Grupul ortogonal

Mircea Crasmareanu

Facultatea de Matematică
Universitatea "Al. I. Cuza"
Iaşi, 700506
România
mcrasm@uaic.ro

http://www.math.uaic.ro/∼mcrasm

Curs de Perfecţionare 2007
9 Figuri

Abstract

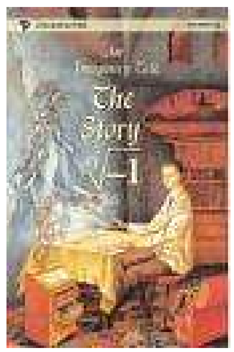
However varied may be the imagination of man, nature is still thousand times richer.

H. Poincaré

Paginile care urmează sunt rodul unor întrebări. Deşi întrebările au un caracter general, în sensul că şi le poate pune orice profesor de matematică (sau om de ştiinţa, sau şi mai general, orice om) răspunsurile sunt particulare, pentru că în matematică (sau, cum spuneam în ştiinţă) nu există dictatură! Astfe, rândurile următoare sunt o invitaţie la căutare, la gustare din bucuriile acestei lumi, atât cât au fost ele găsite de autor. În mod sigur, sunt mult, mult mai multe!

Şi iată deci un hăţiş al întrebărilor, puse de autor sieşi de-a lungul timpului:

1) La pagina xi din [3]



Ediţia engleză a cărţii citate ()

apare citată o legendă a anilor '20 ai secolului trecut precum că *există doar doisprezece oameni în lume care îl pot înţelege cu adevărat pe Einstein.* Cel ce scrie aici predă geometria euclidiană, un subiect cu adevărat înţeles de mult mai mulţi. Dar oare sunt printre aceşti *preafericiţi* sau am doar o viziune exterioară, înşelătoare asupra acestei teorii? Revenind la cartea citată, abia acum reuşesc, având şi un model de comparat, să apreciez la justa valoare, cărţile Floricăi T. Câmpan de istorie a lui i şi a altor numere celebre.

2) Pe coperta a IV-a a cărţii [5] este următoarea povestioară: ”Cinci orbi au pipăit un elefant şi li s-a cerut să-l descrie. Cel ce i-a atins un picior a spus că-i un stâlp, cel ce i-a atins burta a spus că-i un tavan, cel ce i-a pipăit o latura a spus că-i un zid, cel ce i-a atins urechea a spus că-i un evantai, iar cel ce i-a atins trompa a spus că-i un şarpe uriaş.” Asemeni autorului respectivei cărţi, mă întreb şi eu: care dintre *orbi* sunt, relativ la elefantul numit *geometrie euclidiană*?

Note de curs

Fixăm numărul natural nenul n şi $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale. Considerăm produsul cartezian a n factori $\mathbb{R}$ i.e. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ cu elemente de forma $x = (x^1, \ldots, x^n), \quad x^i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$.

Definiţia 1 Operaţii pe $\mathbb{R}^n$:
$\cdot$ *adunarea* $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x + y = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$ dacă $x = (x^1, \ldots, x^n), y = (y^1, \ldots, y^n)$.
$\cdot$ *înmulţirea cu scalari*: $\cdot_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \lambda x = (\lambda x^1, \ldots, \lambda x^n)$ pentru $\lambda \in \mathbb{R}$.
Elementele $x, y \in \mathbb{R}^n$ pentru care există scalarul λ a.î. $y = \lambda x$ se numesc *coliniare*. Dacă $\lambda > 0$ spunem că x, y sunt *la fel orientaţi* iar dacă $\lambda < 0$ spunem că x, y sunt *contrar orientaţi*.

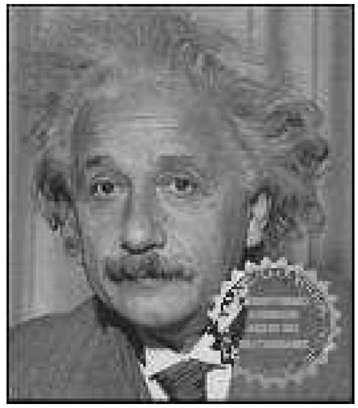
Propoziţia 2 $(\mathbb{R}^n, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ *este spaţiu vectorial* (sau *liniar*) *real.*

Demonstraţie Se verifică imediat axiomele:
SV1) $(\mathbb{R}^n, +)$ este grup abelian cu elementul neutru $\overline{0} = (0, \ldots, 0)$ numit *vectorul nul.*
SV2) *distributivităţi generalizate*:
SV2.1) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
SV2.2) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
SV2.3) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
SV2.4) $1 \cdot x = x$. $\square$

Observaţia 3 Din acest motiv, elementele lui $\mathbb{R}^n$ le vom numi *vectori* (reali) *n-dimensionali* iar $\mathbb{R}^n$ îl numim *spaţiul aritmetic n-dimensional.*

Definiţia 4 1) Un set de $k(\leq n)$ vectori $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_k\}$ din $\mathbb{R}^n$ îl numim *liniar independent* dacă relaţia $\lambda^1\overline{e}_1 + \ldots + \lambda^k\overline{e}_k = \overline{0}$ implică $\lambda^1 = \ldots = \lambda^k = 0$.
2) Un set liniar independent de exact n vectori îl numim *bază în* $\mathbb{R}^n$.

Observaţia 5 Pentru simplificarea scrierii relaţiilor de tipul precedent vom utiliza *regula Einstein*: apariţia unui indice sus şi jos semnifică sumarea expresiei repective după toate valorile acelui indice. Astfel, relaţia din definiţie se poate scrie concentrat: $\lambda^i\overline{e}_i = \overline{0}$.



Albert Einstein (1879 - 1955)

Fixăm baza $B = \{\overline{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ şi vectorul x. Sistemul $\{x, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ având $n+1 > n$ vectori nu este liniar independent şi deci există scalarii $\alpha, \alpha^1, \ldots, \alpha^n$ nu toţi nuli a.î.:

$$\alpha x + \alpha^i \overline{e}_i = \overline{0}.$$

În ultima relaţie nu putem avea $\alpha = 0$. În adevăr, presupunând $\alpha = 0$ ar rezulta $\alpha^i \overline{e}_i = \overline{0}$, ceea ce, cu definiţia liniarei independenţe, ar da că toţi α^i sunt nuli; în concluzie s-ar contrazice cuvintele sublinite anterior. Din neanularea lui α rezultă: $x = -\frac{\alpha^i}{\alpha}\overline{e}_i$ şi deci am obţinut:

Propoziţia 6 *Orice $x \in \mathbb{R}^n$ se descompune în raport cu o bază dată B:*

$$x = x^i \overline{e}_i. \tag{1}$$

Mai mult, scrierea (1) *este unică relativ la B!*

Demonstraţie Trebuie arătată doar ultima parte. Din $x = x^i \overline{e}_i = \overline{x}^i \overline{e}_i$ rezultă $(x^i - \overline{x}^i)\overline{e}_i = \overline{0}$ şi din nou liniara independenţă dă concluzia. $\square$

Definiţia 7 Scalarii $\{x^i\}_{1 \leq i \leq n}$ daţi de descopunerea (1) se numesc *componentele lui x în raport cu baza B*

Exemplul 8 Se arată imediat că $B_c = \{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ cu $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ având 1 **doar** pe locul i este o bază în $\mathbb{R}^n$. B_c o numim *baza canonică* a lui $\mathbb{R}^n$ şi un vector $x \in \mathbb{R}^n$ are drept componente în raport cu B_c exact componentele sale ca vector n-dimensional.

În afară de structura algebrică de $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial, $\mathbb{R}^n$ posedă o structură topologică indusă de o metrică ce provine dintr-un produs scalar.

