CURSUL 13. GEODEZICE

MIRCEA CRASMAREANU

Fie suprafaţa $S : \bar{r} = \bar{r}(u, v) = \bar{r}(u^1, u^2) = \bar{r}(u^i), (u^i) = (u^1, u^2) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$. Presupunem că S este *regulată* deci în orice punct al său avem *versorul normalei* la S:

$$\bar{N} = \frac{\bar{r}_1 \times \bar{r}_2}{\|\bar{r}_1 \times \bar{r}_2\|}$$

cu $\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}$. Deci în orice punct al lui S avem *reperul Gauss* $\{P(\bar{r}) : \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{N}\}$. Reamintim *formulele Gauss*:

$$\bar{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\bar{r}_k + b_{ij}\bar{N} \tag{fG}$$

unde $b = (b_{ij})$ este *forma a doua fundamentală* iar Γ sunt *simbolii Christoffel*:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{ka}\left(\frac{\partial g_{aj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ia}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^a}\right).$$

Avem că $g = (g_{ij})$ este *forma întîia fundamentală* a lui S iar $g^{-1} = (g^{ij})$ este inversa matricii g.

Fie curba C pe S dată de $C : u^i = u^i(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Deci:

$$C : \bar{r}_C(t) = \bar{r}(u^i(t)), t \in I. \tag{13.1}$$

Definiţia 13.1 Curba C se numeşte *geodezică a lui* S dacă pentru orice $t \in I$ avem:

$$\boxed{\ddot{\bar{r}}_C(t) \parallel \bar{N}(\bar{r}_C(t))} \tag{G}$$

adică în orice punct P al curbei C vectorul acceleraţie $\ddot{\bar{r}}_C(P)$ este perpendicular pe planul tangent T_PS.

Interpretare fizică Rezultă că pentru un "locuitor" al lui S curba C *nu are* acceleraţie; altfel spus o particulă cu traiectoria C se mişcă *cu viteza constantă* de-a lungul lui C pe S.

Reamintim şi Legea a II-a a dinamicii newtoniene: Forţa = masa înmulţotă cu acceleraţia, $\bar{F} = m\bar{a}$. Deci $\bar{a} = 0$ este echivalent cu absenţa forţei. În concluzie, un punct material în mişcare liberă (fără forţe) sau acţionat de o forţă perpendiculară mereu pe S are ca traiectorie o geodezică a lui S.

Observaţia 13.2 Dacă S conţine dreapta d atunci, cum $\ddot{\bar{r}}$ este nul pentru o dreaptă, rezultă că d este geodezică pe S.

Să deducem ecuaţiile geodezicelor. Din (13.1) avem:

$$\dot{\bar{r}}_C(t) = \bar{r}_i(u^j(t))\dot{u}^i(t), \tag{13.2}$$

$$\ddot{\bar{r}}_C(t) = \bar{r}_{ij}(u^a(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) + \bar{r}_k(u^a(t))\ddot{u}^k(t). \tag{13.3}$$

Date: January 6, 2011.

Introducând ecuaţiile Gauss în (13.3) avem:

$$\ddot{\bar{r}}_C(t) = (\ddot{u}^k(t) + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t))\bar{r}_k(u^a(t)) + b_{ij}\bar{N} \tag{13.3}$$

şi deci avem:

Teorema 13.3 *Sistemul diferenţial al geodezicelor este:*

$$\boxed{\ddot{u}^k(t) + \Gamma^k_{ij}(u^a(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) = 0} \tag{SG}$$

sau încă:

$$\begin{cases} \ddot{u}^1(t) + \Gamma^1_{ij}(u^a(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) = 0 \\ \ddot{u}^2(t) + \Gamma^2_{ij}(u^a(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) = 0. \end{cases} \tag{13.4}$$

Consecinţe remarcabile 13.4
1. Din expresia simbolilor Christoffel rezultă că teoria geoedezicelor aparţine geometriei intrinseci a lui S adică a acelei geometrii a lui S ce depinde doar de prima formă fundamentală. Altfel spus, geodezicele sunt obiecte intrinseci ale lui S.
2. Sistemul (SG) este neliniar deci rezolvarea lui explicită este foarte dificilă sau chiar imposibilă.
3. Ştim de la Cursul de Ecuaţii Diferenţiale că problema Cauchy are soluţie unică. Avem deci:

Teorema 13.5 *Fie punctul $P_0(u^i_0) \in S$ fixat şi vectorul tangent $V \in T_{P_0}S$ cu $\|V\| = 1$. Atunci există $\varepsilon = \varepsilon(P_0, V) > 0$ şi o unică geodezică C, $\bar{r}_C : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ parametrizată canonic şi satisfăcând datelor iniţiale*:
1) $C(0) = P_0$,
2) $\dot{\bar{r}}_C(0) = V$.

