şi numai dacă* $P \in Ext\mathcal{C}$,
ii) $p_{\mathcal{C}}(P) = 0$ *dacă şi numai dacă* $P \in \mathcal{C}$,
iii) $p_{\mathcal{C}}(P) < 0$ *dacă şi numai dacă* $P \in Int\mathcal{C}$.

Demonstaţie i) Dacă $P \in Ext\mathcal{C}$ atunci vectorii $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ au aceeaşi orientare şi deci unghiul dintre ei este $0°$ cu $\cos 0° = 1$. ii) Dacă $P \in \mathcal{C}$ atunci $P \in \{A,B\}$ deci unul dintre cei doi vectori este nul. iii) Unghiul dintre vectori este π şi $\cos\pi = -1$. $\square$

O formulă de calcul pentru $p_{\mathcal{C}}$ este dată de:

Teorema 10.5 *Avem:*

$$p_{\mathcal{C}}(P) = d(O,P)^2 - R^2. \tag{10.3}$$

Deci $p_{\mathcal{C}}(O) = -R^2$.

Demonstraţie Fie cazul i) anterior şi situaţia $B \in (OP)$. Atunci: $PA = OP+R$, $PB = OP-R$ de unde concluzia. Analog pentru celelalte cazuri. $\square$

Fixăm numărul $r \in \mathbb{R}^*$ şi introducem noţiunea centrală a acestui Curs.

Definiţia 10.6 Numim *inversiunea de pol O şi modul r* transformarea $I_{O,r} : \pi \to \pi$ dată de $I_{O,r}(O) = O$ şi $I_{O,r}(P) = P'$ pentru $P \neq O$ unde $P' \in OP$ este singurul punct ce satisface:

$$< \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP'} >= OP \cdot OP' = r. \tag{10.4}$$

Dacă O este originea unui reper ortonormat fixat al lui π atunci notăm doar I_r. Dacă $r > 0$ spunem că I este o *inversiune pozitivă* iar dacă $r < 0$ spunem că I este o *inversiune negativă*.

Orice inversiune este o involuţie: $I \circ I = I^2 = Id_\pi$. În cele ce urmează vom studia în principal involuţiile pozitive; deci avem fixat $r > 0$.

Teorema 10.7 *$I_{O,r}$ invariază punct cu punct cercul $\mathcal{C}(O, \sqrt{r})$ şi schimbă între ele exteriorul şi interiorul acestui cerc.*

Demonstraţie Dacă $P \in \mathcal{C}(O, \sqrt{r})$ atunci $OP \cdot OP = (\sqrt{r})^2 = r$ deci $I_{O,r}(P) = P$. Presupunem $P \in Int\mathcal{C}(O, \sqrt{r}) \setminus \{O\}$ şi ducem prin P perpendiculara pe dreapta OP. Intersectăm această perpendiculară cu cercul dat în punctul A. Tangenta în A la cerc intersectează dreapta OP în punctul $P' \in Ext\mathcal{C}(), \sqrt{r})$. Aplicăm teorema catetei în triunghiul $\Delta OAP'$ ce este dreptunghic în A:

$$OP \cdot OP' = (\sqrt{r})^2 = r$$

şi deci $I_{O,r}(P) = P'$. Reciproc, dacă $P \in Ext\mathcal{C}(O, \sqrt{r})$ atunci fie OA tangentă la cerc. Din A ducem perpendiculara AP' pe dreapta OP. Avem că $I_{O,r}(P) = P'$ cu aceeaşi teoremă a catetei. $\square$

Definiţia 10.8 Cercul $\mathcal{C}(O, R := \sqrt{r})$ se numeşte *cercul de inversiune* pentru $I_{O,r}$ sau *cercul inversiunii.*

Exemplul 10.8 Să tratăm I_r în numere complexe. Fie $P(z) \in \pi \setminus \{O\}$ şi $P'(z')$. Avem că $z' = \alpha z$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$ din coliniaritatea punctelor O, P şi P'. Condiţia de definiţie (10.4) devine:

$$|z| \cdot |z'| = |z| \cdot \alpha |z| = r$$

şi deci: $\alpha = \frac{r}{|z|^2}$. Prin urmare:

$$I_r(z) = \frac{r}{|z|^2} z = \frac{r}{z\bar{z}} z = \frac{r}{\bar{z}}. \tag{10.5}$$