Definiţia 9

1) Aplicaţia $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$< x, y >= x^1 y^1 + \ldots + x^n y^n \tag{2}$$

se numeşte *produsul scalar euclidian* pe $\mathbb{R}^n$. Avem:

$$< x, x >= (\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Perechea $(\mathbb{R}^n, <,>)$ o numim *spaţiul vectorial euclidian n-dimensional canonic*. Doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^n$ îi numim *ortogonali* (sau *perpendiculari*), şi notăm $x \perp y$, dacă:

$$< x, y >= 0. \tag{4}$$

Exemplu remarcabil în 2D: Dacă $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ atunci $x^{\perp} = (-b, a)$ este perpendicular pe x. Această alegere (deoarece şi $-x^{\perp}$ este perpendicular pe x) este în acord cu sensul trigonometric (care este antiorar!): $i^{\perp} = (-1, 0)$.

2) Aplicaţia $\|,\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \|x\| = \sqrt{< x, x >}$ o numim *norma euclidiană* pe $\mathbb{R}^n$. Obţinem:

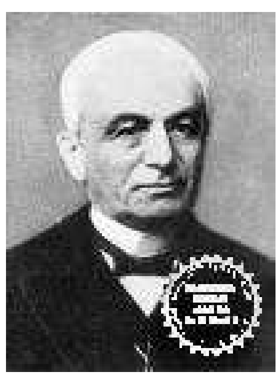
$$\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}. \tag{5}$$

Vectorul $x \in \mathbb{R}^n$ pentru care $\|x\| = 1$ se numeşte *versor*.

3) Baza $B = \{\overline{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ o numim *ortonormată* dacă este formată din versori ortogonali doi câte doi i.e.:

$$< \overline{e}_i, \overline{e}_j >= \delta_{ij} \tag{6}$$

unde δ este *simbolul lui Kronecker* adică 1 dacă $i = j$ şi 0 dacă $i \neq j$.



Leopold Kronecker (7.12.1823 - 29.12.1891)

Observaţia 10

1) Avem noţiunile generale de produs scalar şi normă:
i) Numim *produs scalar* pe spaţiul vectorial <u>real</u> V o aplicaţie $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:
PS1) *pozitiva definire*: $< x, x > \geq 0,\ \forall x \in V;\ < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0_V$,
PS2) *simetria*: $< x, y >=< y, x >$,
PS3) *biliniaritatea*: $< \lambda x + \mu y, z >= \lambda < x, z > +\mu < y, z >$.
Perechea $(V, <,>)$ o numim *spaţiu vectorial euclidian.*
(ii) Numim *normă* pe spaţiul vectorial V o aplicaţie $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:
N1) (pozitiva definire) $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in V;\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$=vectorul nul din V,
N2) (pozitiva omogenitate) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
N3) (inegalitatea triunghiului) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Perechea $(V, \| \cdot \|)$ o numim *spaţiu vectorial normat.*
(iii) O inegalitate ce leagă noţiunile de produs scalar şi normă este:

$$| < u, v > | \leq \|u\|\|v\| \tag{7}$$

numită *forma geometrică a inegalităţii CBS* (Cauchy-Buniakovski-Schwartz).

Cauchy (1789 - 1857)

Pe un spaţiu vectorial euclidian putem introduce *unghiul orientat* dintre doi vectori nenuli: dacă $x, y \in (V \setminus \{0_V\}, <,>)$ atunci definim $\theta = \theta(x, y) \in [0, \pi)$ prin:

$$cos\theta = \frac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}. \tag{8}$$

Rezultă inegalitatea $|\cos\theta| \leq 1$ şi caracterizarea cunoscută a ortogonalităţii:

$$x \perp y \Leftrightarrow \theta(x, y) = \frac{\pi}{2}$$

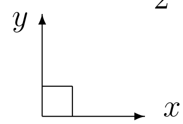


Fig. 1 Vectori ortogonali

2) Orice produs scalar generează o normă;

$$(V, <,>) \to (V, \|\cdot\|)$$

după formula:

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} \tag{9}$$

3) Apelând la (4) obţinem *forma algebrică a inegalităţii CBS*:

$$|\sum_{i=1}^{n} u^i v^i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(u^i\right)^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \left(v^i\right)^2\right). \tag{10}$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $|\cos\theta\,(u, v)\,| = 1$, echivalent vectorii u, v sunt coliniari, echivalent avem proporţionalitatea $\frac{v^1}{u^1} = \ldots = \frac{v^n}{u^n}\,(= \lambda)$.
4) *Identitatea paralelogramului* este specifică normelor generate de un produs scalar: $\forall u, v \in (V, <,>)$ avem:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right). \tag{11}$$

Semnificaţia geometrică (ce dă şi denumirea): *suma pătratelor diagonalelor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor laturilor.*

Demonstraţie Se adună relaţiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u, v > \\ \|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 < u, v > \end{array} \right. . \qquad \square$$

Să mai observăm că prima din relaţiile precedente este exact *teorema Pitagora generalizată* sau *teorema cosinusului*:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \cos\theta\,(u, v) \tag{12}$$

sau încă, alegând $u = \overrightarrow{BA}, v = \overrightarrow{AC}$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos\left(\pi - \widehat{A}\right)$$

deoarece $\measuredangle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = \pi - \widehat{A}$. Literal, avem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}. \tag{13}$$

Evident, pentru triunghiul dreptunghic în A, i.e. $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$, avem teorema Pitagora ce spune că pătratul ipotenuzei (latura ce se opune unghiului drept $\widehat{A}$) este egal cu suma pătratelor catetelor.

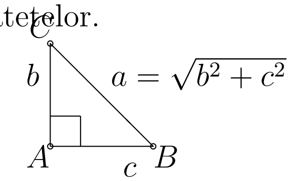


Fig. 2 Teorema Pitagora

Pitagora (c.580 î.Hr. - c.500 î.Hr.)

Deoarece lucrul cu indici poate deveni la un moment dat deosebit de dificil vom utiliza în cele ce urmează calculul matriceal. Astfel, cu schema $x \xrightarrow{B} X_B = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ relaţia (1) se scrie:

$$x = (\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = B \cdot X_B. \tag{14}$$

Produsul scalar se poate scrie:

$$< x, y >= (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} =^t x \cdot y. \tag{15}$$

De asemeni, condiţia de ortonormare pentru baze devine:

$$^tB \cdot B = \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \vdots \\ \overline{e}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{e}_1 & \ldots & \overline{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < \overline{e}_1, \overline{e}_1 > & \ldots & < \overline{e}_1, \overline{e}_n > \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ < \overline{e}_1, \overline{e}_n > & \ldots & < \overline{e}_n, \overline{e}_n > \end{pmatrix} = I_n. \tag{16}$$

Exemplul 11 Baza canonică B_c este ortonormată.

Studiem în continuare problema schimbărilor de baze în $\mathbb{R}^n$. Fie deci $B = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ respectiv $B' = \{\overline{e}'_1, \ldots, \overline{e}'_n\}$ baze (oarecare într-o primă fază!) în V_n. Descompunem vectorul $\overline{e}'_i$ în baza B cu relaţia $\overline{e}'_i = s^j_i \overline{e}_j$ şi obţinem astfel ansamblul $(s^1_i, \ldots, s^n_i)$ asociat vectorului $\overline{e}'_i$. Fie S matricea ce are drept coloane ansamblurile precedente:

$$S = \begin{pmatrix} s^1_1 & & s^1_i & & s^1_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^n_1 & & s^n_i & & s^n_n \\ \boxed{\overline{e}'_1} & & \boxed{\overline{e}'_i} & & \boxed{\overline{e}'_n} \end{pmatrix}$$

este o matrice pătratică de ordin n i.e. $S \in M_n(\mathbb{R})$. Reţinem convenţia de notare a elementelor unei matrici: indicele superior reprezintă linia iar indicele inferior reprezintă coloana! Matricea S o numim *matricea de trecere de la B la B'* şi notăm $B' = S(B)$. Spre exemplu, în unele cărţi aceeaşi matrice se noteză cu C iniţiala cuvântului englez *change*=schimbare.