Să studiem simbolii Christoffel. Ei sunt în număr de $2^3 = 8$ dar avem o simetrie ce reduce numărul lor. Astfel, din simetria $g_{ij} = g_{ji}$ a formei I-a fundamentale rezultă:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \tag{13.5}$$

ceea ce reduce numărul lor la 6 esenţiali: $\Gamma^1_{ij}, \Gamma^2_{ij}$ cu $(i,j) \in \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$.

Exemplul 13.6 (**Planul**) Ştim că dreptele din plan, parametrizate constant (!), sunt geodezice. În fapt, acestea sunt toate. În adevăr, putem considera planul ca fiind xOy deci $\bar{r}(u^i) = (u^1, u^2, 0), (u^i) \in U = \mathbb{R}^2$. Avem atunci $g_{ij} = \delta_{ij}$ şi deci $\Gamma = 0$. Sistemul geodezicelor devine $\ddot{u}^i = 0$ cu soluţia unică $u^i(s) = u^i_0 + sv^i_0$. Acestea sunt dreptele ce trec prin $P_0(u^1_0, u^2_0)$ şi au versorul director $V = (v^1_0, v^2_0)$.

Un rezultat foarte important, ce apare ca rescriere a Interpretării fizice, este:

Teorema 13.7 *Dacă $C : \bar{r} = \bar{r}_C(t), t \in I \subset \mathbb{R}$ este o geodezică pe S atunci funcţia $t \in I \to \|\dot{\bar{r}}_C(t)\| \in \mathbb{R}$ este constantă.*

Demonstraţie $\frac{d}{dt}\|\dot{\bar{r}}_C(t)\|^2 = 2 < \ddot{\bar{r}}_C(t), \dot{\bar{r}}_C(t) >= 0$ deoarece $\ddot{\bar{r}}_C(t) \perp \dot{\bar{r}}_C(t)$. □

Corolarul 13.8 *Fie C geodezica $\bar{r}_C : (a,b) \in \mathbb{R} \to S$.*
1. *Fie $\varphi : (d,e) \to (a,b)$ o aplicaţie netedă (C^∞). Atunci $\varphi \circ C$ este geodezică dacă şi numai dacă există numerele reale m, n aşa încât $\varphi(t) = mt + n$. Deci singurele reparametrizări ce invariază caracterul de geodezică sunt cele afine* !
2. *Presupunem că aplicaţia $\bar{r}_C$ este difeomorfism de la (a,b) la $C(a,b) \subset \mathbb{R}^3$. Fie $\tilde{C} : (d,e) \to$*

S cu $\tilde{C}(d,e) \subset C(a,b)$. Atunci $\tilde{C}$ este geodezică dacă şi numai dacă funcţia $t \in (d,e) \to \|\dot{\tilde{C}}(t)\|$ este constantă.

Natura variaţională a geodezicelor Pe S avem (u^i) coordonatele unui punct iar un vector tangent oarecare are coordonatele (v^i). Mulţimea $TS = \cup_{P\in S} T_P S$ se numeşte *fibratul tangent al lui S* şi un element al său are coordonatele (u^i, v^i). O funcţie $L : TS \to \mathbb{R}$ se numeşte *Lagrangian* dacă este netedă admiţând că ştim faptul că pe TS se poate face uin calcul diferenţial analog celui de pe S, variind doar dimensiunea: $dimS = 2$, $dimTS = 4$. Unui Lagrangian i se asociaza *ecuaţiile Euler-Lagrange*:

$$\boxed{E_i(L) := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial u^i} = 0}. \tag{EL}$$

Rezultatul fundamental al acestei teorii este faptul că geodezicele sunt soluţiile sistemului Euler-Lagrange pentru Lagrangianul *Energie* al metricii g:

$$E(g) = \frac{1}{2} g_{ij}(u^a) v^i v^j \tag{Eg}$$

iar în (EL) vom considera $v^i = \dot{u}^i$.

Exemplul 13.9 (**Semiplanul superior**) Modelul Poincaré al *geometriei hiperbolice* are ca suport următoarea varietate 2-dimensională (care nu se poate realiza ca suprafaţă) $H^2 = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : u^2 > 0\}$ înzestrată cu metrica:

$$g_h = \frac{1}{(u^2)^2}\left[(du^1)^2 + (du^2)^2\right]. \tag{13.6}$$

Energia acestei metrici este deci:

$$E(g_h) = \frac{1}{2(u^2)^2}[(v^1)^2 + (v^2)^2] \tag{13.7}$$

cu ecuaţiile Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} E_1(E(g_h)) = \frac{d}{dt}[\frac{v^1}{(u^2)^2}] = 0 \\ E_2(E(g_h)) = \frac{d}{dt}[\frac{v^2}{(u^2)^2}] - \frac{-1}{(u^2)^3}[(v^1)^2 + (v^2)^2] = 0. \end{cases} \tag{13.8}$$

