# Axiomatica Hilbert a spaţiului euclidian

Mircea Crâşmăreanu

## Prezentare generală a sistemului axiomatic Hilbert

Prin *Geometrie Euclidiană* se înţelege într-un sens general şi clasic acea geometrie ce are la bază, în mod esenţial, cele 13 cărţi ale operei "Elemente" a matematicianului grec Euclid (365-300 î.H.).

Aceste cunoştinţe foarte serioase de geometrie şi în general de matematică şi-au păstrat valabilitatea peste două milenii pentru că s-au bazat pe o gândire logică şi demonstraţii riguroase. O formă de prezentare noă şi chiar unele modificări de substanţă au fost totuşi necesare. O astfel de prezentare modernă i se datorează matematicianului german David Hilbert (1862-1943), care, în 1899, a publicat lucrarea *Grundlagen der Geometrie* ("Bazele Geometriei").

**Definiţia 0.1** i) Numim *sistem axiomatic* (pe scurt s.a.) un ansamblu $\mathcal{S} =< \mathcal{N}, \mathcal{R}, \mathcal{A} >$ unde $\mathcal{N}$ este mulţimea *noţiunilor primare*, $\mathcal{R}$ cea a *relaţiilor primare* iar $\mathcal{A}$ cea a *axiomelor* unde:
· noţiunile şi relaţiile primare sunt simboluri (cuvinte şi semne) abstracte (deci nu se definesc !),
· axiomele sunt propoziţii construite pe baza noţiunilor şi relaţiilor primare şi adevărul lor nu se justifică (în cadrul teoriei construite !).
ii) Numim *teorie axiomatică* a s.a. $\mathcal{S}$ ansamblul $T(\mathcal{S}) =< \mathcal{S}, Consec(\mathcal{S}) >$ format din $\mathcal{S}$ şi toate consecinţele sale adică:
· *noţiuni şi relaţii derivate* definite cu ajutorul elementelor lui $\mathcal{S}$,
· propoziţii derivate, numite *teoreme*, obţinute prin aplicarea regulilor de deducţie logică noţiunilor şi relaţiilor primare şi derivate, axiomelor şi teo-

remelor anterior demonstrate.
iii) Două sisteme axiomatice $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}'$ se numesc *echuvalente*dacă $T(\mathcal{S}) = T(\mathcal{S}')$.

O analiză imediată a relaţiei introduse în iii) arată că aceasta este o relaţie de echivalenţă (de unde şi denumirea !). Suntem astfel conduşi la:

**Definiţia 0.2** O clasă de echivalenţă $SM$ pe mulţimea sistemelor axiomatice o numim *structură matematică*. Dacă $\mathcal{S}$ este un reprezentant al lui $SM$ i.e. $SM = [\mathcal{S}]$, spunem că $SM$ este *construită* cu teoria axiomatică $T(\mathcal{S})$ sau că este definită de s.a. $\mathcal{S}$.

În continuare presupunem cunoscute noţiuni elementare de teoria mulţimilor precum şi mulţimile numerice uzuale (a numerelor naturale, întregi, raţionale, reale) cu proprietăţile lor fundamentale.

**A** Noţiunile primare ale s.a. Hilbert: puncte, drepte, plane.

Punctele le notăm $A, B, C, \ldots$ iar mulţimea lor cu $E_3$. Dreptele le notăm $a, b, c, \ldots$ iar planele $\alpha, \beta, \pi, \ldots$. Atunci când va fi necesar vom folosi şi indici: $A_1, d_2, \pi_3, \ldots$.

**B** Relaţiile primare ale s.a. Hilbert:
· *incidenţa* sau *apartenenţa* punctelor la drepte cu notaţia $A \in d$,
· *apartenenţa* punctelor la plane cu notaţia $A \in \pi$,
· *a fi între* pentru 3 puncte cu notaţia $A - B - C$.