$\square$

O altă transformare remarcabilă a planului este dată de:

Definiţia 10.9 Numim *omotetia de pol O şi modul r* aplicaţia $H_{O,r} : \pi \to \pi$ precizată de:

$$\overrightarrow{OP'} = r\overrightarrow{OP}. \tag{10.6}$$

Observaţia 10.10 i) $H_{O,1} = Id_\pi$. ii) $H_{O,-1}$ este simetria S_O faţă de punctul O. $\square$

Teorema 10.11 *Mulţimea omotetiilor cu acelaşi pol O formează un grup abelian izomorf cu grupul multiplicativ* $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Demonstraţie Avem imediat: $H_{O,r_1} \circ H_{O,r_2} = H_{O,r_1 r_2}$. $\square$

Rezultatul anterior este o parte a unui rezultat mai general:

Teorema 10.12 *Mulţimea omotetiilor şi a inversiunilor de acelaşi pol O formează un grup.*

Demonstraţie Fie $P'' = I_{O,r_2}(P')$, $P' = I_{O,r_1}(P)$. Avem:

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{r_1}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP}, \quad \|\overrightarrow{OP'}\| = \frac{r_1}{\|\overrightarrow{OP}\|}.$$

Analog:

$$\overrightarrow{OP''} = \frac{r_2}{\|\overrightarrow{OP'}\|^2}\overrightarrow{OP'} = \frac{r_2}{r_1}\overrightarrow{OP}$$

ceea ce spune că:

$$I_{O,r_2} \circ I_{O,r_1} = H_{O,\frac{r_2}{r_1}}. \tag{10.7}$$

Analog:

$$I_{O,r_2} \circ H_{O,r_1} = I_{O,\frac{r_2}{r_1}}, \quad H_{O,r_2} \circ I_{O,r_1} = I_{O,r_1 r_2}. \tag{10.8}$$

□

Definiţia 10.13 Grupul obţinut în ultima teoremă se cheamă *grupul conform de centru O al planului*.

SEMINARUL 10: Aria triunghiului

S10.1 .

Rezolvare .

S10.2 .

Rezolvare .

S10.3 .

Rezolvare .

S10.4 .

Rezolvare .

S10.5 .

Rezolvare .

S10.6 .

Rezolvare .

S10.7 .

Rezolvare .

S10.8 .

Rezolvare .

S10.9 .

Rezolvare .

S10.10 .

Rezolvare .

S10.11 .

Rezolvare .

S10.12 .

Rezolvare .

S10.13 .

Rezolvare .

S10.14 .

Rezolvare .

S10.15 .

Rezolvare .

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

T10.1 (problema 1, p. 125) Calculaţi aria ΔABC ştiind că: i) $BC = 6$ *cm* şi înălţimea $[AD] = 4$ *cm*; ii) $m(\measuredangle A) = 90°$, $[AB] = 6$ *cm*, $[AC] = 8$ *cm*.

T10.2 (problema 2) Pentru ΔABC aflaţi:
1) lungimea înălţimii din B ştiind $[AB] = 8$ *cm* şi aria $S = 10$ cm^2;
2) latura $[AB]$ ştiind că înălţimea corespuzătoare are 4 *cm* şi $S = 12$ cm^2;
3) latura $[BC]$ şi înălţimea $[AD]$ ştiind că $[AD]$ este 50% din BC şi $S = 25$ cm^2;
4) înălţimea $[BE]$, $[AE]$ şi $[CE]$ ştiind că diferenţa $[AE] - [CE] = 2$ *cm*, $[AC] = 4$ *cm* şi $S = 10$ $cm^{2,}$
5) latura $[AC]$ şi înălţimea $[BE]$ ştiind că $[AC]$ şi $[BE]$ sunt direct proporţionale cu 2 şi 3 iar $S = 48$ cm^2.

