Cuprins

Prefaţă

Matematica şi fizica sunt surori. Au acelaşi tată (Adevărul) şi aceeaşi mamă (Realitatea). Timpul istoriei le-a călăzit pe cărări mai mult sau mai puţin îndepărtate. De aceea, la mai bine de 300 de ani de la fundamentarea matematică a mecanicii de către Newton în a sa *Philosophiae naturalis principia mathematica*(1687), a scrie o noă carte despre frăţietatea matematică-fizică nu este un lucru uşor. Diversitatea subiectelor comune şi a tehnicilor de legătură creează o veritabilă "pădure de liane" sufocând realmente pe căutător. Cu atât mai dificilă este sarcina când publicul-ţintă al acelei cărţi se doresc a fi începători, în speţă studenţi ai primilor ani.

Din aceste motive cartea de faţă constituie o mixtură de instrumente matematice de natură diversă: algebrice, geometrice, analitice, necesare unei dualităţi (analoage celei de tip corpuscul-undă a luminii) la care trebuie să răspundă o monografie serioasă şi anume: complexitatea materialului avut în vedere/simplitatea cunoştinţelor cerute unui public "undergraduated" cât mai eterogen, adică studenţi ai ambelor facultăţi (de matematică respectiv fizică).

Dacă autorul a reuşit măcar o parte a demersului său didactic, doar cei ce vor folosi efectiv acest material pot decide. Asemeni seminţelor răspândite de semănător, cel ce a scris aceste rânduri speră ca din aceste seminţe ale Ştiinţei să se înfrupte cât mai mulţi.

Autorul îndeplineşteo datorie de onoare din a dedica această carte profesorilor de la Facultăţile de Matematică şi Fizică ale Universităţii "Al. I. Cuza" din Iaşi, de la care a învăţat el însuşi multe, foarte multe. Pe doar câţiva dintre ei îi vom numi efectiv datorită rolului imens avut în formarea ştiinţifică şi didactică a autorului:

– doamna profesoară Liliana Răileanu, călăuza primilor paşi în cătări de orice natură (ştiinţifice sau umane),

– domnul academician Radu Miron, conducătorul tezei de doctorat cu un subiect la graniţa dintre matematică şi fizică,

– domnii profesori Vasile Cruceanu şi Mihai Anastasiei, modele în predare ca şi mai sus pomeniţii,

– domnul profesor Gheorghe Zet, fizician de înaltă clasă.

Nu în ultimul rând, mii de mulţumiri lui Adrian Guria, cel ce a tehnoredactat manuscrisul într-un ritm record!

Lecţia 1

Preliminarii algebrice

Suport de curs

Fie $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ un corp comutativ ale cărui elemente le numim *scalari* şi le notăm cu litere greceşti. Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, notăm $M_{m,n}(\mathcal{K}) = \{A =$ matrice cu elemente din $\mathcal{K}$ având m linii şi n coloane $\}$; $M_{n,n}(\mathcal{K})$ o notăm $M_n(\mathcal{K})$. O matrice $A \in M_{m,n}(\mathcal{K})$ o notăm $A = (a^i_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ folosind deci următoarea convenţie: indicele superior reprezintă linia, iar indicele inferior coloana:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}.$$

Definiţia 1.1

I. Numim *$\mathcal{K}$-spaţiu vectorial* (sau *linear*) un triplet $(V, +, \cdot)$ unde:

- V este o mulţime nevidă ale cărei elemente le numim *vectori* şi le notăm cu litere latine,
- $+ : V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$ este o lege de compoziţie internă pe V numită *adunarea vectorilor* a.î. $(V, +)$ este grup abelian. Notăm 0_V elementul neutru al acestui grup şi-l numim *vectorul nul*,
- $\cdot : \mathcal{K} \times V \to V$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ este o lege de compoziţie externă pe V numită *înmulţirea cu scalari a vectorilor* ce satisface axiomele:

  i) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \forall \lambda \in \mathcal{K},\ \forall x, y \in V$

ii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K},\ \forall x \in V$

iii) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K},\ \forall x \in V$

iv) $1_{\mathcal{K}} \cdot x = x, \quad \forall x \in V.$

Dacă $\mathcal{K}$ este numai inel comutativ spunem că V este un $\mathcal{K}$-*modul*.