Din prima ecuaţie avem integrala primă:

$$\dot{u}^1 = C_1 (u^2)^2 \tag{13.9}$$

cu C_1 număr real arbitrar. În ecuaţia a doua după efectuarea derivării şi eliminarea numitorului comun $(u^2)^3$ avem:

$$\ddot{u}^2 u^2 - 2(\dot{u}^2)^2 + C_1^2 (u^2)^4 + (\dot{u}^2)^2 = 0 \tag{13.10}$$

adică:

$$\ddot{u}^2 u^2 - (\dot{u}^2)^2 + C_1^2 (u^2)^4 = 0 \tag{13.11}$$

Împărţim prin $(u^2)^2$:

$$\frac{\ddot{u}^2 u^2 - (\dot{u})^2}{(u^2)^2} + C_1^2 (u^2)^2 = 0 \tag{13.12}$$

echivalent:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{u}^2}{u^2}\right) + C_1 \dot{u}^1 = 0 \tag{13.13}$$

care se integrează:

$$\frac{\dot{u}^2}{u^2} + C_1 u^1 = C_2. \tag{13.14}$$

Înmulţim ultima ecuaţie cu $(u^2)^2$:

$$\dot{u}^2 u^2 + C_1 u^1 (u^2)^2 = C_2 (u^2)^2. \tag{13.13}$$

Vom scoate $(u^2)^2$ din integrala primă (13.9) şi aici discuţia se împarte în două cazuri:
a) $C_1 = 0$; rezultă din (13.9) că $\dot{u}^1 = 0$, deci $u^1 = constant = u^1_0$ sunt geodezice. Acestea sunt drepte perpendiculare pe axa Ox.
b) $C_1 \neq 0$. Revenind la (13.13) avem:

$$u^2\dot{u}^2 + u^1\dot{u}^1 = \frac{C_2}{C_1}\dot{u}^1 \tag{13.14}$$

adică:

$$u^2\dot{u}^2 + \dot{u}^1(u^1 - u^1_0) = 0 \tag{13.15}$$

unde $u^1_0 = \frac{C_2}{C_1}$. Ultima ecuaţie se integrează:

$$(u^2)^2 + (u^1 - u^1_0)^2 = C_3 \tag{13.16}$$

care este un cerc cu centrul pe axa Ox în $x_0 = u^1_0$.

În concluzie, *toate geodezicele* lui (H^2, g_h) sunt:
1) semidrepte perpendiculare pe Ox situate în semiplanul superior,
2) semicercuri cu centrul pe Ox situate în semiplanul superior.

Exemplul 13.10 (**Suprafeţe de rotaţie**). Fie S o suprafaţă de rotţaţie având pe Oz ca axă de rotaţie. Deci curba meridian este $C_m : \bar{r}(u) = (\varphi(u), \psi(u))$ în planul xOz. Reamintim forma I-a fundamentală:

$$g = [(\varphi')^2 + (\psi')^2](du)^2 + \varphi^2(dv)^2. \tag{13.17}$$

Vom presupune că C_m este parametrizată canonic; deci $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$. Energia acestei metrici este:

$$E(g) = \frac{1}{2}[(v^1)^2 + \varphi^2(u^1)(v^2)^2] \tag{13.18}$$

cu ecuaţiile Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} E_1(E(g)) = \frac{d}{dt}[v^1] - \varphi(u^1)\varphi'(u^1)(v^2)^2 = 0 \\ E_2(E(g)) = \frac{d}{dt}[\varphi^2(u^1)v^2] = 0. \end{cases} \tag{13.19}$$

Din a doua ecuaţie obţinem *integrala primă Clairaut*:

$$\varphi^2(u^1)\dot{u}^2 = constant. \tag{13.20}$$

Exemplul 13.11 (**Cilindrul circular drept**) Avem $\varphi = constant = R$, $\psi(u) = u$. Se verifică imediat faptul că C_m este parametrizată canonic. Avem integrala primă Clairaut $R^2\dot{u}^2 = constant$, deci $\dot{u}^2 = constant = a_2$ şi deci putem integra $u^2 = a_2 t + b_2$. Cum $\varphi' = 0$ prima ecuaţie (13.19) se reduce la $\ddot{u}^1 = 0$ care se integrează complet: $u^1 = a_1 t + b_1$. În concluzie , geodezicele cilindrului sunt:

$$C : \bar{r}(t) = (R\cos(a_1 t + b_1), R\sin(a_1 t + b_1), a_2 t + b_2). \tag{13.21}$$

References

[1]

M. C.
Faculty of Mathematics
University "Al. I. Cuza"
Iaşi, 700506
România
mcrasm@uaic.ro
http://www.math.uaic.ro/∼mcrasm