T10.3 (problema 3, p. 125) În ΔABC fie înăţimile $[AD]$ şi CF. Ştiind că:
i) $[AB] = 4$ *cm*, $BC = 6$ *cm* şi $[AD] = 8$ *cm* aflaţi $[CF]$,
2) $[AD] = 6$ *cm*, $[CF] = 9$ *cm* şi $S = 18$ *cm* aflaţi $[AB]$ şi $[AC]$.

T10.4 (problema 4, p. 126) Fie ΔABC dreptunghic în A. Aflaţi:
i) înălţimea $[AD]$ ştiind $[AB] = 6$ *cm*, $[AC] = 8$ *cm* şi $[BC] = 10$ *cm*,
ii) ipotenuza $[BC]$ ştiind $[AB] = 4$ *cm*, $[AC] = 3$ *cm* şi $[AD] = 2,4$ *cm*,
iii) înălţimea $[AD]$ ştiind că raportul catetelor este $\frac{3}{4}$, suma lor este 21 *cm* şi $[BC] = 15$ *cm*.

T10.5 (problema 5, p. 126) Fie ΔABC isoscel de bază $[BC]$. Arătaţi că înălţimile din B şi C sunt congruente.

T10.6 (problema 6, p. 126) Fie ΔABC ascuţitunghic. Ducem prin A o paralelă d la BC. Fie $D \in d \setminus \{A\}$. Arătaţi că ΔABC şi ΔDBC sunt echivalente.

T10.7 (problema 1a, p. 136) Fie M mijlocul laturii $[AC]$ în ΔABC. Aflaţi raportul dintre $S(ABM)$ şi $S(CBM)$.

T10.8 (problema 1b, p. 136) Fie G centru de greutate în ΔABC. Aflaţi numărul:

$$S(G) = \frac{S(AGB)}{S(AGC)} + \frac{S(AGC)}{S(BGC)} + \frac{S(BGC)}{S(AGB)}.$$

T10.9 (problema 2, p. 136) Fie M mijlocul medianei AA' în ΔABC. Aflaţi raportul dintre $S(AMC)$ şi $S(ABC)$.

T10.10 (problema 4, p. 136) Se dau punctele $A(2,1)$, $B(6,1)$, $C(2,3)$ şi $D(5,5)$. Se cere raportul dintre $S(ABD)$ şi $S(ABC)$.

Cursul 11

Biraportul a patru puncte

Fixăm 3 puncte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}P(1)$ **distincte**! Următorul rezultat este esenţial:

Teorema 11.1 *Există şi este unică omografia* $f = f_{(z_1,z_2,z_3)} \in M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ *aşa încât*:

$$f(z_1) = \infty, \quad f(z_2) = 0, \quad f(z_3) = 1. \tag{11.1}$$

Demonstraţie Este uşor de ghicit expresia funţiei f ce satisface condiţiile (11.1):

$$f(z) = \frac{z - z_2}{z - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \tag{11.2}$$

Trebuie să arătăm că $f \in M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ i.e. $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ cu $\delta := ad - bc \neq 0$. Avem imediat:

$$a = z_3 - z_1 \neq 0, \quad c = z_3 - z_2 \neq 0, \quad b = -z_2 a, \quad d = -z_1 c$$

şi deci:

$$\delta = -z_1 ac + z_2 ac = (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z_3 - z_2) = -\Pi_{circular}(z_2 - z_1) \neq 0. \tag{11.3}$$

Mai remarcăm că δ este exact determinantul Vandermonde:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ z_2^2 - z_1^2 & z_3^2 - z_1^2 \end{vmatrix} = (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z_2 + z_1 & z_3 + z_1 \end{vmatrix}. \tag{11.4}$$

SEMINARUL 11

S11.1 .

Rezolvare .

S11.2 .

Rezolvare .

S11.3 .

Rezolvare .

S11.4 .

Rezolvare

S11.5 .

Rezolvare .

S11.6 .

Rezolvare .

S11.7 .

Rezolvare .