O altă scriere a relaţiei dintre B şi B', formală dar deosebit de utilă în cele ce urmează, este:

$$B' = B \cdot S \tag{17}$$

în care gândim bazele ca matrici linie de vectori şi scalarii din S, deşi apar în dreapta vectorilor, îi regândim în stânga.

Propoziţia 12 (i) *Dacă $B' = S(B)$ şi $B'' = S'(B')$ atunci $B'' = SS'(B)$.* (ii) *Matricea S este inversabilă şi avem $B = S^{-1}(B')$.*

Demonstraţie (i) Relaţia $B'' = B' \cdot S' = (B \cdot S) \cdot S' = B \cdot (SS')$ dă concluzia.
(ii) Fie $B'' = B$. Aplicând (i) rezultă că matricea de trecere de la B la B este SS' dar evident că aceasta este matricea unitate I_n. Prin urmare S este inversabilă şi S' matricea de trecere de la B' la B este exact S^{-1}. $\square$

Combinarea relaţiilor (13) şi (14) conduce la:

$$^tB' \cdot B' =^t S \cdot (^tBB) \cdot S \tag{18}$$

ceea ce implică următorul rezultat fundamental:

Propoziţia 13 (i) *Dacă B şi B' sunt ortonormate atunci S satisface*:

$$\boxed{^tS \cdot S = I_n}. \tag{19}$$

(ii) *Reciproc, dacă B este ortonormată şi S satisface identitatea precedentă atunci B' este ortonormată.*

Demonstraţie (i) Înlocuim $^tB \cdot B =^t B' \cdot B' = I_n$ în (10).
(ii) În condiţiile ipotezei avem $^tB' \cdot B' = I_n$ ceea ce dă concluzia. $\square$
Suntem astfel conduşi la introducerea:

Definiţia 14 O matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$ o numim *n-ortogonală* dacă:
$^tS \cdot S = I_n$. Notăm cu $O(n)$ mulţimea matricilor n-ortogonale.

Cum inversul unui element într-un monoid, dacă există, este unic, considerând monoidul $(M_n(\mathbb{R}) \setminus \{O_n\}, \cdot)$ avem că o matrice n-ortogonală este caracterizată şi de relaţia $S \cdot^t S = I_n$. Prin urmare avem următorul criteriu complet de recunoaştere a matricilor n-ortogonale:

Propoziţia 15 *Pentru $S \in M_n(\mathbb{R})$ următoarele afirmaţii sunt echivalente*:
(i) $S \in O(n)$,
(ii) $^tS \cdot S = I_n$,
(iii) *coloanele lui S constituie o bază ortonormată în $\mathbb{R}^n$*,
(iv) $S \cdot^t S = I_n$,
(v) *liniile lui S constituie o bază ortonormată în $\mathbb{R}^n$*.

Datorită punctului (ii) din Propoziţia 12 introducem mulţimea:

$$GL(n, K) = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ A \text{ inversabilă}\}. \tag{20}$$

Propoziţia 16 $GL(n,\mathbb{R})$ *este grup relativ la înmulţirea matricilor, ne-abelian pentru* $n \geq 2$.

Demonstraţie i) Dacă $A, B \in GL(n,\mathbb{R})$ atunci $AB \in GL(n,\mathbb{R})$ cu $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Deci înmulţirea este lege internă pe $GL(n,\mathbb{R})$.
ii) Înmulţirea matricilor este asociativă.
iii) Element neutru este matricea identitate I_n şi evident $I_n \in GL(n,\mathbb{R})$ cu $I_n^{-1} = I_n$.
iv) Dacă $S \in GL(n,\mathbb{R})$ atunci există S^{-1} şi evident $S^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$ cu $(S^{-1})^{-1} = S$. $\square$

Definiţia 17 $GL(n,\mathbb{R})$ se numeşte *n-grupul liniar general real*.

Observaţia 18 (i) Rezultatul anterior are loc mai general pentru $GL(n,K)$ cu K un corp oarecare. Avem astfel şi *n-grupul liniar general complex* $GL(n,\mathbb{C})$.
(ii) Spre exemplu, $GL(1,K) = K^*$.

Un rezultat central al acestui curs este următorul:
Propoziţia 19 $O(n)$ *este subgrup în* $GL(n,\mathbb{R})$.

Demonstraţie i) Fie $A, B \in O(n)$. Din:

$$^t(AB)AB =^t B^tAAB =^t BI_nB =^t BB = I_n$$

rezultă că $AB \in O(n)$.
ii) Fie $S \in O(n)$ oarecare. Din:

$$^t(S^{-1})S^{-1} =^t (^tS)^tS = S^tS = I_n$$

(conform punctului (iv) al propoziţiei 15) rezultă că $S^{-1} \in O(n)$. $\square$
Definiţia 20 $O(n)$ se numeşte *n-grupul ortogonal*.

Reamintim două funcţii matriceale remarcabile pe mulţimi de matrici pătratice:

A) Funcţia *determinant* $det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, pe o utilizăm la caracterizarea elementelor lui $GL(n,\mathbb{R})$. Astfel, $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); detA \neq 0\}$.

Proprietăţi:
A1) este invariantă la transpunere: $\det(^tA) = \det A$. Reamintim că o matrice A pentru care $^tA = A$ (respectiv $^tA = -A$) o numim *simetrică* (respectiv *antisimetrică*).
A2) este multiplicativă: $det(AB) = detA \cdot detB$.

Această proprietate spune că restricţia $det|_{GL(n,K)} \to K^*$ este morfism de grupuri multiplicative. Acest morfism este surjectiv dar nu este izomorfism nefind injectiv.

Cum $detI_n = 1$ rezultă:

A3) *det* comută cu luarea inversei: $S \in GL(n,K) \Rightarrow detS^{-1} = (detS)^{-1} = \frac{1}{detS}$.

B) Funcţia *urmă* $Tr : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, TrA = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^i$.

Proprietăţi:

B1) este invariantă la transpunere: $Tr({}^tA) = TrA$.

B2) este operator liniar $Tr(\lambda A + \mu B) = \lambda TrA + \mu TrB$ adică $Tr \in (M_n(\mathbb{R}))^*$=dualul spaţiului vectorial real $M_n(\mathbb{R})$.

B3!) este invariantă la permutări circulare: $Tr(ABC) = Tr(BCA)$.

B4) înlocuind $C = I_n$ în B3) avem: $Tr(AB) = Tr(BA)$.

B5) tot din B3) rezultă că dacă $S \in GL(n,K)$ atunci $Tr(SAS^{-1}) = TrA$.

Teorema 21 *Funcţia* $<,>$: $M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$:

$$< A, B >= \frac{1}{n} Tr({}^tB \cdot A) \tag{21}$$

este un produs scalar pe $M_{m,n}(\mathbb{R})$

Demonstraţie $Tr({}^tA \cdot A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1,mj=1,n} |a_j^i|^2 \geq 0$; $Tr({}^tA \cdot A) = 0 \iff A = O_{m,n}$ = matricea nulă.

$$n < B, A >= Tr({}^tA \cdot B) = Tr({}^t({}^tA \cdot B)) = Tr({}^tB \cdot A) = n < A, B > .$$

Liniaritatea în primul argument rezultă imediat din liniaritatea urmei. □

Definiţia 22 Produsul scalar (21) se numeşte *produsul scalar Hilbert-Schmidt*. Norma indusă o vom numi *norma Hilbert-Schmidt*.