II. Un sistem finit de vectori $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ îl numim:

a) *sistem de generatori* dacă $\forall x \in V\ \exists x^1, \dots, x^n \in \mathcal{K}$ a.î. $x = x^1 v_1 + \cdots + x^n v_n$, adică x se exprimă ca o *combinaţie liniară* de vectori din B. Relaţia precedentă o vom scrie $x = x^i v_i$ folosind *regula Einstein* (a indicelui mut): dacă un indice apare într-o expresie odată sus şi odată jos atunci sumăm acea expresie după toate valorile acelui indice. Folosind convenţia de la matrici rezultă că avem asocierea:

$$x \xrightarrow{B} X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathcal{K}).$$

Această asociere este evident surjectivă; cu ipoteza următoare va deveni injectivă şi deci bijecţie.

b) *liniar independent* dacă relaţia $\lambda^1 v_1 + \cdots \lambda^n v_n = 0_V$ implică $\lambda^1 = \cdots = \lambda^n = 0_{\mathcal{K}}$. În caz contrar spunem că sistemul dat este *liniar dependent*.

c) *bază* dacă este sistem de generatori şi este liniar independent.

III. O submulţime $V' \subset V$ o numim *subspaţiu vectorial în* V dacă $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{K}$ şi $\forall x, y \in V'$ avem $\lambda x + \mu y \in V'$.

IV. Fie V, W două $\mathcal{K}$-spaţii liniare şi $T : V \to W$. Spunem că T este o *transformare liniară* (sau *operator liniar*) dacă $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{K}$ şi $\forall x, y \in V$ avem $T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty$. Notăm $L(V, W)$ mulţimea operatorilor liniari, respectiv $L(V)$ dacă $V = W$. Un operator liniar bijectiv îl numim *izomorfism liniar*; în acest caz spunem că V şi W sunt *izomorfe*.

V. Un $\mathcal{K}$-spaţiu vectorial înzestrat cu o înmulţire $\cdot : V \times V \to V$ ce satisface legea de distributivitate faţă de adunare $x(\lambda y + \mu z) = \lambda xy + \mu xz$, $(\lambda x + \mu y)z = \lambda xz + \mu yz$, $\forall x, y, z \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{K}$ îl numim $\mathcal{K}$-*algebră*. Dacă înmulţirea este *asociativă* (*comutativă*) i.e. $x(yz) = (xy)z$ $(xy = yx)$ spunem că V este o algebră asociativă (comutativă). Dacă înmulţirea satisface:

v) *anticomutativitate* (sau *antisimetrie*) $xy = -yx$ (echivalent $x^2 = xx = 0_V$ dacă char $\mathcal{K} \neq 2$; spre exemplu $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$).

vi) *identitatea Jacobi* $x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0_V \quad \forall x, y, z \in V$

spunem că V este o *algebră Lie*.

VI. Dacă V este $\mathcal{K}$-algebră şi $V' \subset$ spunem că V' este *subalgebră* dacă $\lambda x + \mu y \in V'$ şi $x \cdot y \in V'$, $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{K}$ şi $\forall x, y \in V'$.

Observaţii 1

i) Fie $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un sistem liniar dependent; deci $\exists \lambda^1, \ldots \lambda^n \in \mathcal{K}$ *nu toţi nuli* a.î. $\lambda^i v_i = 0_V$. Dacă presupunem $\lambda^i \neq 0_{\mathcal{K}}$ atunci $v_i = -(\lambda^i)^{-1}(\lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^{i-1} v_{i-1} + \lambda^{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda^n v_n)$ i.e. vectorul v_i este combinaţie liniară de ceilalţi vectori. În particular, dacă $n = 2$, rezultă că un vector este multiplu de celălalt. Doi vectori x, y cu $y = \lambda x$, $\lambda \in K$ îi numim *coliniari*.

ii) Dacă $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ este bază rezultă că $\forall x \in V$ admite o descompunere *unică* $x = x^i v_i$. Scalarii $(x^1, \ldots, x^n)$ îi numim *coordonatele* lui x în raport cu baza B.

iii) Dacă $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\widetilde{B} = \{\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_m\}$ sunt baze în V se arată că $n = m$. Deci pentru un spaţiu vectorial dat există un număr fix al vectorilor dintr-o bază oarecare. Acest număr îl numim *dimensiunea peste* $\mathcal{K}$ *a lui* V şi-l notăm $\dim_{\mathcal{K}} V$; mai notăm V_n. Se arată că n este numărul maxim de vectori liniar independenţi din V.

iv) $L(V, W)$ este $\mathcal{K}$-spaţiu vectorial şi dacă $\dim_{\mathcal{K}} V = n$, $\dim_{\mathcal{K}} W = m$ atunci $\dim_{\mathcal{K}} L(V_n, W_m) = nm$. Mai precis, fie $B_V = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $B_W = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze în V_n, W_m şi $T \in L(V_n, W_m)$ oarecare. Vectorul $T(e_i)$ admite descompunerea unică $T(e_i) = a_i^j f_j$, $a_i^j \in \mathcal{K}$ în baza B_W; deci lui T îi asociem $A_T \in M_{m,n}(\mathcal{K})$ cu $A_T = (a_i^j)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}$. Datorită unicităţii descompunerii avem că această asociere este o bijecţie şi deci $L(V_n, W_m)$ se identifică cu $M_{m,n}(\mathcal{K})$ via bijecţia:

$$T \longrightarrow A_T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T(e_1) & T(e_2) & & T(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \end{array}.$$