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

T11.1 (problema 3, p. 126) Fie medianele $[AM]$, $[BN]$, $[CP]$ şi G centrul de greutate în ΔABC. Ştiind că: i) $[AG] = 4\ cm$ aflaţi AM; ii) $[GN] = 1,5\ cm$ aflaţi $[BN]$; iii) $[CP] = 5,4\ cm$ aflaţi $[CG]$ şi $[PG]$.

T11.2 (problema 4, p. 126) Se dau $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. Să se arate că medianele $[AM]$ şi $[A'M']$ sunt congruente.

T11.3 (problema 5, p. 126) Se dă ΔABC ascuţitunghic cu mediana $[AM]$. i) Arătaţi că ΔABM şi ΔACM sunt echivalente. ii) Fie punctele $N, P \in [BC]$ a. î. $[BN] = \frac{1}{4}[BC]$ şi $[CP] = \frac{1}{2}[CM]$. Ştiind că $S(ABC) = 96\ cm^2$ aflaţi: $S(ABN)$, $S(ANP$ şi $S(ANC$.

T11.4 (problema 6, p. 127) Fie ΔABC cu $m(\measuredangle C) > 90°$, mediana $[CP]$ şi punctul $P \in (CP)$ oarecare. Arătaţi că $S(ANC) = S(BNC)$.

T11.5 (problema 7, p. 127) În ΔABC avem mediana $[AM]$, $BD \perp AM$ cu $D \in AM$ şi $CE \perp AM$ cu $E \in AM$. Arătaţi că $[BD] \equiv [CE]$.

T11.6 (problema 7a, p. 135) Fie D şi M piciorul înălţimii respectiv medianei din A în ΔABC dreptunghic în A cu $m(\measuredangle DAM) = 60°$. Se cere raportul $\frac{[AD]}{[BC]}$.

T11.7 (problema 9, p. 135) În ΔABC cu mediana AM fie înălţimile $[BE]$ şi $[CF]$. Se cere raportul $\frac{[ME]}{[MF]}$.

T11.8 (problema 7, p. 136) Fie P un punct interior în ΔABC echilateral de latură l. Fie s suma distanţelor de la P la laturi şi m lungimea unei mediane oarecare. Se cere raportul $\frac{s}{m}$.

T11.9 (problema 12, p. 142) În ΔABC dreptunghic în A avem mediana $[AM]$, $[MN]$ înălţime în ΔAMB şi $\{P\} = AM \cap CN$. Arătaţi că BP trece prin mijlocul laturii $[AC]$.

T11.10 (problema 24, p. 131) În ΔABC isoscel de bază $[BC]$ fie mediana $[AM]$ şi punctul $D \in (AM)$ a. î. $[DM] = \frac{1}{3}[AM]$. Arătaţi că: i) $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$; ii) ΔBDC este isoscel; iii) dacă $BD \cap AC = \{N\}$ şi $CD \cap AB = \{P\}$ atunci $[BN]$ şi $[CP]$ sunt mediane.

Cursul 12

Triunghiul isoscel

.

SEMINARUL 12

S12.1 .

Rezolvare .

S12.2 .

Rezolvare .

S12.3 .

Rezolvare .

S12.4 .

Rezolvare .

S12.5 .

Rezolvare .

S12.6 .

Rezolvare .

S12.7 .

Rezolvare .

S12.8 .

Rezolvare .

S12.9 .

Rezolvare .

S12.10 .

Rezolvare .

S12.11 .

Rezolvare .

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

T12.1 (problema 2, p. 128) Fie ΔABC isoscel. Aflaţi: i) perimetrul ştiind că două din laturi au lungimile de 6 cm respectiv 10 cm; ii) lungimile laturilor ştiind că una din ele este de 8 cm şi perimetrul de 26 cm; iii) lungimile laturilor ştiind că raportul a două din ele este $\frac{3}{4}$ iar perimetrul de 55 cm.

T12.2 (problema 3, p. 128) Se dă ΔABC isoscel cu baza $[BC]$. Aflaţi măsurile unghiurilor ştiind că: i) $m(\measuredangle A) = 42°$; ii) $m(\measuredangle C) = 53°$; iii) măsura unui din unghiuri este 65°; iv) măsura unui unghi exterior este 140°; v) măsura unui unghi exterior este 60°.

