Rădăcina pătrată a unei matrici reale de ordinul 2

Mircea Crasmareanu

Mai 19, 2017

Actorii acestei poveşti: matricile $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

PROBLEMA STUDIATĂ: Există $B \in M_2(\mathbb{R})$ aşa încât:

$$\boxed{B^2 = A?}$$

O astfel de matrice B o numim *rădăcină a lui A*. Cazul matricilor reale de ordinul 3 este studiat în [4].

Exemplul euclidian Reamintim *n-grupul ortogonal*: $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t \cdot A = I_n\}$; este *grupul de invarianţă* al produsului scalar euclidian $< \cdot, \cdot >$ (prin urmare şi al normei euclidiene asociate $\| \cdot \|$). Dacă $A \in O(n)$ atunci $(\det A^t) \cdot (\det A) = detI_n = 1$ implică $\det A = \pm 1$. Deci grupul ortogonal se descompune:

$$\boxed{O(n) = SO(n) \sqcup O^-(n)}$$

unde $SO(n)$ conţine matricile din $O(n)$ având $detA = 1$ iar $O^-(n)$ pe cele cu $detA = -1$; $\sqcup$ reprezintă *reuniunea disjunctă* a mulţimilor. $SO(n)$ este subgrup în $O(n)$ numit *n-grupul ortogonal special*. $O^-(n)$ nu este parte stabilă la înmulţirea matricilor: $A_1, A_2 \in O^-(n)$ implică $A_1 A_2 \in SO(n)$. Alte detalii despre $O(n)$ aflaţi în [6].

Deoarece $M_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ avem $O(1) = \{\pm 1\}$ cu $SO(1) = \{1\}$ şi $O^-(1) = \{-1\}$; observăm că $O(1)$ conţine rădăcinile unităţii! Ştim şi $O(2)$:

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO(2), \quad S(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \in O^-(2).$$

Avem imediat că:

$$S(t)^2 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} = I_2$$

deci $S(t)$ este rădăcină a matricii unitate I_2. O rădăcină a matricii unitate o numim *structură aproape produs*; [7].

Semnificaţia geometrică: $R(t)$ este matricea *rotaţiei* de unghi t în sens trigonometric (i.e antiorar) în jurul originii iar $S(t)$ este matricea *simetriei axiale* în raport cu dreapta $d_{t/2}$=dreapta din plan ce trece prin origine şi face unghiul orientat $t/2$ cu axa Ox; avem $S(t_2) \cdot S(t_1) = A(t_2 - t_1) \neq S(t_1) \cdot S(t_2)$. Pentru detalii consultaţi [6, p. 18]. $\square$

Revenim la cazul general al matricii A. Reamintim că A posedă *doi invarianţi*:

$$\boxed{TrA := a + d, \quad \det A := ad - bc.}$$

Proprietăţi:
i) $Tr : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ este operator liniar: $Tr(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha TrA_1 + \beta TrA_2$,
ii) $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ este funcţie multiplicativă: $\det(A_1 A_2) = \det A_1 \det A_2$,
iii) *Ecuaţia caracteristică a lui A*:

$$\boxed{A^2 - TrA \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2.}$$

Multiplicativitatea determinantului produce:

CONDIŢIE NECESARĂ:

$$\boxed{\exists B : B^2 = A \Rightarrow \det A \geq 0.}$$

Deci în continuare vom presupune $\det A \geq 0$.

Exemplul euclidian revăzut 1: $TrS(t) = 0$, $detS(t) = -1$ ce spune că $S(t)$ nu admite, la rândul ei, rădăcină. O rădăcină de ordinul 4 a matricii unitate se numeşte *structură de tip electromagnetică* conform [8, p. 3807]. $\square$

Avem şi relaţii de legătură între invarianţii lui A şi B:

$$\boxed{TrA = (TrB)^2 - 2\det B, \quad \det A = (\det B)^2} \tag{0}$$

Demonstraţie E suficient de arătat prima identitate. Scriem *Ecuaţia caracteristică a lui B*:

$$A - TrB \cdot B + \det B \cdot I_2 = O_2 \tag{1}$$

ce dă:

$$A = TrB \cdot B - \det B \cdot I_2. \tag{2}$$

Ridicăm această relaţie la pătrat:

$$A^2 = (TrB)^2 \cdot A - 2TrB \cdot \det B \cdot B + (\det B)^2 I_2$$

sau încă:

$$A^2 - (TrB)^2 \cdot A + 2\det B[TrB \cdot B] - (\det B)^2 I_2 = O_2. \tag{3}$$

Din (1) avem şi:

$$TrB \cdot B = A + \det B \cdot I_2 \tag{4}$$

ce o înlocuim în paranteza pătrată din (3):

$$A^2 - (TrB)^2 \cdot A + 2\det B[A + \det B \cdot I_2] - (\det B)^2 I_2 = A^2 - [(TrB)^2 - 2\det B] \cdot A + (\det B)^2 I_2 = O_2$$