David Hilbert (23.01.1862 - 14.02.1943)

Propoziţia 23 *Produsul scalar Hilbert-Schmidt generalizează produsul scalar euclidian* (când $n = 1$). Din acest motiv folosim aceeaşi notaţie.

Demonstraţie Dacă $n = 1$ avem $x, y \in M_m(\mathbb{R})$ şi $< x, y >= Tr(^t y \cdot x) = ^t y \cdot x$ deoarece $^t y \cdot x$ este un scalar fiindcă $^t y \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ şi $x \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ implică $^t y \cdot x \in M_{1,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Deci produsul scalar Hilbert-Schmidt generalizează produsul scalar euclidian. $\square$

Un rezultat extrem de util este datorat inegalităţii Cauchy-Buniakowski-Schwarz care devine:

Propoziţia 24 *Norma Hilbert-Schmidt este submultiplicativă i.e.:*

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|. \tag{22}$$

Suntem uneori interesaţi în schimbarea locului unei matrici în cadrul produsului scalar:

Propoziţia 25 *Dacă* $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ *atunci*:

$$< A \cdot B, C >=< B,^t A \cdot C >, \tag{23}$$

$$< B \cdot A, C >=< B, C \cdot^t A > . \tag{24}$$

Demonstraţie

$$n < B,^t A \cdot C >= Tr(^t\left(^t AC\right) B) = Tr\left(^t CAB\right) = n < A \cdot B, C >,$$

$$n < B, C \cdot^t A >= Tr(^t\left(^t CA\right) B) = Tr\left(^t ACB\right) = Tr\left(^t CBA\right) = n < B \cdot A, C > .$$

Corolarul 26 *Dacă* $S \in O(n)$ *şi* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *atunci*:

$$\|SAS^{-1}\| = \|A\|. \tag{25}$$

Demonstraţie

$$< SAS^{-1}, SAS^{-1} >=< AS^{-1},^t SSAS^{-1} >=< AS^{-1}, AS^{-1} >=$$

$$=< A, AS^{-1t}\left(S^{-1}\right) >=< A, AS^{-1}S >=< A, A > .$$

Definiţia 27 Matricile $A, B \in M_n(K)$ se numesc *asemenea* (în engleză "similar") dacă există $S \in GL(n, K)$ a.î.:

$$B = SAS^{-1}. \tag{26}$$

Propoziţia 28 *Două matrici asemenea au acelaşi determinant şi aceeaşi urmă. Dacă $S \in O(n)$ atunci au şi aceeaşi normă.*

Fie $S \in O(n)$. Trecând la determinant în relaţia caracteristică ${}^tS \cdot S = I_n$ şi folosind proprietatea A1 obţinem $(detS)^2 = 1$ ceea ce conduce la:

Propoziţia 29 *Dacă $S \in O(n)$ atunci $detS \in \{-1, +1\}$.*

Definiţia 31 Considerăm $O^-(n) = \{S \in O(n); detS = -1\}$ şi $SO(n) = \{S \in O(n); detS = +1\}$.

Propoziţia 32 *$O^-(n)$ nu este parte stabilă la înmulţirea matricilor deci nu este subgrup în $O(n)$.*

Demonstraţie Fie $S_1, S_2 \in O^-(n)$. Atunci $det(S_1S_2) = (-1)(-1) = +1$ deci $S_1S_2 \in SO(n)$. □

Propoziţia 33 *$SO(n)$ este subgrup în $O(n)$.*

Demonstraţie Un calcul imediat arată că $SO(n)$ este parte stabilă la înmulţirea matricilor. Fie $S \in SO(n)$ oarecare. Cum $S^{-1} = S^t$ din proprietatea A1 rezultă că $detS^{-1} = detS = +1$ i.e. $S^{-1} \in SO(n)$. □

Definiţia 34 $SO(n)$ se numeşte *n-grupul ortogonal special*.

Exemplul 35 $O(1) = \{-1, +1\}, O^-(1) = \{-1\}, SO(1) = \{+1\}$.

Definiţia 36 Fie spaţiul vectorial normat $(V, \|\|)$, elementul $x_0 \in V$ şi numărul real $r > 0$. Mulţimea $S(x_0, r) = \{x \in V; \|x - x_0\| = r\}$ o numim *sfera centrată în x_0 de rază r.*

Exemplul 37 *Sfera unitate* este $S^n = \{x \in V; \|x\| = 1\}$. Astfel, *cercul unitate* S^1 este binecunoscutul *cerc trigonometric* $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ al numerelor complexe de modul 1.

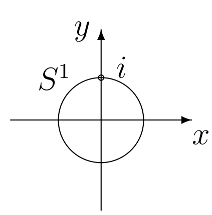


Fig. 3 Cercul unitate

Propoziţia 38 *$O(n)$ este sfera din $M_n(\mathbb{R})$ centrată în origine=matricea nulă, de rază $r=1$ relativ la distanţa indusă de norma Hilbert-Schmidt.*

Demonstraţie Fie $S \in O(n)$ oarecare. Avem: $d(O_n, S) = \|S\| = \sqrt{< S, S >} = \sqrt{\frac{1}{n} Tr(S^t \cdot S)} = \sqrt{\frac{1}{n} Tr I_n} = 1$. $\square$

Încheiem acest curs cu o consecinţă importantă a Propoziţiei 25:

TEOREMĂ: Relaţia fundamentală a geometriei euclidiene *Fie $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ şi $S \in O(n)$. Atunci:*

$$< SA, SB >=< A, B >, \quad < AS, BS >=< A, B > . \tag{27}$$

În particular, dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$ atunci:

$$< Sx, Sy >=< x, y > . \tag{28}$$

Relaţia (27) spune că $O(n)$ invariază produsul scalar euclidian pe $\mathbb{R}^n$.

Cum ortogonalitatea şi norma euclidiană sunt generată de produsul scalar euclidian avem şi:

COROLAR O(n) invariază
i) *ortogonalitatea i.e.* $x \perp y \Leftrightarrow Sx \perp Sy$,
ii) *norma euclidiană pe* $\mathbb{R}^n$ i.e.:

$$\|Sx\| = \|x\|. \tag{29}$$

Mai general, datorită relaţiei (8) avem că $O(n)$ invariază orice unghi.

1 SEMINAR: Grupul ortogonal

S1.1 Fie $GL^+(n,\mathbb{R})$ respectiv $GL^-(n,\mathbb{R})$ mulţimea matricilor cu determinant strict pozitiv repectiv strict negativ. Să se arate că $GL^-(n,\mathbb{R})$ nu este parte stabilă la înmulţire şi că $GL^+(n,\mathbb{R})$ este subgrup în $GL(n,\mathbb{R})$.

Rezolvare Aceleaşi argumente ca la Propoziţiile 32 şi 33.

S1.2 Să se arate că mulţimea $SL(n,\mathbb{R})$ a matricilor de determinant $+1$ este subgrup în $GL^+(n,\mathbb{R})$. Acest grup se numeşte *n-grupul liniar special real*.

Rezolvare Verificărea condiţiilor de subgrup este imediată.
Exemplu: $SL(1,\mathbb{R}) = SO(1) = +1$. Pentru $n \geq 2$ avem $SO(n) \subset SL(n,\mathbb{R})$ după cum o arată exerciţiul **S4**.

S1.3 Utilizând rezultatul precedent şi Propoziţia 19 să se reobţină că $SO(n)$ este subgrup în $O(n)$.

Rezolvare Avem: $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$.

S1.4 Să se arate că matricea:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

este în $SL(2,\mathbb{R})$ dar nu este în $SO(2)$.

Rezolvare Avem $\det S = 1$ şi:

$${}^tSS = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 18 & 25 \end{pmatrix} \neq I_2.$$

S1.5 Să se determine $O(2)$. Interpretare geometrică pentru $SO(2)$.