T12.3 (problema 4, p. 128) Fie ΔABC isoscel cu baza $[BC]$ şi $M \in (BC)$. i) Dacă $m(\measuredangle A) = 70°$, $m(\measuredangle BAM) = 35°$ şi $BM = 3$ cm aflaţi $m(\measuredangle CMA)$ şi $[BC]$; ii) dacă $m(\measuredangle AMB) = 90°$, $m(\measuredangle CAM) = 20°$ şi $[BC] = 7$ cm aflaţi $m(\measuredangle A)$ şi $[BM]$; iii) dacă $[BC] = 8$ cm, $[MC] = 4$ cm şi $m(A) = 84°$ aflaţi $m(\measuredangle AMC)$ şi $m(\measuredangle BAM)$.

T12.4 (problema 5, p. 128) Fie ΔABC isoscel cu baza $[BC]$ şi $M \in (AB)$ a. î. $\frac{[AM]}{[AB]} = \frac{3}{4}$ şi $N \in (AC)$ a. î. $\frac{[NC]}{[AC]} = \frac{1}{4}$. Arătaţi că: i) ΔAMN este isoscel; ii) $MN \parallel BC$.

T12.5 (problema 6, p. 128) În ΔABC cu baza $[AB] \equiv [AC]$ semidreptele $(CD$, $(CE$ şi $(CF$ cu $D, E, F \in (AB$ în această ordine, împart $\measuredangle C$ în 4 unghiuri congruente. Dacă $CF \perp AB$ aflaţi măsurile unghiurilor în ΔABC.

T12.6 (problema 7, p. 128) Fie ΔABC isoscel cu baza $[BC]$ şi $[CD]$ bisectoarea din C. Dacă ΔBCD este isoscel atunci: i) arătaţi că ΔACD este isoscel; ii) aflaţi măsurile unghiurilor în ΔABC; iii) aflaţi perimetrul ΔABC ştiind că $[BD] = x$ şi $[CD] = y$.

T12.7 (problema 8, p. 129) Fie ΔABC isoscel cu baza $[BC]$ obtunzunghic şi punctul $P \in (BC)$ a. î. $[BP] \equiv [AB]$ şi $[PC] \equiv [PA]$. Aflaţi măsurile unghiurilor în ΔABC.

T12.8 (problema 9, p. 129) În ΔABC isoscel cu baza $[BC]$ fie $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ a. î. $\measuredangle ANB = \measuredangle AMC$ şi $\{P\} = BN \cap CM$. Arătaţi că: i) ΔAMN este isoscel; ii) ΔPBC este isoscel; iii) $(AP$ este bisectoarea lui $\measuredangle A$.

T12.9 (problema 10, p. 129) În ΔABC fie $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ şi $\{P\} = BN \cap CM$ a. î. $[PN] \equiv [PM]$ şi $[BP] \equiv [CP]$. Arătaţi că ΔABC este isoscel.

T12.10 (problema 11, p. 129) Fie ΔABC isoscel cu baza $[BC]$. Fie $M \in (CB$ şi $N \in (BC$ a. î. $[BM] \equiv [CN]$. Arătaţi că: i) $\Delta ACM \equiv \Delta ABN$; ii) ΔAMN este isoscel.

Cursul 13

Triunghiul echilateral

SEMINAR 13

S13.1 .

Rezolvare .

S13.2 .

Rezolvare .

S13.3 .

Rezolvare .

S13.4 .

Rezolvare .

S13.5 .

Rezolvare .

S13.6 .

Rezolvare .

S13.7 .

Rezolvare .

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Diaconu, *Matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2008.

T13.1 (problema 1, p. 131) Fie ΔABC echilateral, $[AD]$ mediană, $[BE]$ înălţime şi $[CF]$ bisectoare. Arťaţi că: i) $[AE] \equiv [CE]$; ii) $\measuredangle BAD \equiv \measuredangle CAD$; iii) $m(\measuredangle AFC) = 90°$; iv) ΔAFE este echilateral; v) ΔDEF este echilateral.