La rândul său $M_{m,n}(\mathcal{K})$ se identifică cu $\mathcal{K}^{nm}$ via bijecţia $A = (a_i^j) \to (a_1^1, \ldots, a_n^m)$. Faptul că $\mathcal{K}^{nm}$ este $\mathcal{K}$-spaţiu vectorial de dimensiune nm rezultă din următorul exemplu:

Exemplul 1 (fundamental)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $V = \mathcal{K}^n = \underbrace{\mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n \text{ ori}}$ în care definim:

$$\begin{aligned} x + y &= (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n), \quad \text{dacă } x = (x^1, \ldots, x^n),\ y = (y^1, \ldots, y^n) \\ \lambda x &= (\lambda x^1, \ldots, \lambda x^n) \end{aligned}.$$

Se verifică imediat axiomele de $\mathcal{K}$-spaţiu vectorial. Fie $B_c = \{e_1, \ldots, e_n\}$, unde $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ cu $1 (= 1_{\mathcal{K}})$ pe locul i. Rezultă imediat că B_c este o bază pe $\mathcal{K}^n$ numită *bază canonică*; deci $\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^n = n$. Coordonatele lui $x \in \mathcal{K}^n$ în raport cu B_c sunt exact componentele (x^i) ale lui x. Vectorul nul este $\overline{0} = (0, \ldots, 0)$.

Observaţii:

- În particular pentru $n = 1$, rezultă că $\mathcal{K} (= \mathcal{K}^1)$ este $\mathcal{K}$-spaţiu vectorial 1-dimensional. Astfel, pentru $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ avem $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$. Dar $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, deci $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$; de aici rezultă importaţa corpului de scalari şi faptul că o aceeaşi mulţime poate fi înzestrată cu structură de spaţiu vectorial peste mai multe corpuri.

- Datorită observaţiei precedente şi a observaţiei 1,*iv*) putem considera $\mathcal{K}$-spaţiul $L(V, \mathcal{K})$ notat V^* şi numit *dualul lui* V; deci $\dim_{\mathcal{K}} V^* = n \cdot 1 = n$. Fie $B = \{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ bază în V_n şi fie $B^* = \{e^j\}_{1 \leqslant j \leqslant n} \subset V^*$ unde $e^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1_{\mathcal{K}} & i = j \\ 0_{\mathcal{K}} & i \neq j \end{cases}$ (simbolul Kroneker). Avem că B^* este bază în V^* numită *duala bazei* B.

- $M_n(\mathcal{K})$ este o $\mathcal{K}$-algebră relativ la înmulţirea matricilor pătratice. O bază este $\{E_j^i\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ cu E_j^i conţinând doar $1_{\mathcal{K}}$ pe linia i şi coloana j şi în rest $0_{\mathcal{K}}$. $\mathcal{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ este $\mathcal{K}$-algebră asociativă şi comutativă cu înmulţirea uzuală a numerelor reale, respectiv complexe.

Schimbări de baze şi coordonate în V_n

Propoziţia 1.1

Fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ sistem liniar independent în V_n. Atunci B este bază.

Demonstraţie: Să arătăm că B este sistem de generatori. Fie $x \in V_n$ oarecare. Conform observaţiei 1, *iii*) sistemul $\{e_1, \ldots, e_n, x\}$ este liniar dependent deci $\exists \lambda^1, \ldots, \lambda^n$, $\lambda \in \mathcal{K}$ nu toţi nuli a.î. $\lambda^1 e_1 + \cdots + \lambda^n e_n + \lambda x = 0_V$. Dacă presupunem $\lambda = 0_{\mathcal{K}}$ ar rezulta $\lambda^i e_i = 0_V$ şi din liniar independenţa lui B obţinem $\lambda^1 = \cdots = \lambda^n = 0_{\mathcal{K}}$, contradicţie. Deci $\lambda \neq 0_V$ şi deci conform observaţiei 1, *i*) x este combinaţie liniară de $e_1, \ldots, e_n$. ■

Fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ bază în V_n şi sistemul de vectori $\{v_1, \ldots, v_k\}$, $k \leqslant n$. Descompunem $v_j = s^i_j e_i$, $1 \leqslant j \leqslant k$; obţinem matricea