şi comparând cu Ecuaţia caracteristică pentru A avem concluzia. $\square$

Relaţia (4) este fundamentală pentru determinarea lui B şi avem:
Cazul I): $TrB = 0$ implică: $A = -\det B \cdot I_2$.
Cazul II) $TrB \neq 0$ implică:

$$\boxed{B = \tfrac{1}{TrB}[A + \det B \cdot I_2].} \tag{5}$$

Din (0_1) avem:

$$(TrB)^2 = TrA + 2|\sqrt{\det A}| \tag{6}$$

şi deci dacă $A \neq aI_2$ avem:
II1) $TrA + 2\sqrt{\det A} \leq 0$ implică: A nu are rădăcini,
II2) $TrA + 2\sqrt{\det A} > 0$ dar $TrA - 2\sqrt{\det A} \leq 0$ implică: A are două rădăcini:

$$B_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{TrA + 2\sqrt{\det A}}}[A + \sqrt{\det A} I_2] \tag{7}$$

II3) $TrA - 2\sqrt{\det A} > 0$ (ceea ce implică $TrA + 2\sqrt{\det A} > 0$) implică: A are patru rădăcini:

$$B_{\pm}(\varepsilon) = \pm \frac{1}{\sqrt{TrA + 2\varepsilon\sqrt{\det A}}}[A + \varepsilon\sqrt{\det A} I_2], \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{8}$$

Exemplul euclidian revăzut 2 Pentru $A(t)$ avem:

$$TrR(t) = 2\cos t, \det R(t) = 1, TrR(t) + 2\sqrt{\det R(t)} = 4\cos^2\frac{t}{2}, TrR(t) - 2\sqrt{\det R(t)} = 2(\cos t - 1) \leq 0. \tag{9}$$

Prin urmare avem cazul II2 şi deci $R(t)$ are două rădăcini:

$$B_{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2\cos\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t + 1 & \sin t \\ \sin t & \cos t + 1 \end{pmatrix} = \pm R\left(\frac{t}{2}\right). \tag{10}$$

Relaţia (10) poate fi considerată analogul matriceal al bine-cunoscutei relaţii Moivre din algebra lui $\mathbb{C}$:

$$(\cos t + i \sin t)^2 = \cos(2t) + i \sin(2t). \tag{11}$$

Legea de grup a lui $SO(2)$ este: $R(t_1) \cdot R(t_2) = R(t_1 + t_2) = R(t_2) \cdot R(t_1)$ ceea ce dă: $R(t)^2 = R(2t)$ şi faptul că $SO(2)$ este grup izomorf cu grupul multiplicativ $(S^1, \cdot)$ al numerelor complexe unitare. $\square$

Inspiraţi de ecuaţia caracterististică a lui A introducem *polinomul caracteristic al lui* A, anume $p_A \in \mathbb{R}[X]$:

$$p_A(X) = X^2 - TrA \cdot X + \det A. \tag{12}$$

Ştim că eventualele rădăcini reale ale lui p_A se numesc *valori proprii ale lui* A, utile în studiul posibilei diagonalizări a lui A. Astfel, dacă valorile proprii există şi sunt *distincte*, să le notăm $\lambda_1 < \lambda_2$, atunci A admite *forma diagonală*:

$$A = S^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) S \tag{13}$$

cu $S \in GL(2, \mathbb{R})$=2-*grupul liniar general*=grupul matricilor reale de ordinul 2, inevrsabile. Evident, condiţia de existenţă şi inegalitate pentru $\lambda_{1,2}$ se realizează atunci când *discriminantul* $\Delta(p_A)$ este strict pozitiv:

$$\Delta(p_A) := (TrA)^2 - 4 \det A. \tag{14}$$

Relaţia de legătură între $\Delta(p_A)$ şi $\Delta(p_B)$ este dată de:

Propoziţie *Fie* B *rădăcină pătrată a lui* A. *Atunci*:

$$\Delta(p_A) = (TrB)^2 \Delta(p_B). \tag{15}$$

Prin urmare, dacă $TrB \neq 0$ *atunci* A *are valori proprii distincte dacă şi numai dacă* B *are valori proprii distincte.*