T13.2 (problema 2, p. 131) În ΔABC echilateral fie $M \in (AB)$ şi $N \in (BC)$ a. î. $\frac{[AM]}{[AB]} = \frac{2}{5}$ şi $\frac{[BN]}{[BC]} = \frac{3}{5}$. Arătaţi că: i) ΔBMN este echilateral; ii) $MN \parallel AC$.

T13.3 (problema 3, p. 131) În ΔABC echilateral fie $M \in (AB)$, $N \in (BC)$ şi $P \in (CA)$ a. î. $\frac{[AM]}{[AB]} = \frac{[BN]}{[BC]} = \frac{[CP]}{[CA]} = \frac{1}{3}$. Arătaţi că ΔMNP este echilateral.

T13.4 (problema 4, p. 131) Fie ΔABC echilateral.Prin A ducem o paralelă la BC iar prin C o paralelă la AB ce se intersectează în D. Arătaţi că: i) ΔACD este echilateral; ii) $BD \perp AC$.

T13.5 (problema 5, p. 131) Fie ΔABC echilateral. Perpendiculara în A pe AC intersectează BC în D iar perpendiculara în A pe AB intersectează BC în E. i) Arătaţi că ΔADE este isoscel; ii) Aflaţi măsurile unghiurilor în ΔADE.

T13.6 (probelma 6, p. 131) În ΔABC echilaterla fie mediana $[AM]$ şi bisectoarea $[BE]$. Arťaţi că: i) ΔCME este echilateral; ii) $ME \parallel AB$; iii) ΔBEM este isoscel.

T13.7 (problema 7, p. 132) În ΔABC echialteral avem bisectoarele $[AD]$, BE, $[CF]$ şi I centrul cercului înscris. Arătaţi că: i) $[ID] \equiv [IE] \equiv [IF]$; ii) ΔDEF este echilateral; iii) $(DI$, $(EI$, $(FI$ sunt bisectoarele în ΔDEF.

T13.8 (problema 8, p. 132) În ΔABC avem bisectoarea $[AD]$, mediana $[BE]$ şi $F \in (BE$ a. î. $[EF] \equiv [BE]$. Arătaţi că: i) ΔBCF este isoscel; ii) ΔABF este isoscel; iii) ΔACF este echilateral; iv) $m(\measuredangle DAF) = 90°$.

T13.9 (problema 9, p. 132) În ΔABC fie medianele $[CM]$, $[BN]$ şi $P \in (MN$ a. î. $[NP] \equiv [MN]$. Arătaţi că: i) ΔAMN este echilateral; ii) ΔNPC este echilateral; iii) $AP \perp PC$.

T13.10 (problema 10, p. 132) În ΔABC fie mediana $[AD]$. Perpendiculara în A pe AB intersectează bisectoarea $[BE]$ în F. Fie $\{M\} = AD \cap BE$. Arătaţi că: i) ΔAMB este isoscel; ii) ΔAFC este isoscel; iii) ΔAMF este echilateral.

Cursul 14

Caracteristica Euler

Ştim că în plan există o infinitate de poligoane regulate. Fie X un astfel de poligon regulat având n laturi şi n vârfuri. Notăm cu V numărul de vârfuri şi cu M numărul de laturi=muchii. Rezultă că avem:

$$\chi(X) := V - M = 0 \tag{14.1}$$

şi deci $\chi(\cdot)$ este *un invariant* al poligoanelor regulate.

Să considerăm cazul spaţial deci $\mathbb{R}^3$. Teetet din "Academia" lui Platon (428-347 î. H.) a stabilit în 387 î. H. că *sunt numai* 5 poliedre regulate! O demonstraţie a acestui rezultat apare în ultima carte, a XIII-a, a "Elemente"-lor lui Euclid (330-275 î. H.).