După introducerea noţiunilor derivate de *segment* (notat $[AB]$) şi *unghi* (notat $\measuredangle AOB$) avem ultimele două relaţii primare:
· *congruenţa segmentelor* notată $[AB] \equiv [A'B']$,
· *congruenţa unghiurilor* notată $\measuredangle AOB \equiv \measuredangle A'O'B'$.

**C** Axiomele s.a. Hilbert sunt împărţite în 5 grupe:
**I**: *axiomele de incidenţă*, se referă la $\in$,
**II**: *axiomele de ordine*, se referă la $. - . - .$,
**III**: *axiomele de congruenţă*, se referă la $\equiv$,
**IV**: *axiomele de continuitate*,
**V**: *axioma paralelelor*.

**Definiţia 0.3** Sistemul axiomatic:

$$SH =< E_3, drepte, plane, \in, \in, . - . - ., \equiv, \equiv, I - V >$$

se numeşte *sistemul axiomatic Hilbert*. $T(SH)$ se numeşte *geometria euclidiană a spaţiului* iar structura matematică $[SH]$ se numeşte *spaţiul euclidian* (3-dimensional).

# 1 Axiomele de incidenţă şi poziţiile relative ale punctelor, dreptelor şi planelor

Pentru uşurinţa expunerii introducem:

**Definiţia 1.1**
(i) Familia $\mathcal{F}$ de puncte le numim *coliniare*, respectiv *coplanare*, dacă $\exists d$, respectiv $\exists \pi$, a.î. $\forall A \in \mathcal{F}$ avem $A \in d$, respectiv $A \in \pi$. Notăm $\mathcal{F} \subset d$ respectiv $\mathcal{F} \subset \pi$. În caz contrar, punctele date le numim *necoliniare*, respectiv *necoplanare*.
(ii) Date dreapta $d$ şi planul $\pi$ spunem că $d$ *aparţine* lui $\pi$ dacă $\forall A \in d$ avem $A \in \pi$. Notăm $d \subset \pi$.

**Axiomele de incidenţă**:
**I.1** $\forall A, B$ cu $A \neq B$ $\exists!$ $d$ a.î. $A, B \in d$. Notăm $d = AB$.
**I.2** $\forall d$ $\exists A, B \in d$ cu $A \neq B$.
**I.3** $\exists A, B, C$ necoliniare.
**I.4** $\forall A, B, C$ necoliniare $\exists!$ $\pi$ a.î. $A, B, C \in \pi$. Notăm $\pi = (ABC)$.
**I.5** $\forall \pi$ $\exists A \in \pi$.
**I.6** Fie $d$ şi $\pi$. Dacă $\exists A, B \in d$ a.î. $A, B \in \pi$ atunci $d \subset \pi$.
**I.7** Fie $\alpha, \beta$ şi $A$ a.î. $A \in \alpha$ şi $A \in \beta$. Atunci $\exists B \neq A$ a.î. $B \in \alpha$ şi $B \in \beta$.
**I.8** $\exists A, B, C, D$ necoplanare.

Prezentăm câteva consecinţe importante ale acestor axiome:

**Poziţia relativă două puncte**

Fie $A$ şi $B$. Avem una şi doar una din situaţiile următoare:
1) coincid: $A = B$,
2) sunt distincte: $A \neq B$.

**Propoziţia 1.2** *Fie $d$ şi $\pi$.*
(i) $\exists A \notin d$.
(ii) $\exists B \notin \pi$.

**Demonstraţie** (i) RA contrazice I.3. (ii) RA contrazice I.8. $\square$

**Definiţia 1.3** $A$ îl numim *punct exterior dreptei* $d$ iar $B$ îl numim *punct exterior planului* $\pi$.

**Poziţia relativă a unui punct faţă de o dreaptă**

Fie $A$ şi $d$. Avem una şi doar una din situaţiile următoare:
1) $A \in d$,
2) $A$ exterior lui $d$; notăm $A \notin d$.