Rezolvare Reamintim că pentru $A \in O(n)$ coloanele sale sunt versori ortogonali doi câte doi. Un versor în $\mathbb{R}^2$ este de forma $\bar{u} = (cos\varphi, sin\varphi)$ iar un versor ortogonal pe acesta este $\bar{u}^\perp = \pm(-sin\varphi, cos\varphi)$.
Cazul I

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{30}$$

descrie $SO(2)$. Interpretarea geometrică cerută este următoarea: transformarea liniară a lui $\mathbb{R}^2$ de matrice R_φ este *rotaţia de unghi φ în sens trigonometric* (i.e. antiorar) din origine!

Cazul II

$$S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{31}$$

descrie $O^-(2)$.

S1.6 (Interpretare geometrică pentru $O^-(2)$) Fie $d_{\varphi/2}$ dreapta din plan ce trece prin origine şi face unghiul orientat $\varphi/2$ cu axa Ox. Să se arate că simetria axială în raport cu $d_{\varphi/2}$ este transformarea liniară pe $\mathbb{R}^2$ de matrice S_φ. Exemple.

Rezolvare Ecuaţia lui $d_{\varphi/2} : y = tg\frac{\varphi}{2} \cdot x$ se scrie $d_{\varphi/2} : -sin\frac{\varphi}{2} \cdot x + cos\frac{\varphi}{2} \cdot y = 0$ deci această dreaptă are versorul normalei $\bar{N} = (-sin\frac{\varphi}{2}, cos\frac{\varphi}{2})$. Avem formula:

$$\overline{r}_{M''} = \overline{r}_M - \frac{2F_\pi\left(\overline{r}_M\right)}{\|\overline{N}\|^2}\overline{N} \tag{32}$$

ce dă *simetricul* M'' al punctului M faţă de hiperplanul π de normală N, deci de ecuaţie $\pi : F_\pi(\overline{r}) :=< \overline{r}, \overline{N} >= 0$. Prin urmare, simetria axială faţă de dreapta $d = d_{\varphi/2}$ are ecuaţia:

$$S_d(x,y) = (x,y) - 2(sin\frac{\varphi}{2} \cdot x + cos\frac{\varphi}{2} \cdot y)(-sin\frac{\varphi}{2}, cos\frac{\varphi}{2}) =$$

$$= \Big(x(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}) + 2y\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}, 2x\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + y(1 - 2\cos^2\frac{\varphi}{2})\Big) =$$

$$= (x\cos\varphi + y\sin\varphi, x\sin\varphi - y\cos\varphi) = S_\varphi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exemple:

I) $\varphi = 0 \Rightarrow d_{\varphi/2}$ =axa Ox. Avem deci *simetria faţă de* Ox:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_{Ox}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}. \tag{33}$$

În engleză S_0 se numeşte *reflection across x-axis.*

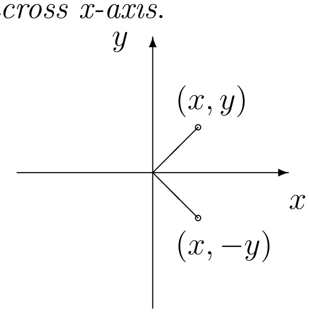


Fig. 4 Simetria faţă de Ox

II) $\varphi = \pi \Rightarrow d_{\varphi/2}$ =axa Oy. Avem deci *simetria faţă de* Oy:

$$S_{\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{Oy}\left(x, y\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}. \qquad (34)$$

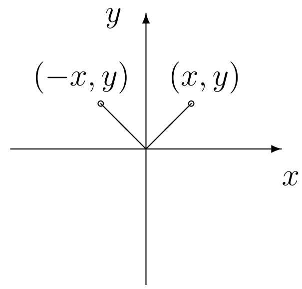


Fig. 5 Simetria faţă de Oy

III) $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d_{\varphi/2}$ =prima bisectoare B_1. Avem deci *simetria faţă de* B_1:

$$S_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{B_1}\left(x, y\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}. \qquad (35)$$

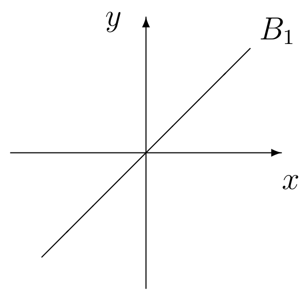


Fig. 6 Prima bisectoare

IV) $\varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow d_{\varphi/2}$ =a doua bisectoare B_2. Avem deci simetria faţă de B_2:

$$S_{\frac{3\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{B_2}\left(x, y\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}. \qquad (36)$$

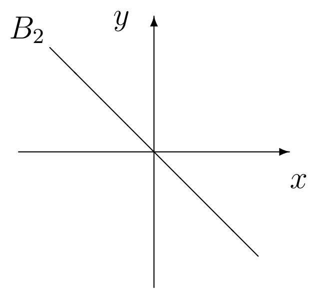


Fig. 7 A doua bisectoare

S1.7 (Compunerea simetriilor axiale în plan) Fie d_1, d_2 drepte în plan prin origine şi α unghiul orientat de la d_1 la d_2. Să se arate că simetria axială faţă de d_1 compusă cu cea faţă de d_2 este rotaţia de unghi α.

Rezolvare Un calcul imediat, folosind identităţi trigonometrice, dă:

$$S_{\varphi_2} \cdot S_{\varphi_1} = R_{\varphi_2 - \varphi_1} = R_\alpha \tag{37}$$

S1.8 Să se arate că:

$$R_{\varphi_1} \cdot R_{\varphi_2} = R_{\varphi_1 + \varphi_2} \tag{38}$$

şi să se interpreteze.

Rezolvare Folosind identităţi trigonometrice relativ la cosinusul şi sinusul sumei de unghiuri avem relaţia cerută.

Interpretare: avem că grupul $SO(2)$ este abelian, rezultat ce nu este valabil pentru $SO(n)$ cu $n \geq 3$.

S1.9 Să se arate că:

$$S_\theta R_\varphi = S_{\theta - \varphi} \tag{39}$$

$$R_\theta S_\varphi = S_{\theta + \varphi}. \tag{40}$$

Rezolvare Se folosesc din nou identităţile trigonometrice uzuale.

S1.10 Fixăm $S \in O^-(n)$. Să se arate că $O^-(n) = \{RS; R \in SO(n)\}$. Trataţi cazul particular $n = 2$.

Rezolvare Fixăm $A \in O^-(n)$; trebuie să rezolvăm ecuaţia $A = RS$ în necunoscuta R. Cum $S \in O^-(n) \subset O(n)$=grup, există $S^{-1} \in O(n)$. Avem deci soluţia unică $R = AS^{-1} \in O(n)$. Din multiplicitatea determinatului rezultă $\det R = (-1)(-1) = +1$ adică $R \in SO(n)$.

Exemplu. Putem lua simetria faţă de primul hiperplan:

$$S = S_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in O^-(n).$$

Caz particular $n = 2$. Fixăm $R = R_\varphi$ şi $S = S_2$ coincide cu S_0 a problemei **S6**. Avem:

$$RS = R_\varphi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S_\varphi$$

reobţinând astfel expresia matricilor din $O^-(2)$.

S1.11 Se cere inversa S_θ^{-1} a simetriei $S_\theta \in O^-(2)$.

Rezolvare Folosind (37) avem:

$$S_\theta S_\theta = R_{\theta-\theta} = R_0 = I_2 \tag{41}$$

şi deci:

$$S_\theta^{-1} = S_\theta. \tag{42}$$

S1.12 Să se arate că singurele rotaţii ce comută cu simetria $S_\varphi \in O^-(2)$ sunt $R_0 = I_2$ şi $R_\pi = -I_2$.