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \ldots & v_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} s^1_1 & s^1_2 & \ldots & s^1_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^n_1 & s^n_2 & \ldots & s^n_k \end{pmatrix} \end{array} \in M_{n,k}(\mathcal{K}).$$

Se arată că $\{v_1, \ldots, v_k\}$ este sistem liniar independent dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} S = k$ (=maxim posibil). În consecinţă, dacă $k = n$ avem că $\{v_1, \ldots, v_n\}$ este bază în $V_n \iff \operatorname{rang} S = n \iff \det S \neq 0_{\mathcal{K}}$ i.e. S este inversabilă sau încă $S \in GL(n, \mathcal{K}) = \{A \in M_n(\mathcal{K});\ A \text{ inversabilă}\}$. $GL(n, \mathcal{K})$ este grup relativ la înmulţirea matricilor, numit *n-grupul liniar general peste* $\mathcal{K}$; element neutru este matricea unitate

$$I_n = \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{K}} & & \\ & \ddots & \\ & & 1_{\mathcal{K}} \end{pmatrix}$$

(ştim că înmulţirea matricilor este asociativă şi pentru $A \in GL(n, \mathcal{K})$ există evident $A^{-1} \in GL(n, \mathcal{K})$ inversa lui A) (exemplu: $GL(1, \mathcal{K}) = \mathcal{K}^* = \mathcal{K} \backslash \{0_{\mathcal{K}}\}$).

Fie $B = \{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $\widetilde{B} = \{\widetilde{e}_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ baze în V_n şi $S \in GL(n, \mathcal{K})$ matricea construită anterior; notăm $\widetilde{B} = S(B)$ şi numim *S matricea de trecere de la baza B la $\widetilde{B}$*. Avem imediat că $B = S^{-1}(\widetilde{B})$. Fie $x \in V_n$ oarecare având coordonatele $X = X_B = (x^i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $\widetilde{X} = X_{\widetilde{B}} = (\widetilde{x}^j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$.

Avem descompunerea $x = x^i e_i = \widetilde{x}^j (s^i_j e_i) = (\widetilde{x}^j s^i_j) e_i \overset{(*)}{=} (s^i_j \widetilde{x}^j) e_i$, unde am folosit comutativitatea înmulţirii în $\mathcal{K}$ la pasul $(*)$. Datorită unicităţii descompunerii în baza B rezultă $x^i = s^i_j \cdot \widetilde{x}^j$ ceea ce, ţinând cont de regula indicilor pentru elementele unei matrici (cel de sus=linia, cel de jos=coloana) şi de regula înmulţirii a două matrici spune că avem relaţia (linia) i din egalitatea;

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \widetilde{x}^1 \\ \vdots \\ \widetilde{x}^n \end{pmatrix}$$

adică $X = S\widetilde{X}$. În concluzie coordonatele "noi" ($\widetilde{X}$) se exprimă în funcţie de cele "vechi" (X) prin: $\widetilde{X} = S^{-1} X$.

Cum $S \in GL(n, \mathcal{K})$ avem $\det S \neq 0$. Dacă $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ avem cazurile:

– $\det S > 0$; spunem că B şi $\widetilde{B}$ sunt baze *la fel orientate*;

– $\det S < 0$; spunem că B şi $\widetilde{B}$ sunt baze *contrar orientate*.

Produse scalare, norme

Considerăm în această secţiune $\mathcal{K}$ unul din corpurile $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ şi aplicaţia $\overline{}: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ dată de $\overline{x} = x$ dacă $x \in \mathbb{R}$ şi $\overline{x} = a - bi$ dacă $x = a + bi$ când $\mathcal{K} = \mathbb{C}$; această aplicaţie o numim *conjugare*. Considerând $\mathcal{K}$ drept $\mathcal{K}$-spaţiu vectorial avem că $\overline{} \in L(\mathcal{K})$; mai mult, $\mathcal{K}$ este chiar $\mathcal{K}$-algebră şi relativ la înmulţire avem $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$. Această aplicaţie este o *involuţie* în sensul că $\overline{\overline{}} = 1_{\mathcal{K}}$; avem şi $x \cdot \overline{x} = |x|^2 \in \mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R}; a \geqslant 0\}$.

Definiţia 1.2
Fie V un $\mathcal{K}$-spaţiu vectorial; numim *produs scalar* pe V o aplicaţie $\langle\, ,\, \rangle : V \times V \to \mathcal{K}$ satisfăcând:

$PS_1)$ $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in V$; $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_V$

$PS_2)$ $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \quad \forall x, y \in V$

$PS_3)$ $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle, \quad \forall x, y, z \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K}$.