**Poziţia relativă a unui punct faţă de un plan**

Fie $A$ şi $\pi$. Avem una şi doar una din situaţiile următoare:
1) $A \in \pi$,
2) $A$ exterior lui $\pi$; notăm $A \notin \pi$.

**Propoziţia 1.4** *Două drepte diferite au cel mult un punct comun.*

**Demonstraţie** RA, fie $A, B \in d$ a.î. $A, B \in d'$ şi $A \neq B$. Conform I.1 avem $d = AB = d'$ fals. $\square$

**Definiţia 1.5** Fie dreptele distincte $d, d'$.
(i) Dacă $A$ este unicul punct comun al dreptelor date spunem că $d, d'$ sunt *concurente* sau *secante* în $A$ iar $A$ îl numim *punctul de concurenţă* sau *de intersecţie* al acestor drepte.
(ii) Dacă dreptele date nu au puncte comune le numim *nesecante.*
(iii) Dacă dreptele date sunt nesecante şi coplanare le numim *paralele* şi notăm $d \parallel d'$ cu negaţia $d \nparallel d'$.

**Poziţia relativă a două drepte**

Două drepte sunt în una singura din posibilităţile următoare:
1) coincid,
2) sunt concurente,
3) sunt nesecante în plane diferite. Uneori, astfel de drepte sunt numite *antiparalele.*
4) sunt paralele.

**Propoziţia 1.6** *Fie dreapta $d$ neinclusă în planul $\pi$. Atunci $d$ şi $\pi$ au cel mult un punct comun.*

**Demonstraţie** RA, pp. că $d$ şi $\pi$ au două puncte distincte comune $A, B$. Din I.1 $d = AB$ iar din I.6 $d \subset \pi$ fals. $\square$

**Definiţia 1.7** Fie $d$ şi $\pi$.
(i) Dacă $d$ şi $\pi$ au comun doar punctul $A$ spunem că $d$ şi $\pi$ sunt *secante* sau *incidente* în $A$ iar $A$ îl numim *punctul de intersecţie* dintre $d$ şi $\pi$.
(ii) Dacă $d$ şi $\pi$ nu au puncte comune spunem că sunt *paralele* şi notăm $d \parallel \pi$ cu negaţia $d \nparallel \pi$.

**Poziţia relativă a unei drepte faţă de un plan**

Dreapta $d$ şi planul $\pi$ sunt în una singură din variantele următoare:
1) $d \subset \pi$,
2) sunt secante,
3) $d \parallel \pi$.

**Propoziţia 1.8** *Fie planele $\pi, \pi'$ distincte şi punctul $A$ comun. Atunci $\exists d \ni A$ comună celor două plane.*

**Demonstraţie** Cf. I.7 există punctul $B \neq A$ comun celor două plane. Fie $d = AB$ conform I.1. Din I.6 avem concluzia. $\square$

**Definiţia 1.9** Fie planele distincte $\pi, \pi'$.
(i) Dacă cele două plane au dreapta $d$ comună atunci le numim *secante*.
(ii) Dacă cele două plane nu au puncte comune le numim *paralele* şi notăm $\pi \parallel \pi'$ cu negaţia $\pi \nparallel \pi'$.

**Poziţia relativă a două plane**

Planele $\pi, \pi'$ sunt în una singură din variantele următoare:
a) $\pi = \pi'$,
b) sunt secante,
c) $\pi \parallel \pi'$.

În continuare studiem alte configuraţii remarcabile de puncte, drepte şi plane.