Rezolvare Presupunem $S_\varphi R_\theta = R_\theta S_\varphi$ şi utilizăm (39) şi (40); rezultă $S_{\varphi-\theta} = S_{\theta+\varphi}$. Reamintim că $S_\alpha = S_\beta$ este echivalent cu $\beta \equiv \alpha(mod 2\pi)$ şi deci: $\theta + \varphi = \varphi - \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Rezultă $\theta = k\pi$ dar din $\theta \in [0, 2\pi)$ avem $k \in \{0, 1\}$ ceea ce voiam.

S1.13 Se numeşte *centru* al grupului G mulţimea $Z(G)$ a elementelor lui G ce comută cu toate elementele lui G i.e. $Z(G) = \{x \in G; xy = yx, \forall y \in G\}$. (Spre exemplu, dacă G este abelian atunci $Z(G) = G$.) Folosind problema precedentă se cere centrul lui $O(2)$.

Rezolvare Deoarece $SO(2)$ este abelian avem că $Z(O(2))$ este dat de elementele lui $O(2)$ ce comută cu cele din $O^-(2)$. Datorită rezultatului anterior avem $Z(O(2)) = \{+I_2, -I_2\}$.

Pentru cazul general avem rezultatul următor, [6, p. 144]:

$$Z(SO(2n)) = \{+I_{2n}, -I_{2n}\} \simeq \mathbb{Z}_2 \tag{43}$$

$$Z(SO(2n+1)) = \{I_{2n+1}\} \simeq \textit{grupul trivial} \tag{44}$$

unde $\simeq$ înseamnă izomorfism de grupuri iar $\mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$ este grupul aditiv al claselor de resturi modulo 2.

S1.14 Să se arate că $Z(GL(n,\mathbb{R})) = \{\lambda I_n; \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

Rezolvare Fie $x \in Z(GL(n,\mathbb{R}))$ şi:

$$y_n^1 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n,\mathbb{R}).$$

În matricea produs xy prima coloană este -prima coloană din x iar în matricea produs yx prima linie este -prima linie din x. Din egalitatea $xy = yx$ rezultă că pe prima coloană şi prima linie din matricea x nu rămâne decât x_1^1. Procedând analog cu matricile $y_n^2, \ldots, y_n^n$ rezultă că x este matrice diagonală:

$$x = \begin{pmatrix} x_1^1 & & & \\ & x_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Fie acum pentru $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ indici diferiţi, matricea z_n^{ij} ce schimbă între ele liniile i, j din matricea I_n. Avem $z_n^{ij} \in GL(n,\mathbb{R})$ iar comutarea $xz_n^{ij} = z_n^{ij}x$ implică rezultatul.

S1.15 Dat grupul G cu elementul neutru e şi elementul $x \in G$ dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x^n = e$ atunci cel mai mic $m \in \mathbb{N}^*$ pentru care $x^m = e$ se numeşte *ordinul lui* x în G (sau, cu o denumire mai veche, *perioada lui* x în G). În caz contrar, spunem că x are *ordin infinit*.

Se cere ordinul elementelor lui $O(2)$.

Rezolvare Dată simetria S_θ, datorită relaţiei (40) avem că S_θ are ordinul 2.

Fie acum rotaţia R_φ. Datorită relaţiei (38) avem:

$$R_\varphi^n = R_{n\varphi} \tag{45}$$

şi deci avem două cazuri:
I) φ=multiplu raţional de 2π.

Dacă $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ atunci R_φ are ordinul n.
II) φ=multiplu iraţional de 2π.
Atunci R_φ are ordin infinit.

S1.16 Un subgrup H al grupului G se numeşte *divizor normal* dacă avem $xHx^{-1} = H$ pentru orice $x \in G$.

Să se arate că $SL(n, K)$ este divizor normal în $GL(n, K)$. Consecinţă pentru $SO(n)$.

Rezolvare Fie $S \in GL(n, K)$ şi $U \in SL(n, K)$. Deoarece $GL(n, K)$ este grup avem că $SUS^{-1} \in GL(n, K)$ iar din multiplicativitatea determinantului rezultă $det(SUS^{-1}) = detU = +1$ i.e. $U \in SL(n, K)$.

Consecinţă: $SO(n) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n)$ este divizor normal în $O(n)$.

Observaţie Dacă G este grup abelian atunci orice subgrup al său este divizor normal. Exemplu: S^1 este divizor normal în $\mathbb{C}^*$; a se vedea Consecinţa de la exerciţiul **S20**.

S1.17 Folosind formulele $(37) - (40)$ să se reobţină faptul că $SO(2)$ este divizor normal în $O(2)$.

Rezolvare Avem:
1) $R_\theta R_\varphi R_\theta^{-1} = R_{\theta+\varphi+(-\theta)} = R_\varphi \in SO(2)$,
2) $S_\theta R_\varphi S_\theta^{-1} = S_\theta R_\varphi S_\theta = R_{\theta-(\theta+\varphi)} = R_{-\varphi} \in SO(2)$.

S1.18 Să se arate că funcţia modul $\|\| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+, z = x + iy \to |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ este multiplicativ ă:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|. \tag{46}$$

Rezolvare Dacă $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ atucni:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{47}$$

şi atunci relaţia cerută este echivalentă cu:

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \tag{48}$$

care este adevărată, ambii membrii fiind $(x_1 x_2)^2 + (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2 + (y_1 y_2)^2$.

Observaţie Modulul este de fapt norma euclidiană pe $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

S1.19 Să se arate că $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ este grup abelian.

Rezolvare 1) Se arată imediat că produsul a dou a numere complexe nenul este un număr complex nenul folosind proprietatea analoagă de la numere reale.

2) Se verifică prin calcul asociativitatea înmulţirii numerelor complexe.

3) Element neutru este $1 = 1 + i \cdot 0$.

4) Privind la relaţia (47) se observă imediat invarianţa indicilor la permutarea $1 \leftrightarrow 2$ ceea ce înseamnă comutativitatea $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

5) Fie numărul complex $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ şi *conjugatul* său $\bar{z} = x - iy$ care aparţine tot lui $\mathbb{C}^*$. Avem:

$$z\bar{z} = |z|^2 \tag{49}$$

şi din z nenul avem $|z| > 0$. Avem atunci inversul:

$$z^{-1} = \frac{1}{\|z\|^2}\bar{z}. \tag{50}$$

S1.20 Să se arate că S^1 este subgrup în $\mathbb{C}^*$. Consecinţă asupra comutativităţii lui S^1.

Rezolvare 1) Fie $z_1, z_2 \in S^1$. Din (46) avem: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 1 \cdot 1 = 1$ i.e. $z_1 z_2 \in S^1$.

2) Fie $z \in S^1$. Conform (50) avem:

$$z^{-1} = \bar{z}. \tag{51}$$

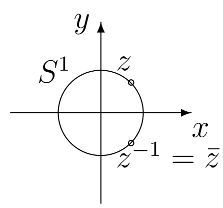


Fig. 8 Inversul unui element din cercul unitate

Dar:

$$|\bar{z}| = |z| \tag{52}$$

şi deci $|z^{-1}| = |\bar{z}| = |z| = 1$ i.e. $z^{-1} \in S^1$.

Consecinţă Cum $\mathbb{C}^*$ este abelian rezultă că şi S^1 este abelian.

S1.21 Fie $J : \mathbb{C}^* \to GL(2, \mathbb{R}), z = x + iy \to J(z)$:

$$J(z) = xI_2 + yJ_2 = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \tag{53}$$

unde:
$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{54}$$
Să se arate că J este morfism injectiv de grupuri multiplicative. Interpretare pentru funcţia modul.

Rezolvare Observăm mai întâi faptul că z fiind nenul avem, în adevăr, $J(z) \in GL(2, \mathbb{R})$.