Vectorii $x, y \in V$ îi numim *ortogonali* (sau *perpendiculari*) şi notăm $x \perp y$ dacă $\langle x, y\rangle = 0$. Baza $B = \{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ din V_n o numim *ortonormată* dacă $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_i^j$. Numim *normă* pe V o aplicaţie $\| \cdot \|: V \to \mathbb{R}_+$ cu proprietăţile

$N_1)$ $\| x \| \geqslant 0, \quad \forall x \in V$; $\| x \| = 0 \iff x = 0_V$,

$N_2)$ $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \| \quad \forall x \in V,\ \forall \lambda \in \mathcal{K}$,

$N_3)$ $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \| \quad \forall x, y \in V$.

Vectorul $x \in V$ îl numim *versor* dacă $\| x \| = 1$.

Observaţii:
Un produs scalar induce o normă via relaţia $\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Într-o bază ortonormată avem versori ortogonali doi câte doi.

Exemplul 2 (fundamental)
Fie $\langle\, ,\, \rangle : \mathcal{K}^n \times \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}$, $\langle x, y\rangle = x^1\overline{y}^1 + \cdots + x^n\overline{y}^n$; se verifică imediat axiomele PS. Norma indusă este $\| x \| = \sqrt{|x^1|^2 + \cdots + |x^n|^2}$. Acest produs scalar îl numim *euclidian* când $\mathcal{K} = \mathbb{R}$,

respectiv *hermitian* când $\mathcal{K} = \mathbb{C}$; norma indusă o numim *euclidiană*, respectiv *hermitiană*. Cu notaţia uzuală

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

avem, folosind din nou comutativitatea din $\mathcal{K}$ şi relaţia $\langle x, y\rangle = {}^t\overline{y} \cdot x$, unde ${}^tA$ este transpusa matricii A, iar $\overline{A}$ este conjugata lui A i.e. matricea având conjugatele elementelor lui A. Baza canonică $B_c = \{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ este ortonormată în raport cu acest produs scalar.

Definiţia 1.3

– $T \in L(\mathbb{R}^n)$ o numim *transformare ortogonală* dacă invariază produsul scalar euclidian: $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

– $T \in L(\mathbb{C}^n)$ o numim *transformare unitară* dacă invariază produsul scalar hermitian: $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$

Pentru $T \in L(\mathcal{K}^n)$ fie $A = A_T \in M_n(\mathcal{K})$ matricea asociată în raport cu baza canonică B_c; deci $T(x) = A \cdot x$. Deci în definiţia anterioară avem că $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in \mathcal{K}^n$. Cu expresia $\langle x, y\rangle = {}^t\overline{y} \cdot x$ avem:

$$\langle Ax, Ay\rangle = {}^t(\overline{Ay}) \cdot Ax = {}^t(\overline{A}\overline{y})Ax = {}^t\overline{y}{}^t\overline{A}Ax = {}^t\overline{y}x, \quad \forall x, y \in \mathcal{K}^n$$

ceea ce înseamnă ${}^t\overline{A} \cdot A = I_n$. Spunem că $A \in M_n(\mathbb{R})$ (respectiv $M_n(\mathbb{C})$) este *matrice ortogonală* (respectiv *matrice unitară*) dacă transformarea liniară asociată $T(x) = Ax$ este ortogonală (respectiv unitară). Fie $O(n)$, respectiv $U(n)$, mulţimea tuturor matricelor ortogonale, respectiv unitare. Am obţinut:

– $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); {}^tA \cdot A = I_n\}$

– $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}); {}^t\overline{A} \cdot A = I_n\}$.

$O(n)$ şi $U(n)$ sunt grupuri relativ la înmulţirea matricilor. Doar pentru $n = 1$ acestea sunt grupuri abeliene; se vedea exerciţiul S1.6.

Seminar

S 1.1

Să se arate că $\widetilde{B} = \{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3\}$ este bază în $\mathbb{R}^3$ unde $\widetilde{e}_1 = (1,1,0)$, $\widetilde{e}_2 = (1,0,1)$, $\widetilde{e}_1 = (0,1,1)$ şi se cer coordonatele vectorului $v = (1,1,1)$ în această bază.