**Propoziţia 1.10** *Un plan are cel puţin 3 puncte necoliniare.*

**Propoziţia 1.11** *Date $A$ şi $d$ neincidente există şi este unic planul $\pi$ care le conţine.*

**Demonstraţie** Conform I.2 fie $B, C \in d$ distincte. Cum $A$ nu-i incident cu $d$ rezultă că $A, B, C$ sunt necoliniare şi aplicând I.3 există un unic plan $\pi$ ce le conţine. Din I.4 rezultă $d \subset \pi$ şi avem concluzia. $\square$

**Propoziţia 1.12** *Date dreptele concurente $d, d'$ există un unic plan ce le conţine.*

**Demonstraţie** Fie $A \in d$ ce nu aparţine lui $d'$. Pentru $A$ şi $d'$ aplicând propoziţia anterioară găsim $\pi$. Dacă $B$ este punctul comun celor două drepte avem că $B \neq A$ şi $B \in \pi$ ceea ce implică $d \subset \pi$. Unicitatea lui $\pi$ este consecinţa unicităţii amintite anterior. $\square$

**Propoziţia 1.13**
(i) *Planul dat de Propoziţia* 1.14 *este mulţimea punctelor pe drepte prin $A$ ce sunt sau secante sau paralele cu $d$.*
(ii) *Planul dat de* Propoziţia 1.15 *este mulţimea punctelor situate pe drepte ce intersectează pe $d$ şi $d'$ sau intersectează pe $d$ (sau $d'$) şi sunt paralele cu $d'$ (sau $d$).*

# 2 Axiomele de ordine

Ca şi în paragraful precedent introducem o serie de noţiuni ce simplifică expunerea:

**Definiţia 2.1** Fie $A, B$ distincte.
(i) Mulţimea $(AB) = \{M; A - M - B\}$ o numim *segment deschis de capete* $A, B$. Un punct $M$ aparţinând lui $(AB)$ îl numim *punct interior* segmentului iar un punct $M$ diferit de $A$ şi $B$ ce nu-i interior îl numim *punct exterior* segmentului.
(ii) Mulţimea $[AB] = (AB) \cup \{A, B\}$ o numim *segment închis* de capete $A, B$.
(iii) Spunem că o dreaptă $d$ *separă* punctele $A, B$ dacă $\exists M \in d$ interior segmentului $(AB)$.
(iv) Fie şi $C$ a.î. $A, B, C$ sunt necoliniare. Mulţimea $\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$ o numim *triunghi cu vârfurile* $A, B, C$ *şi laturile* $a = BC, b = CA, c = AB$.

**Axiomele de ordine**:
**II.1** Dacă are loc $A - B - C$ atunci $A, B, C$ sunt distincte, coliniare şi avem şi $C - B - A$.
**II.2** $\forall A, B$ cu $A \neq B$ $\exists C, D, E$ a.î. avem: $C - A - B, A - D - B, A - B - E$. Rezultă $(AB) \neq \varnothing$.
**II.3** Fie $A, B, C$ distincte şi coliniare. Există una şi doar una din situaţiile: $A - B - C, C - A - B, A - C - B$.
**II.4** (Axioma lui Pasch) Fie $A, B, C$ necoliniare şi $d \subset (ABC)$ ce nu conţine vârfurile $\Delta$-ului $ABC$. Dacă $d$ separă $B$ şi $C$ atunci $d$ separă $C$ şi $A$ sau $d$ separă $A$ şi $B$.

Consecinţe importante:
**Teorema 2.2** *Fie $d$ şi $O \in d$. Atunci există două mulţimi $d' \subset d, d'' \subset d$ şi numai două relativ la proprietăţile*:
i) $d' \cup d'' = d \setminus O$,
ii) *Fie $A, B \in d'$ şi $C, D \in d''$ perechi de puncte distincte. Atunci $O \notin (AB), O \notin (CD)$ şi $O \in (AC)$.*
**Definiţia 2.3** i) Mulţimile $d', d''$ se numesc *semidrepte deschise cu originea* $O$. Notăm $d' = (OA, d'' = (OC$.
ii) Reunind $O$ la o semidreaptă deschisă se obţine o *semidreaptă închisă*. Notăm $[OA = (OA \cup O, [OC = (OC \cup O$.
iii) Despre punctele semidreptei $(OA$ spunem că se găsesc *de aceeaşi parte* cu $A$ faţă de $O$. Punctele $A, C$ se găsesc *de părţi opuse* faţă de $O$. Semidreptele $d', d''$ le numim *opuse*.
iv) O reuniune de semidrepte închise cu aceeaşi origine $O$ o numim *unghi*