1) $J(z_1) = J(z_2)$ implică, via egalitatea primei coloane, $z_1 = z_2$.

2)
$$J(z_1) J(z_2) = \begin{pmatrix} x_1 & -y \\ y_1 & x_1 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + x_2y_1) \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} = J(z_1z_2).$$

Interpretare:
$$|z|^2 = detJ(z). \tag{55}$$
Obţinem astfel o altă demonstraţie pentru multiplicativitatea modulului:
$$|z_1z_2|^2 = det(J(z_1z_2)) = det(J(z_1)J(z_2)) = detJ(z_1)detJ(z_2) = |z_1|^2|z_2|^2.$$

S1.22 Să se arate că:
$$J_2^2 = -I_2. \tag{56}$$
Deci, J_2 este o extensie 2-dimensională a unităţii complexe $i = \sqrt{-1}$. Din acest motiv, J_2 se numeşte *structura complexă* (sau uneori *structura simplectică*) a planului.

Rezolvare
$$J_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

S1.23 Să se arate că $J_2 \in SO(2)$.

Rezolvare
$${}^tJ_2 \cdot J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
şi $detJ_2 = +1$.

S1.24 Să se arate că:

$$J(S^1) = SO(2). \tag{57}$$

Rezolvare Fie $z \in \mathbb{C}$ cu scrierea trigonometrică: $z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$. Dacă $z \in S^1$ atunci: $z = cos\varphi + isin\varphi$ şi deci $J(z) = R_\varphi \in SO(2)$.

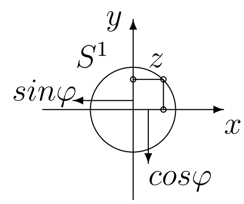


Fig. 9 Un element din cercul unitate şi scrierea sa trigonometrică

Consecinţă foarte importantă Cum J era deja morfism injectiv avem izomorfismul de grupuri:

$$\boxed{SO(2) \simeq S^1}. \tag{58}$$

O altă observaţie importantă este aceea că aplicaţia J conservă nu numai structura algebrică (de grup) ci şi cea metrică deoarece atât elementele lui S^1 cât şi cele ale lui $SO(2)$ au norma (euclidiană=modul, respectiv Hilbert-Schmidt) egală cu 1. Spunem că J este o *izometrie*.

S1.25 Să se expliciteze izomorfismul J în termeni de exponenţială. Interpretare pentru înmulţirea exponenţialelor.

Rezolvare Fie $z \in \mathbb{C}$ cu scrierea trigonometrică: $z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$. Reamintim că z admite şi scrierea *exponenţială*:

$$z = |z|e^{i\varphi}. \tag{59}$$

Rezultă:

$$J(e^{i\varphi}) = R_\varphi. \tag{60}$$

Interpretare Din ultima relaţie reobţinem binecunoscuta lege de înmulţirea exponenţialelor:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = J^{-1}(R_{\varphi_1}) J^{-1}(R_{\varphi_2}) = J^{-1}(R_{\varphi_1} R_{\varphi_2}) = J^{-1}(R_{\varphi_1+\varphi_2}) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

care înseamnă *relaţia lui Moivre*:

$$(cos\varphi + isin\varphi)(cos\theta + isin\theta) = cos(\varphi + \theta) + isin(\varphi + theta). \tag{61}$$

În particular:

$$(cos\varphi + isin\varphi)^n = cos(n\varphi) + isin(n\varphi). \tag{62}$$

S1.26 Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$.
1) λ se numeşte *rădăcină caracteristică* a lui A dacă este rădăcină a *polinomului caracteristic*:

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n). \tag{63}$$

2) Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ atunci λ se numeşte *valoare proprie* dacă există $x \in \mathbb{R}^n\{\bar{0}\}$ a.î.:

$$Ax = \lambda x. \tag{64}$$

Acest x se numeşte *vector propriu* corespunzător valorii proprii λ.

Să se arate că orice valoare proprie este rădăcină caracteristică. Consecinţă pentru n impar.

Rezolvare Relaţia (62) este echivalentă cu sistemul:

$$(A - \lambda I_n)x = \{\bar{0}\}$$

care este liniar şi omogen. Ştim că un astfel de sistem admite soluţie nenulă dacă şi numai dacă determinantul sistemului este nul.

Consecinţă. Gradul polinomului caracteristic este n. Prin urmare, dacă n este impar, o matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite măcar o valoare proprie.

S1.27 Fie $S \in O(n)$ ce admite valoarea proprie λ. Să se arate că $\lambda \in S^0 = \{-1, +1\}$. Consecinţă pentru $S \in SO(n)$ cu n impar. Caz particular $n = 3$.

Rezolvare Deoarece $S \in O(n)$ avem, pentru vectorul propriu x:

$$< Sx, Sx >=< x, x >= \|x\|^2$$

şi totodată;

$$< Sx, Sx >=< \lambda x, \lambda x >= \|\lambda x\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2.$$

Egalând ultimele două relaţii şi folosind $\|x\| \neq 0$ avem $|\lambda| = 1$.

Consecinţă. Dacă $S \in SO(n)$ şi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sunt rădăcinile sale caracteristice atunci folosind ultima relaţie Vieté avem: $\lambda_1 \dots \lambda_n = (-1)^{n-1}$. Presupunând că n este impar şi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sunt chiar valorile proprii ale lui S rezultă că $\lambda_1 \dots \lambda_n = 1$ şi deci avem variantele:
i) $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$,
ii) un număr impar de λ sunt $+1$ şi un număr par de λ sunt (-1).

Caz particular $n = 3$. O matrice $S \in SO(3)$ poate avea următoarele rădăcini caracteristice:
1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$,
2) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$,
3) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_3 = e^{i\theta}$.

S1.28 Se cer rădăcinile caracteristice ale matricilor din $O(2)$. Să se studieze diagonalizabilitatea elementelor lui $O(2)$.

Rezolvare 1) Ecuaţia ce dă rădăcinile caracteristice pentru matrici din $SO(2)$:

$$P_{R_\varphi}(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$$

are discriminantul redus: $\Delta' = \cos^2\varphi - 1 = -\sin^2\varphi \leq 0$ şi deci avem soluţia $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2 = e^{i\varphi}$. Avem $\Delta' = 0$ doar in cazurile:
i) $\varphi = 0$ când reobţinem $R_0 = I_2$ cu valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$,
ii) $\varphi = \pi$ când reobţinem $R_\pi = -I_2$ cu valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

2) Ecuaţia ce dă rădăcinile caracteristice pentru matrici din $O^-(2)$:

$$P_{S_\varphi}(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

are soluţiile $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$. Deci orice simetrie axială este diagonalizabilă cu forma diagonală S_0.

Vectorii proprii:
1) $V(\lambda_1) : (cos\varphi - 1)x + sin\varphi y = 0$ are soluţia $\bar{u}_1 = (1, tg\frac{\varphi}{2})$,
2) $V(\lambda_2) : (cos\varphi + 1)x + sin\varphi y = 0$ are soluţia $\bar{u}_2 = (1, -ctg\frac{\varphi}{2})$.

Avem deci matricea de diagonalizare:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ tg\frac{\varphi}{2} & -ctg\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

şi un calcul imediat dă inversa:

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\sin\varphi \cdot \begin{pmatrix} ctg\frac{\varphi}{2} & 1 \\ tg\frac{\varphi}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Concluzie Avem un rezultat ce pune în balanţă "calităţile" şi "defectele" celor două mulţimi $SO(2)$ respectiv $O^{-}(2)$:
i) $SO(2)$ este subgrup ("calitate") dar singurele sale elemente diagonalizabile sunt cele triviale $\pm I_2$ ("defect"),
ii) $O^{-}(2)$ nu-i subgrup ("defect") dar are toate elementele diagonalizabile ("calitate").
Ca o sugestie aproape filozofică: nimic din ce ne-a dat Dumnezeu nu-i de lepădat chiar dacă aşa ar părea la o primă vedere!