Demonstraţie Relaţia (15) este consecinţă imediată a relaţiilor (0). $\square$

Corolar *Fie matricea* A *având* $\det A > 0$ *şi admiţând rădăcina* B *cu* $TrB \neq 0$. *Presupunem că* A *este diagonalizabilă cu* $S \in GL(2, \mathbb{R})$ *şi valori proprii distincte* $\lambda_1 < \lambda_2$. *Atunci* $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ *şi* B *este diagonalizabilă cu aceeaşi matrice* S *având valorile proprii* $\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}\}$ *sau* $\{-\sqrt{\lambda_1}, -\sqrt{\lambda_2}\}$ *sau* $\{-\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}\}$ *sau* $\{\sqrt{\lambda_1}, -\sqrt{\lambda_2}\}$. *Echivalent, suntem în cazul II3) cu*:

$$B_{\pm}(\varepsilon) = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_2} + \varepsilon\sqrt{\lambda_1}} [A + \varepsilon\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} I_2] = S \cdot \operatorname{diag}(\pm\sqrt{\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_2}) \cdot S^{-1}. \tag{16}$$

Demonstraţie Deoarece $\det A > 0$ avem că λ_1 şi λ_2 au acelaşi semn. Să presupunem $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Din (6) avem: $(TrB)^2 = \lambda_1 + \lambda_2 \pm 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} > 0$. Deci se poate doar cazul cu + i.e. $-|\lambda_1| - |\lambda_2| + 2\sqrt{|\lambda_1||\lambda_2|} > 0$ imposibil datorită inegalităţii mediilor. $\square$

Exemplul de aur Se ştie că *proporţia* (sau *numărul*) *de aur* este soluţia pozitivă $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ a ecuaţiei, [7]:

$$\boxed{x^2 - x - 1 = 0.} \tag{17}$$

Soluţia negativă este $-\phi^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad TrA = 6, \det A = 5. \tag{18}$$

A este diagonalizabilă (fiind simetrică) cu $0 < \lambda_1 = 1 < \lambda_2 = 5$. Avem:

$$TrA + 2\varepsilon\sqrt{\det A} = 6 + 2\varepsilon\sqrt{5} = (\sqrt{5} + \varepsilon)^2 \tag{19}$$

Suntem în cazul II3 şi spre exemplu:

$$B_{\pm}(1) = \pm\frac{1}{\sqrt{5}+1}\begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2\phi}\begin{pmatrix} 2\phi^2 & 2 \\ 2 & 2\phi^2 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \phi & \phi^{-1} \\ \phi^{-1} & \phi \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Prin analogie cu problema studiată aici, putem numi matricile A ce satisfac $A^2 - A - I_n = O_n$ ca fiind *structuri aproape aur*. În [7] am pus stabilit o corespondenţă între structurile aproape aur şi cele aproape produs. □

Revenind la cazul I dat de $A = aI_2$ şi prezentăm soluţia din [3, p. 491]. Avem, indiferent de semnul lui a o infinitate de rădăcini:

$$B_{\pm}(c,s) := \pm\begin{pmatrix} c & s \\ \frac{a-c^2}{s} & -c \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}^*. \quad (21)$$

Dacă $a = 0$ se mai adaugă familia infinită de *structuri aproape tangente*:

$$B_{\pm}(u) := \pm\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Dacă $a > 0$ adaugăm familia infinită:

$$B_{\pm}(u) := \begin{pmatrix} \pm\sqrt{a} & 0 \\ u & \mp\sqrt{a} \end{pmatrix}, \quad B_{\pm} := \begin{pmatrix} \pm\sqrt{a} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{a} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Exemplul euclidian revăzut 3 Pentru $a = 1$ familia $B_+(c,s)$ devine:

$$B(c,s) = \begin{pmatrix} c & s \\ \frac{1-c^2}{s} & -c \end{pmatrix} \quad (24)$$

ceea ce dă:

$$B(\cos t, \sin t) = S(t). \quad (25)$$

Am reobţinut deci matricile din $O^-(2)$. Considerăm un triunghi dreptunghic cu catetele x, y şi ipotenuza z; rezultă:

$$S(t) = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}. \quad (26)$$

În cazul în care $(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ spunem că (x,y,z) este un *triplet pitagoreic*; acest exemplu al structurilor aproape produs date de triplete pitagoreice apare pe pagina Web [1]. În [5] am dat o metodă de a obţine matrici $A \in M_3(\mathbb{R})$ ce transformă un triplet pitagoreic tot într-un triplet pitagoreic.