*cu vârful O*. Dacă semidreptele respective sunt $(OA, (OB$ notăm unghiul $\measuredangle AOB$ iar $(OA, (OB$ le numim *laturile unghiului*.
v) Dacă $(OA = (OB$ spunem că $\measuredangle AOB$ este *unghiul nul* iar dacă avem $A - B - C$ spunem că $\measuredangle AOB$ este *unghiul alungit* sau *cu laturile în prelungire*. Un unghi ce nu este nul sau alungit îl numim *propriu*.

**Teorema 2.4** *Fie $d \subset \pi$. Atunci există două mulţimi $\pi' \subset \pi, \pi'' \subset \pi$ şi numai două relativ la proprietăţile:*
i) $\pi' \cup \pi'' = \pi \setminus \{O\}$,
ii) *Fie $A, B \in \pi'$ şi $C, D \in \pi''$ perechi de puncte distincte. Atunci $d$ nu separă $a, B$, nu separă $C, D$ dar separă $A, C$.*

**Definiţia 2.5** i) $\pi', \pi''$ se numesc *semiplane deschise* ale lui $\pi$ determinate de $d$. Mai notăm $\pi' = (dA, \pi'' = (dC$.
ii) Toate punctele lui $\pi'$ le numim *de aceeaşi parte* cu $A$ faţă de $d$. Dacă $M \in \pi'$ şi $N \in \pi''$ spunem că $M$ şi $N$ sunt *în părţi opuse* faţă de $d$. Semiplanele $\pi', \pi''$ le numim *opuse*.
iii) Fie $\measuredangle AOB$. Mulţimea $Int\measuredangle AOB = (aB \cap (bA$ unde $a = OA, b = OB$ o numim *interiorul* unghiului dat.
iv) Două unghiuri proprii, cu acelaşi vârf, o latură comună şi interioare disjuncte le numim *adiacente*.
v) Două unghiuri adiacente cu laturile necomune opuse se numesc *suplementare*.
vi) Pentru $\Delta ABC$ unghiurile suplementare unghiurilor triunghiului se numesc *unghiuri exterioare*.
vii) Două unghiuri cu acelaşi vârf şi laturile câte două opuse se numesc *opuse la vârf*.

**Teorema 2.6** *Fie planul $\pi$. Există două mulţimi de puncte, $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$ şi numai două relativ la proprietăţile următoare*:
i) $\mathcal{S}' \cup \mathcal{S}'' = E_3 \setminus \pi$,
ii) *Fie $A, B \in \mathcal{S}'$ şi $C, D \in \mathcal{S}''$ perechi de puncte distincte. Atucni nu există puncte comune pentru $(AB)$ şi $\pi$, nici pentru $(CD)$ şi $\pi$ dar există puncte comune pentru $(AC)$ şi $\pi$.*

**Definiţia 2.7** i) $\mathcal{S}'$ şi $\mathcal{S}''$ se numesc *semispaţii deschise* definite de $\pi$. Mai notăm $\mathcal{S}' = (\pi A, \mathcal{S}'' = (\pi B$.
ii) Spunem că punctele din $\mathcal{S}'$ sunt *în părţi diferite* faţă de punctele din $\mathcal{S}''$.
iii)