Fie X un astfel de poliedru regulat şi: V numărul de vârfuri, M numărul de feţe, F numărul de feţe. Ca în cazul plan considerăm:

$$\chi(X) := V - M + F. \tag{14.2}$$

Avem următorul tabel:

X	interpretare filozofică	V	M	F	χ
tetraedrul	focul	4	6	4	2
cubul (hexaedrul)	pământul	8	12	6	2
octaedrul	aerul	6	12	8	2
icosaedrul	apa	20	30	12	2
dodecaedrul	eterul=chintesenţa	12	30	20	2

. (14.3)

Să mai notăm că în dodecaedru se pot înscrie celelalte 4 poliedre regulate şi că "chintesenţa" era simbolul Universului.

Tabelul precedent ne dă *relaţia Euler* datată 1752; Euler a trăit în perioada 1707-1783:

$$\chi(X) = 2 \tag{14.4}$$

ceea ce spune că $\chi(\cdot)$ este *un invariant* al poliedrelor regulate!

Semnificaţia acestui invariant va apare în cadrul *topologiei.* Să notăm că prima carte de topologie din lume va apare cu titlu "Worstudien zur Topologie" (Studii preliminare în topologie), scrisă de J. B. Listing şi va apare în 1847 în colecţia "Göttingen Studien". Modelul bibliotecii din Göttingen stă la baza înfiinţări Seminarului Matematic din Iaşi de către Alexandru Myller în toamna lui 1910. Profesorul Myller a fost student al lui David Hilbert: 1862 (Königsberg)-1943 (Göttingen).

Cel care va releva şi generaliza invariantul χ va fi genialul Henri Poincaré (1854-1912) sub următoarea versiune topologico-combinatorie:

$$\chi_{top}(X) := \sum_{i=0}^{dim\ X} (-1)^i \alpha_i \tag{14.5}$$

unde α_i este numărul de i-simplexe dintr-o triangulare (oarecare) a spaţiului topologic X=varietate diferenţială reală de dimensiune $dim\ X$. De aceea, în literatura matematică χ apare cu denumirea de *caracteristica Euler-Poincaré*.

Exemplu 14.1 Sfera n-dimensională $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ are $dim\ X = n$. Avem un 0-simplex Δ_0 dat de polul Nord $\{N\}$ şi din proiecţia stereografică din N mai avem doar (!) un n-simplex Δ_n dat de $S^n \setminus \{N\} \sim \mathbb{R}^n$. Deci:

$$\chi(S^n) = (-1)^0 1 + (-1)^n 1 = 1 + (-1)^n. \tag{14.6}$$

În particular, la $n = 1$ avem $\chi(S^1) = 0$ şi cercul S^1 este homeomorf cu pătratul centrat în origine, reobţinem $\chi = 0$ al poligoanelor regulate din plan. Pentru $n = 2$ avem $\chi(S^2) = 2$ şi sfera S^2 este homeomorfă cu cubul (şi tetraedrul); reobţinem $\chi = 2$ al poliedrelor regulate. $\square$

Există şi o variantă topologico-algebrică a caracteristicii Euler introdusă de Betti, profesor la Universitatea din Pisa şi prieten cu Riemann în ultimii ani de viaţă ai acestuia din urmă:

$$\chi_{alg} = \sum_{i=0}^{dim\ X} (-1)^i \beta_i \tag{14.7}$$

unde β_i este *numărul Betti de ordinul* i adică $dim H_i(X)$, cu $H_i(X)$=grupul de i-omologie al lui X.

Exemplul 14.2 Reluând cazul lui S^n avem:

$$H_0(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z}, \quad H_i(S^n) = 0, \quad 1 \leq i \leq n \tag{14.8}$$

ceea ce conduce la rezultatul: $\chi_{alg}(S^n) = 1 + (-1)^n$. $\square$

Rezultatul remarcabil al acestui teorii este egalitatea aşteptată:

$$\chi_{top} = \chi_{alg}. \tag{14.9}$$

SEMINARUL 14: Cercul

S14.1 .

Rezolvare .

S14.2 .

Rezolvare .

S14.3 .

Rezolvare

S14.4 .

Rezolvare

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Temă individuală !

Traian Cohal, *Probleme de matematică pentru clasa a VII-a*, Ed. Pim, Iaşi, 2006.