Problemă deschisă Matricile A ce păstrează tripletele pitagoreice admit rădăcini?
□

Revenim la Corolarul dat: o matrice simetrică A cu valori proprii distince şi strict pozitive este *pozitiv definită*, a se vedea [2]. Prin urmare, A defineşte un "nou" produs scalar pe $\mathbb{R}^n$:

$$< \bar{x}, \bar{y} >_A := < \bar{x}, A\bar{y} > . \quad (27)$$

Dacă A admite rădăcina B avem:

$$< \bar{x}, \bar{y} >_A := < \bar{x}, B^2\bar{y} > = < B^t\bar{x}, B\bar{y} > . \quad (28)$$

Dacă şi B este simetrică, fapt ce se întâmplă pentru $n = 2$, atunci avem:

$$< \bar{x}, \bar{y} >_A := < B\bar{x}, B\bar{y} > \quad (29)$$

şi deci:

$$\|\bar{x}\|_A^2 = \|B\bar{x}\|^2. \tag{30}$$

Prin urmare, pentru vectorii nenuli $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ unghiul $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ dintre ei este în raport cu $< \cdot, \cdot >_A$ dat de:

$$\cos_A \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \cos \varphi(B\bar{x}, B\bar{y}). \tag{31}$$

Exemplul de aur generalizat Matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ o numim *bi-simetrică* dacă are expresis:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Avem $\det A = a^2 - b^2$ şi pentru a exista rădăcini presupunem $a > b$. Suntem în cazul II3 şi rezultă:

$$B_{\pm}(\varepsilon) = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{a+b} + \varepsilon\sqrt{a-b} & \sqrt{a+b} - \varepsilon\sqrt{a-b} \\ \sqrt{a+b} - \varepsilon\sqrt{a-b} & \sqrt{a+b} + \varepsilon\sqrt{a-b} \end{pmatrix} \tag{33}$$

ceea ce spune că şi orice rădăcină a sa este de asemenea bi-simetrică. Reciproca are loc: dacă B este bi-simetrică atunci şi B^2 este bi-simetrică; se verifică imediat prin calcul. $\square$

Exemplul hiperbolic Considerăm:

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Este o matrice bi-simetrică cu $a > b$ şi cu formula (33) obţinem:

$$B_{\pm}(1) = \pm\begin{pmatrix} \cosh\frac{t}{2} & \sinh\frac{t}{2} \\ \sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad B_{\pm}(-1) = \pm\begin{pmatrix} \sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2} \\ \cosh\frac{t}{2} & \sinh\frac{t}{2} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

$\square$

Exemplul Fibonacci În [9, p. 24] este introdusă *Q-matricea Fibonacci*:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

ce are ca puteri naturale:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Datorită exemplului de aur considerăm matricea:

$$Q(n) = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Cu expresia (33) avem rădăcinile:

$$Q_{\pm}(n, \varepsilon) = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{F_{n+2}} + \varepsilon\sqrt{F_{n-2}} & \sqrt{F_{n+2}} - \varepsilon\sqrt{F_{n-2}} \\ \sqrt{F_{n+2}} - \varepsilon\sqrt{F_{n-2}} & \sqrt{F_{n+2}} + \varepsilon\sqrt{F_{n-2}} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

$\square$

Exemplul aproape complex O rădăcină a matricii $-I_2$ se numeşte *structură aproape complexă*. Conform (21) avem expresia lor:

$$B_{\pm}(s, c) := \pm\begin{pmatrix} s & c \\ \frac{-1-s^2}{c} & -s \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^*. \tag{40}$$

Avem cazul particular:

$$B_{\pm}(\sinh t, \cosh t) := B(t) = \pm\begin{pmatrix} \sinh t & \cosh t \\ -\cosh t & -\sinh t \end{pmatrix}. \tag{41}$$

$\square$

References

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_a_matrix

[2] https://ro.wikipedia.org/wiki/Matrice_pozitiv_definit%C4%83

[3] N. Anghel, *Square roots of real* 2×2 *matrices*, Gaz. Mat. Ser. B, 118(2013), no. 11, 489-491.

[4] N. Anghel, *Square roots of real 3x3 matrices vs. quartic polynomials with real zeros*, An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa, Ser. Mat., 25(2017), no. 2, in press.

[5] M. Crasmareanu, *A new method to obtain Pythagorean triple preserving matrices*, Missouri J. Math. Sci., 14(2002), No. 3, 149-158. MR 1929067(2003h:15041), Zbl 1032.15007

[6] M. Crasmareanu, *Grupul ortogonal*, 2007, Material pentru perfecţionarea profesorilor, http://www.math.uaic.ro/~mcrasm/depozit/Perfect_Desen.pdf.

[7] M. Crasmareanu; Cristina-Elena Hreţcanu, *Golden differential geometry*, Chaos, Solitons & Fractals, 38(2008), No. 5, 1229-1238. MR 2456523(2009k:53059)

[8] E. Reyes; V. Cruceanu; P. M. Gadea, *Structures of electromagnetic type on vector bundles*, J. Phys. A, Math. Gen., 32(1999), No. 20, 3805-3814. Zbl 0969.53041

[9] A. Stakhov; S. Aranson, *The golden non-Euclidean geometry. Hilberts fourth problem, golden dynamical systems, and the fine-structure constant*, With the assistance of Scott Olsen, Series on Analysis, Applications and Computation 7. Hackensack, NJ: World Scientific, 2017. Zbl 1351.51002