2 SEMINAR: Aplicaţii ale formei algebrice a inegalităţii CBS

S2.1 *Metoda vectorului constant*
Ce devine forma algebrică a inegalităţii CBS (i.e. relaţia (10)) dacă vectorul v este constant?

Rezolvare Putem lua $v = (1, \ldots, 1)$ şi relaţia (10) devine:

$$|\sum_{i=1}^{n} u^i|^2 \leq n \left(\sum_{i=1}^{n} \left(u^i\right)^2 \right). \tag{65}$$

sau sub forma:

$$|\sum_{i=1}^{n} u^i| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(u^i\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{66}$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă vectorul u este la rândul său constant i.e. $u^1 = \ldots = u^n$.

S2.2 *Metoda splitării*
I) Fie $p, q \in (0, 1)$ a.î. $p + q = 1$. Atunci, dacă x este un vector n-dimensional cu toate componentele strict pozitive avem:

$$(\sum_{i=1}^{n} x^i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^{2p} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^{2q} \right). \tag{67}$$

II) Fie $m, p \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$(\sum_{i=1}^{n} x^i)^m \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^{m+p} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^{m-p} \right). \tag{68}$$

Rezolvare I) Luăm $u = \left((x^1)^p, \ldots, (x^n)^p\right)$ respectiv $v = \left((x^1)^q, \ldots, (x^n)^q\right)$.
II) Luăm $u = \left((x^1)^{\frac{m+p}{2}}, \ldots, (x^n)^{\frac{m+p}{2}}\right)$ respectiv $v = \left((x^1)^{\frac{m-p}{2}}, \ldots, (x^n)^{\frac{m-p}{2}}\right)$.

Avem egalitate pentru x vector constant.

S2.3 *Metoda versorului*
Ce devine inegalitatea CBS dacă v este versor?

Rezolvare
$$|\sum_{i=1}^{n} u^i v^i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(u^i\right)^2\right). \tag{69}$$

S2.4 Folosind metoda versorului să se arate că pentru orice x, y, z avem:

$$\begin{cases} |x\cos\theta + y\sin\theta| \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ |x\cos\varphi\cos\theta + y\cos\varphi\sin\theta + z\sin\varphi| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases}.$$

Rezolvare $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ respectiv $v = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$ sunt versori. Presupunem $x \neq 0$. Prima relaţie este egalitate când $tg\theta = \frac{y}{x}$. Pentru a obţine cazul de egalitate în a doua relaţie presupunem şi $y \neq 0$. Avem atunci egalitate dacă $tg\theta = \frac{y}{x}$ şi $tg\varphi = \frac{z|y|}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

S2.5 Folosind metoda vectorului constant să se arate:

$$1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} < n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Rezolvare Luăm în (66) vectorul $u = \left(1, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n}\right)$.

S2.6 *Metoda simetriilor*
Fie vectorul $x = (x^1, \ldots, x^n)$ de termeni strict pozitivi şi $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i$. Să se arate:
i) $S(x) \leq (n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\left(x^i\right)^2}{S-x^i}$,
ii) $\sqrt{\frac{S(x)-x^1}{S(x)}} + \ldots + \sqrt{\frac{S(x)-x^n}{S(x)}} \leq \sqrt{n(n-1)}$,
iii) $\frac{1^2}{x^1} + \ldots + \frac{n^2}{x^n} \geq \frac{n^2(n+1)^2}{4S(x)}$.

Rezolvare i) Folosim CBS cu $u = \left(\frac{x^1}{\sqrt{S(x)-x^1}}, \ldots, \frac{x^n}{\sqrt{S(x)-x^n}}\right)$ şi
$v = \left(\sqrt{S(x)-x^1}, \ldots, \sqrt{S(x)-x^n}\right)$.
ii) Folosim $u = \left(\sqrt{\frac{S(x)-x^1}{S(x)}}, \ldots, \sqrt{\frac{S(x)-x^n}{S(x)}}\right)$ în (66).
iii) Folosim CBS cu $u = \left(\frac{1}{\sqrt{x^1}}, \ldots, \frac{n}{\sqrt{x^n}}\right)$ şi
$v = \left(\sqrt{x^1}, \ldots, \sqrt{x^n}\right)$.
Inegalităţile devin egalităţi doar pentru vectori constanţi.

S2.7 *De la identităţi la inegalităţi*
Se ştie că funcţia $f(x) = cos(\theta x)$ satisface $f^2(x) = \frac{1}{2}(1+f(2x))$. Fie numerele $p_1, \ldots, p_n \in (0,1)$ cu $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Să se arate că funcţia *ponderată* $g(x) = p_1 f(\theta_1 x) + \ldots + p_n f(\theta_n x)$ satisface $g^2(x) \leq \frac{1}{2}(1 + g(2x))$.

Rezolvare Folosim CBS cu $u = \left(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}\right)$ şi $v = \left(\sqrt{p_1}\cos\left(\theta_1 x\right), \ldots, \sqrt{p_n}\cos\left(\theta_n x\right)\right)$.

S2.8 *Inegalitatea mediilor*
Fie vectorul $x = (x^1, \ldots, x^n)$ de termeni strict pozitivi şi:
i) *media aritmetică* $M_a(x) = \frac{x^1+\ldots+x^n}{n}$,
ii) *media geometrică* $M_g(x) = \sqrt[n]{x^1 \cdot \ldots \cdot x^n}$,
iii) *media armonică* $M_h(x) = \frac{n}{(x^1)^{-1}+\ldots+(x^n)^{-1}}$,
iv) *media pătratică* $M_p(x) = \sqrt{\frac{(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2}{n}}$.

Să se arate inegalitatea mediilor:

$$\boxed{M_h(x) \leq M_g(x) \leq M_a(x) \leq M_p(x)}. \tag{70}$$

Rezolvare
a) Inegalitatea $M_h(x) \leq M_a(x)$ rezultă din CBS cu $u = x$ şi $v = (\frac{1}{x^1}, \ldots, \frac{1}{x^n})$:

$$n^2 \leq \left(x^1 + \ldots + x^n\right)\left(\frac{1}{x^1} + \ldots + \frac{1}{x^n}\right). \tag{71}$$

b) Inegalitatea $M_a(x) \leq M_p(x)$ este exact (66) împărţită la n.
c) Inegalitatea $M_h(x) \leq M_g(x)$ este consecinţă a inegalităţii $M_g(y) \leq M_a(y)$ luând $y^i = \frac{1}{x^i}$.

În concluzie a rămas de arătat $M_g(x) \leq M_a(x)$. Arătăm că pentru $n = 2$ aceasta este o consecinţă a CBS. Mai precis luăm $u = (\sqrt{x^1}, \sqrt{x^2})$ şi $v = (\sqrt{x^2}, \sqrt{x^1})$.

S2.9

Rezolvare

References

[1] M. A., Armstrong, *Groups and Symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1988.

[2] Mircea, Crasmareanu, *Geometrie analitică*, http://www.math.uaic.ro/∼mcrasm.

[3] Paul J. Nahin, *O poveste imaginară. Istoria numărului* $\sqrt{-1}$, Ed. Theta, Bucureşti, 2000.

[4] Liliana, Răileanu, *Prin algebră spre geometrie*, Ed. Alexandru Myller, Iaşi, 2005.

[5] Gheorghe, Stan, *O.K. pentru America!*, Institutul European, Iaşi, 2006.

[6] Kristopher Tapp, *Matrix Groups for Undergraduates*, Student Mathematical Library, Vol. 29, AMS, 2005.

Index