Rezolvare: Conform teoriei de la cursul 1 trebuie studiată inversabilitatea matricii:

$$S = \begin{array}{c} \begin{matrix} \widetilde{e}_1 & \widetilde{e}_2 & \widetilde{e}_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Deoarece $\det S = -1 - 1 = -2 \neq 0$ rezultă că $\widetilde{B}$ este bază contrar orientată bazei canonice. Avem:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \widetilde{X} = S^{-1}X$$

unde:

$$S^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

în concluzie:

$$\widetilde{X} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultatul se poate verifica direct: $v = \frac{1}{2}(\widetilde{e}_1 + \widetilde{e}_2 + \widetilde{e}_3)$. ■

S 1.2 (Unghiul dintre doi vectori nenuli)

Fie x, y din spaţiul cu produs scalar $(V, \langle\, ,\, \rangle)$. Dacă $x, y \neq 0_V$ definim unghiul $\theta = \theta(x, y)$ dintre vectorii x, y prin:

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\| x \| \| y \|}.$$

De ce se preferă cosinus pentru a determina un unghi şi nu funcţia sinus? (să se argumenteze relativ la semnele acestor funcţii).

Se cere unghiul dintre vectorii $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{e}_j$, $i \neq j$ de la problema S 1.1.

Rezolvare: $\langle \widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j \rangle = 1$, $\| \widetilde{e}_i \| = \| \widetilde{e}_j \| = \sqrt{2}$ deci $\theta = \frac{\pi}{3}$. ■

S 1.3 (Produsul vectorial, produsul mixt)

Fie în $\mathbb{R}^3$ cu baza canonică renotată $B_c\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ aplicaţia produs vectorial definită de expresia:

$$x \times y = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix}$$

unde determinantul se dezvoltă după prima linie. Să se arate proprietăţile:

i) $x \times x = \overline{0}$ şi $x \times y = -y \times x$; reciproc, dacă $x \times y = \overline{0}$ atunci vectorii x, y sunt coliniari;

ii) $(\lambda x + \mu y) \times z = \lambda x \times z + \mu y \times z$; folosind *ii)* obţinem şi liniaritatea în al doilea argument. Deci $\times$ este aplicaţie biliniară antisimetrică;

iii) $x \times y \perp x$ şi $x \times y \perp y$, deci dacă x şi y sunt necoliniari atunci $\{x, y, x \times y\}$ este o bază (în general neortonormată). Deoarece $\| x \times y \| = \| x \| \| y \| \sin\theta$ avem că $\{x, y\}$ sistem ortonormat implică $\{x, y, x \times y\}$ bază ortonormată.

iv) $(\mathbb{R}^3, \times)$ este algebră Lie.

Aplicaţia $(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) = \langle x, y \times z \rangle$ o numim *produs mixt*. Avem invarianţa la permutări circulare $(x, y, z) = (y, z, x) = (z, x, y)$. Avem următorul tabel:

operaţia	semnificaţia geometrică	mărimea corespunzătoare
produs scalar	ortogonalitate	lungime
produs vectorial	coliniaritate	arie
produs mixt	coplanaritate	volum

Avem:

- dacă $(x, y, z) = 0$ atunci vectorii x, y, z sunt în acelaşi plan spunem că x, y, z sunt coplanari;
- $\| x \times y \| =$ aria paralelogramului cu laturile adiacente x, y;
- $|(x, y, z)| =$ volumul paralelipipedului cu laturile adiacente x, y, z.

Se cer $\widetilde{e}_i \times \widetilde{e}_j$, $i \neq j$ şi $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3)$ cu vectorii de la S 1.1.

Rezolvare:

$$\widetilde{e}_1 \times \widetilde{e}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,-1), \quad \widetilde{e}_2 \times \widetilde{e}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,1)$$

$$\widetilde{e}_3 \times \widetilde{e}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,-1)$$

$(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3) = \det S$ (de la S 1.1) $= -2$. Deci baza $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3)$ este contrar orientată bazei canonice $B_c = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$. Peste tot am notat $\bar{i} = e_1 = (1,0,0)$, $\bar{j} = e_2 = (0,1,0)$, $\bar{k} = e_3 = (0,0,1)$ şi aceeaşi notaţie o vom folosi mereu la $\mathbb{R}^3$. În $\mathbb{R}^2$ vom folosi mereu notaţia $\bar{i} = \bar{e}_1 = (1,0)$, $\bar{j} = \bar{e}_2 = (0,1)$.

■

S 1.4 (Determinantul, urma, polinomul caracteristic, diagonalizarea)
Să se arate următoarele proprietăţi ale determinantului:

i) $\det({}^tA) = \det A$

ii) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ şi să se deducă de aici că dacă $S \in GL(n, \mathcal{K})$ atunci $\det S^{-1} = (\det S)^{-1}$.