T14.1 (problema 1, p. 187) Se dă $\mathcal{C}(O, r = 7\ cm)$ şi punctele A, B, C, D şi E a. î. $OA = 5\ cm$, $OB = 4\sqrt{3}\ cm$, $OC = 7\ cm$, $OD = 5\sqrt{2}\ cm$ şi $OE = 7,5\ cm$. Se cere poziţia acestor puncte în raport cu $\mathcal{C}$.

T14.2 (problema 2, p. 187) În $\mathcal{C}(O, r = 10\ cm)$ se dau coardele $[AB]$ şi $[CD]$ a. î. $d(O, AB) = 6\ cm$ şi $d(O, CD) = 8\ cm$. Aflaţi lungimea acestor coarde.

T14.3 (problema 3, p. 187) Fie A, B, C, D şi E puncte distincte pe $\mathcal{C}(O, r)$. Să se arate cdacă $[AB] \equiv [AC]$ şi $[AD] \equiv [AE]$ atunci $BC \parallel DE$.

T14.4 (problema 4, p. 187) Prin extremităţile diametrului unui cerc dat se duc două coarde paralele. Să se arate că aceste coarde sunt congruente.

T14.5 (problema 5, p. 188) În $\mathcal{C}(O, r)$ se dă punctul M interior şi coardele congruente $[AB]$, $[CD]$ ce conţin pe M. Fie E mijlocul lui $[AB]$ şi F mijlocul lui $[CD]$. Să se arate că $EF \perp OM$.

T14.6 (problema 6, p. 188) Fie $[AB]$ diametru în $\mathcal{C}(O, r)$ şi punctele C, D pe cerc situate de aceeaşi parte a dreptei AB. Fie E proiecţia lui A pe $[CD]$ şi F proiecţia lui B pe CD. Să se arate că $[CE] \equiv [DF]$.

T14.7 (problema 7, p. 188) Fie G un punct interior lui $\mathcal{C}(O, r)$. Să se arate că există un triunghi înscris în $\mathcal{C}$ pentru care G este centru de greutate.

T14.8 (problema 8, p. 188) Fie ΔABC şi $\mathcal{C}(O, r)$ ce intersectează (AB) în D şi E, (BC) în F şi G, (BC) în K şi L. Să se arate că dacă au loc două dintre congruenţele $[AD] \equiv [BE]$, $[BF] \equiv [CG]$, $[CK] \equiv [AL]$ atunci O coincide cu centrul cercului circumscris lui ΔABC.

T14.9 (problema 9, p. 189) Fie ΔABC ascuţitunghic şi neisoscel cu $m(\measuredangle C) = 45°$. Fie $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris, $AE \perp BC$, $BF \perp CA$ cu $E \in BC$, $F \in CA$, M mijlocul lui $[BC]$, N mijlocul lui $[CA]$ şi $\{O'\} = EN \cap FM$. Să se arate că: i) $O = O'$, ii) $[EF] = R$.

T14.10 (problema 10, p. 189) Două coarde în $\mathcal{C}(O, r)$ congruente şi perpendiculare se împart prin punctul lor de intersecţie în segmente de lungime 2 cm şi 14 cm. Aflaţi r.

Bibliografie

[1] Constantinescu O.; Crâşmăreanu M.; Munteanu M.-I., *Elemente de geometrie superioară*, Ed. Matrix-Rom, Bucureşti, 2007.

[2] Crasmareanu, M., *Geometrie diferenţială*, http://www.math.uaic.ro/~mcrasm/depozit/Geo2_BOOK.pdf

[3] D'Angelo John P., *An introduction to complex analysis and geometry*, Pure and Applied Undergraduate Texts, 12, AMS, 2010.

[4] Dorff M. J.; Rolf J. S., *Soap films, differential geometry, and minimal surfaces*, Brilleslyper, Michael A. et al., Explorations in complex analysis. Washington, DC: The Mathematical Association of America (MAA), Classroom Resource Materials, 85-159, 2012. Zbl 1311.53001

[5] Manuale de Matematică, Gimnaziu şi Liceu, diverse ediţii.

Index