# 3 Axiomele de congruenţă

**III.1** Dat segmentul $[AB]$ şi semidreapta $(A'X$, $\exists ! B' \in (A'X$ a.î. $[AB] \equiv [A'B']$.
**III.2** Congruenţa segmentelor este o relaţie de echivalenţă i.e. satisface:
a) *reflexivitatea*: $[AB] \equiv [AB]$,
b) *simetria*: $[AB] \equiv [CD] \Rightarrow [CD] \equiv [AB]$,
c) *tranzitivitatea*: $[AB] \equiv [CD]$ şi $[CD] \equiv [EF] \Rightarrow [AB] \equiv [EF]$.
**III.3** (adunarea segmentelor) Dacă avem $A - B - C$ si $A' - B' - C'$ a.î. $[AB] \equiv [A'B']$ şi $[BC] \equiv [B'C']$ atunci $[AC] \equiv [A'C']$.
**III.4** Fie unghiul $\measuredangle AOB$, dreapta $d$, semiplanul $\pi'$ delimitat de $d$ în planul $\pi$ şi semidreapta $(O'X$ pe $d$. Atunci $\exists !$ semidreapta $(O'Y$ în $\pi'$ a.î. $\measuredangle AOB \equiv \measuredangle XO'Y$.
**III.5** Fie $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ a.î. $[AB] \equiv [A'B'], [AC] \equiv [A'C'], \measuredangle A = \measuredangle A'$. Atunci $\measuredangle B \equiv \measuredangle B'$.

Consecinţe mai importante:

**Teorema 3.1** (Scăderea segmentelor) *Fie* $A, B, C$ *şi* $A', B', C'$ *a.î. avem* $A - B - C, A' - B' - C', [AB] \equiv [A'B'], [AC] \equiv [A'C']$. *Avem atunci* $[BC] \equiv [B'C']$.

**Demonstraţie**

# 4 Axiomele de continuitate

**Definiţia 4.1** i) Date segmentele $[AB], [CD]$ spunem că $[AB] < [CD]$ dacă $\exists X \in (CD)$ a.î. $[AB] \equiv [CX]$.
ii) Dat segmentul $[AB]$ nenul şi $n \in N^*$ prin $n[AB]$ înţelegem segmentul $[AB_n]$ unde $B_1 = B, [AB_1] \equiv [B_1B_2] \equiv \ldots \equiv [B_{n-1}B_n]$ şi $A - B_i - B_{i+1}$ pentru $0 \leq i \leq n-1$.

**Axiomele de continuitate**:
**IV.1** (axioma lui Arhimede) Pentru orice $A, B, C, D$ cu $A \neq B$ $\exists n \in N^*$ a.î. $n[AB] > [CD]$.
**IV.2** (axioma lui Cantor) Fie dreapta $d$ şi pentru orice $n \in N$ segmentul $s_n = [A_nB_n] \subset d$. Dacă:
i) $s_0 \supset s_1 \supset \ldots \supset s_n \supset \ldots$,
ii) nu există un segment nenul $[CD]$ inclus în toti $s_n$, atunci $\exists ! M$ interior tuturor segmentelor $s_n$.

# 5 Axioma paralelelor

**V** Dacă dreptele $d_1, d_2$ formează cu secanta $d$ unghiuri interne având suma mai mică decât $2dr$ atunci $d_1$ şi $d_2$ se intersectează de aceea parte a lui $d$ pentru care are loc inegalitatea precedentă.

**Afirmaţii echivalente cu axioma paralelelor**:
**1** (Varianta clasică) Fie $A$ exterior dreptei $d$. Atunci există o unică paralelă prin $A$ la $d$.
**2** (Farkas Bolyai) O perpendiculară şi o oblică pe aceeaşi dreaptă sunt concurente.
**3** (Farkas Bolyai) Orice triunghi admite cerc circumscris.
**4** Punctele situate în acelaşi semiplan determinat de dreapta $d$ şi situate la distanţe egale faţă de $d$ sunt coliniare.
**5** Relaţia de paralelism este tranzitivă.
**6** Teorema lui Pitagora a triunghiurilor dreptunghice.

Evident, există şi alte câteva zeci de afirmaţii echivalente cu axioma paralelelor.