Funcţia $\operatorname{tr} : M_n(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}$, $\operatorname{tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^i$ o numim *urma* lui A. Să se arate că:

iii) $\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr} A + \mu \operatorname{tr} B$ i.e. tr este operator liniar între $\mathcal{K}$-spaţiile vectoriale $M_n(\mathcal{K})$ şi $\mathcal{K}$ sau încă $\operatorname{tr} \in (M_n(\mathcal{K}))^*$

iv) $\operatorname{tr}({}^tA) = \operatorname{tr} A$ şi $\operatorname{tr}(\overline{A}) = \overline{\operatorname{tr} A}$

v) $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA)$; să se deducă că $S \in GL(n, \mathcal{K}) \Rightarrow \operatorname{tr}(SAS^{-1}) = \operatorname{tr} A$

vi) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ din $C = I_n$ în *v)*.

O matrice A pentru care ${}^tA = A$ (${}^tA = -A$) o numim *simetrică* (*antisimetrică*).

Fixăm $A \in M_n(\mathcal{K})$. Funcţia $P_A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ o numim *polinom caracteristic* al lui A. Să se arate că

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + (-1)^n \det A$$

unde p_i este $(-1)^i \cdot$ (suma minorilor principali pătratici de ordin i din A). În particular $p_1 = -\operatorname{tr} A$.

Rădăcinile lui P_A le numim *rădăcini caracteristice* ale lui A, iar rădăcinile caracteristice din $\mathcal{K}$ le numim *valori proprii ale lui A*.

A o numim *diagonalizabilă* dacă există $S \in GL(n, \mathcal{K})$ a.î. $SDS^{-1} = A$ unde D are forma diagonală

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Criteriul general de diagonalizare:

vii) toate rădăcinile caracteristice sunt valori proprii,

viii) fie λ_i o valoare proprie oarecare. Trebuie ca multiplicitatea lui $\lambda_i = \dim_{\mathcal{K}} V(\lambda_i)$ unde $V(\lambda_i) = \{x \in \mathcal{K}^n; Ax = \lambda_i x\}$ este subspaţiul propriu corespunzător lui λ_i.

Să se arate că matricea S de la S 1.1 este diagonalizabilă. Se cere $\operatorname{tr} S$, $\operatorname{tr} S^{-1}$.

Rezolvare:

$$P_S(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1) - (1-\lambda) = (\lambda^2-\lambda-2)(1-\lambda)$$

Deci S are rădăcinile caracteristice $1, -1, 2$ care, aparţinând lui $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, sunt valori proprii.

$V(\lambda_1) : \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^1 + x^3 = x^2 \end{cases}$. Deci $v_1 = (1, 0, -1)$.

$V(\lambda_2) : \begin{cases} 2x^1 + x^2 = 0 \\ x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases}$. Deci $v_2 = (1, -2, 1)$.

$V(\lambda_3) : \begin{cases} x^1 = x^2 \\ x^2 = x^3 \end{cases}$. Deci $v_3 = (1, 1, 1)$.

Rezultă că $S = CDC^{-1}$, unde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad \text{iar} \quad C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Avem

$$C^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tr} S = 2,\ \operatorname{tr} S^{-1} = \frac{1}{2}$$

folosind expresia lui S^{-1} de la S1.1. ■

S 1.5 (Produsul scalar şi norma Hilbert-Schmidt)

Fie $\mathcal{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ şi $\langle\, , \rangle : M_{m,n}(\mathcal{K}) \times M_{m,n}(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}$, $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^t\overline{B} \cdot A)$. Să se arate că $\langle\, , \rangle$ este un produs scalar pe $M_{m,n}(\mathcal{K})$ ce generalizează produsul scalar euclidian (când $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, $n = 1$) respectiv produsul scalar hermitian (când $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $n = 1$). Interpretări pentru $O(n)$ şi $U(n)$.

Rezolvare: $\operatorname{tr}({}^t\overline{A} \cdot A) = \sum\limits_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} |a^i_j|^2 \geqslant 0$; $\operatorname{tr}({}^t\overline{A} \cdot A) = 0 \iff A = O_{m,n}$ = matricea nulă.

$$\overline{\langle B, A\rangle} = \overline{\operatorname{tr}({}^t\overline{A} \cdot B)} = \operatorname{tr} \overline{{}^t\overline{A} \cdot B} = \operatorname{tr}({}^t\overline{\overline{A}} \cdot \overline{B}) = \operatorname{tr}({}^tA \cdot \overline{B}) = \operatorname{tr}({}^t({}^tA \cdot \overline{B})) = \operatorname{tr}({}^t\overline{B} \cdot A) = \langle A, B\rangle.$$

Liniaritatea în primul argument rezultă imediat din liniaritatea urmei.