În fapt, Euclid a formulat 5 postulate pe care le citám după monografia: John G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer, 1994, pagina 1:
1) A straight line may be drawn from any point to any other point.
2) A finite straight line may be extended continuously in a straight line.
3) A circle may be drawn with any center and any radius.
4) All right angles are equal.
5) If a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if extended indefinitely, meet on the side on which the angles are less than two right angles.

# 6 Seminarul 2. Perpendicularitate în spaţiu

**Definiţia 2.0** Dreapta $d$ se numeşte *perpendiculară* pe planul $\pi$, şi notăm $d \perp \pi$, dacă $d$ este perpendiculară pe orice dreaptă din $\pi$.

**Criteriul lui Euclid de perpendicularitate în spaţiu** Dacă dreapta $d = OP$ este perpendiculară pe dreptele distincte $OA, OB$ atunci $d \perp \pi = (OAB)$.

**Demonstraţie** Fie $a \in \pi$ arbitrară cu $O \in \pi$. Trebuie arătat că $d \perp a$. Presupunem că $d$ separă punctele $A$ şi $B$, în caz contrar considerând simetricele lor faţă de $O$. Fie deci $C = (AB) \cap a$. Deci trebuie arătat că $PQ \perp CO$ unde $Q$ este simetricul lui $P$ faţă de $\pi$. Cum $CO$ este mediană în $\Delta CPQ$ este suficient să arătăm că cest triunghi este isoscel cu $CP \equiv CQ$. Din ipoteză rezultă că în $\Delta APQ$ (respectiv $\Delta BPQ$) avem $AO$ (respectiv $BO$) mediană şi înălţime; deci $AP \equiv AQ$ ($BP \equiv BQ$). Din ($AP \equiv AQ, BP \equiv BQ, AB \equiv AB$) rezultă că $\Delta APB \equiv \Delta AQB$ (cazul LLL); deci $\measuredangle PA \equiv \measuredangle QAC$. Din ($PA \equiv QA, AC \equiv AC, \measuredangle PAC \equiv \measuredangle QAC$) rezultă $\Delta PAC \equiv \Delta QAC$ (cazul LUL) deci $CP \equiv CQ$ ceea ce voiam. $\square$

**E2.1** Fie $d \perp \pi$ cu $\{O\} = d \cap \pi$ şi $a \perp d$ cu $O \in a$. Atunci $a \subset \pi$.

**Demonstraţie** Cum două drepte secante determină în mod unic un plan, fie $\alpha$ planul determinat de $a$ şi $d$. Cum $O \in d$ rezultă $O \in \alpha$; dar aveam şi $O \in \pi$. Deci $\pi$ şi $\alpha$ au în comun o dreaptă $b$ ce conţine $O$. În planul $\alpha$ avem doă perpendiculare în $O \in d$ pe $d$ şi anume $a$ şi $b$; dar perpendiculara în plan este unică. Rezultă $a = b \subset \pi$. $\square$

**E2.2** Fie $O \in d$. Atunci există un unic plan $\pi$ cu $O \in \pi$ a.î. $d \perp \pi$.

**Demonstraţie** Fie $\alpha, \beta$ plane distincte ce conţin pe $d$. Fie $OA \subset \alpha, OB \subset \beta$ perpendiculare în $O$ pe $d$. Atunci $\pi = (OAB)$ conţine pe $O$ şi din criteriul Euclid avem $d \perp \pi$. Din problema precedentă vem unicitatea. $\square$

**E2.3** Fie $O \in \pi$. Atunci există o unică dreaptă $d$ conţinând $O$ perpendiculară pe $\pi$.

**Demonstraţie** Fie $a, b \subset \pi$ drepte concurente în $O$. Conform exerciţiului E2.2 fie $\alpha$ respectiv $\beta$ planul prin $O$ perpendicular pe $b$ respectiv $a$. Cum planele date au punctul $O$ comun rezultă că $\alpha$ şi $\beta$ se intersectează dupaă o dreaptă $d$. Avem $d \perp a, d \perp b$ şi criteriul Euclid spune că $d \perp \pi$. Unicitatea rezultă din construcţie. $\square$

**E2.4** Fie $P \notin \pi, d \subset \pi$ şi $A \in d$ a.î. $PA \perp d$. Fie $B \in \pi$ a.î. $AB \perp d$ şi $O \in \alpha = (PAB)$ a.î. $PO \perp AB$. Atunci $PO \perp \pi$.

**Demonstraţie** Fie $Q$ simetricul lui $P$ faţă de $O$. Ca la demonstraţia Criteriului Euclid avem $AP \equiv [AQ]$. Cum $d \perp AP, d \perp AB$ şi $AP, AB \subset \alpha$, din Criteriul Euclid avem $d \perp \alpha$. Din $A, Q \in \alpha$ rezultă $d \perp AQ$. Fie $\{M\} \in d \backslash \{A\}$. Deoarece $\Delta APM \equiv \Delta AQM$ (dreptunghice, $AP \equiv AQ$) avem $PM \equiv QM$ adică $\Delta MPQ$ este isoscel. În acest triunghi isoscel avem $OM$ mediană; deci $OM \perp PQ$. În concluzie, $PO \perp MO, PO \perp AO$ şi cum $A, M, O \in \pi$ aplicând Criteriul Euclid avem $PO \perp \pi$. $\square$

**E2.5** Dat punctul $P$ şi planul $\pi$ există o unică dreaptă prin $P$ perpendiculară pe $\pi$.

**Demonstraţie** Dacă $P \in \pi$ aplicăm E2.3. Dacă $P \notin \pi$ aplicăm E2.4 şi obţinem existenţa. Pentru unicitate, presupunem prin RA că există $O' \in \pi \backslash O$ a.î. $PO' \perp \pi$. Avem punctele necoliniare $P, O, O'$ ce determină planul $\alpha$; deci $\pi \cap \alpha = OO'$. În acest plan $\alpha$ avem din $P$ două perpendiculare distincte pe dreapta $OO'$, fals. $\square$

**E2.6** Fie $P \notin \pi, d \subset \pi$ şi punctele $A \in d, O \in \pi \setminus d$.
i) (Teorema celor 3 perpendiculare) Dacă $PO \perp \pi$ şi $OA \perp d$ atunci $PA \perp d$.
ii) (O reciprocă a th. celor 3 $\perp$) Dacă $PO \perp \pi$ şi $PA \perp d$ atunci $OA \perp d$.

**Demonstraţie** Din $PO \perp \pi$ rezultă $PO \perp d$ căci $d \subset \pi$.
i) $d \perp PO$ şi $d \perp OA$ implică $d \perp (POA)$ deci $d \perp AP$.
ii) $d \perp PO$ şi $d \perp PA$ implică $d \perp (POA)$ deci $d \perp OA$.
**Observaţie** O a doua reciprocă este E2.4

**Aplicaţii la Teorema celor 3 $\perp$**
**Lucru individual** Toate problemele din Manuale de clasa a VIII-a.

# References

[1] Albu, A. C.; Obădeanu, V.; Popescu, I. P.; Radó, F.; Smaranda, D., *Geometrie pentru perfecţionarea profesorilor*, EDP, Bucureşti, 1983.

[2] Cîmpan, Florica T., *Aventura geometriilor neeuclidiene*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1978.

[3] Haimovici, Adolf; Borş, Constantin, *Elemente de geometrie a spaţiului*, EDP, Bucureşti, 1970.

[4] Miron, Radu, *Geometrie elementară*, EDP, Bucureşti, 1968.

Faculty of Mathematics
University "Al. I. Cuza"
Iaşi, 6600,
Romania
E-mail: mcrasm@uaic.ro