Dacă $n = 1$ avem $x, y \in M_m(\mathcal{K})$ şi $\langle x, y\rangle = \operatorname{tr}({}^t\overline{y} \cdot x) = {}^t\overline{y} \cdot x$ căci ${}^t\overline{y} \cdot x$ este un scalar, deoarece ${}^t\overline{y} \in M_{1,n}(\mathcal{K})$ şi $x \in M_{n,1}(\mathcal{K})$ implică ${}^t\overline{y} \cdot x \in M_{1,1}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Deci produsul scalar Hilbert-Schmidt generalizează produsul scalar euclidian şi cel hermitian.

Fie $A \in U(n)$, în particular $A \in O(n)$ dacă $\mathcal{K} = \mathbb{R}$. Avem $\| A \|^2 = \langle A, A\rangle = \operatorname{tr}({}^t\overline{A} \cdot A) = \operatorname{tr} I_n = n$. Deci dacă pentru un spaţiu cu produs scalar $(V, \langle\, , \rangle)$ şi $r > 0$ notăm $S_r(V, \langle\, , \rangle) = \{x \in V; \| x \| = r\}$ numită sfera de rază r în $(V, \langle\, , \rangle)$, avem că $O(n) \subset S_{\sqrt{n}}(M_n(\mathbb{R}), \langle\, , \rangle)$, respectiv $U(n) \subset S_{\sqrt{n}}(M_n(\mathbb{C}), \langle\, , \rangle)$ relativ la produsul scalar Hilbert-Schmidt. ■

S 1.6

Cine este $O(1)$? Dar $U(1)$?

Rezolvare: $O(1) = \{x \in \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}; x \cdot x = 1\} = \{-1, 1\}$ este grup abelian izomorf (relativ la înmulţire) cu $(\mathbb{Z}_2, +)$. În adevăr:

$O(1)$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

$\mathbb{Z}_2$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{0}$

Să remarcăm că proprietăţile lui $(\mathbb{Z}_2, +)$ sunt folosite în programarea calculatoarelor!

$U(1) = \{z \in \mathbb{C}; \overline{z} \cdot z = 1\} = \{z \in \mathbb{C}; |z|^2 = 1\}$ = cercul unitate S^1. În general în $\mathbb{R}^n$ notăm sfera unitate prin S^{n-1} i.e. $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \| x \| = 1\}$. $(S^1, \cdot)$ este grup abelian. ■

Lecţia 2

Câmpuri scalare şi câmpuri vectoriale

Suport de curs

Fixăm $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ şi $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Fie funcţia $f : M \to \mathbb{R}$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in M \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$.

Definiţia 2.1

Spunem că f *este de clasă* C^∞ *pe* M dacă $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ f este infinit derivabilă în raport cu variabila i i.e. $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x^i}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}, \ldots, \dfrac{\partial^k f}{\partial (x^i)^k}, \ldots$ pe M. Mulţimea acestor funcţii o notăm $C^\infty(M)$, iar un element $f \in C^\infty(M)$ îl numim *câmp scalar pe* M.

Exemplul 3

M este un lichid sau un gaz, iar $f(x) =$ temperatura în punctul $x \in M \subseteq \mathbb{R}^3$.

Propoziţia 2.1

$C^\infty(M)$ este algebră reală relativ la operaţiile:

$$\begin{cases} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \end{cases}$$

unde în membrul drept avem operaţia corespunzătoare din $\mathbb{R}$. Această algebră este asociativă, comutativă şi nu are dimensiune finită.

Demonstraţie: Faptul că $f+g$, λf, $f\cdot g$ sunt din $C^\infty(M)$ este imediat. Se verifică rapid şi axiomele cerute. ■

Definiţia 2.2

Funcţia $X : M \to \mathbb{R}^n$, $x \in M \mapsto X(x) = (X^1(x), \dots, X^n(x))$ o numim *câmp vectorial* dacă $X^i \in C^\infty(M)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; deci X este un set de n câmpuri scalare. Fie $\mathcal{X}(M)$ mulţimea câmpurilor vectoriale.

Exemplul 4

Fie M suprafaţa unei ţări pe o hartă şi X(longitudine, latitudine)=(temperatura, presiunea atmosferică) în $x \in M$ specificat de (longitudine, latitudine); aici $n = 2$.

Din propoziţia 2.1 avem că C^∞ este inel comutativ relativ la operaţiile $+$, $\cdot$. Relaţia dintre câmpuri scalare şi vectoriale este dată de:

Propoziţia 2.2

$\mathcal{X}(M)$ este $C^\infty(M)$-modul relativ la operaţiile:

$$\begin{cases} (X+Y)(x) &= (X^1(x)+Y^1(x), \dots, X^n(x)+Y^n(x)) \\ (f\cdot X)(x) &= (f(x)X^1(x), \dots, f(x)X^n(x)) \end{cases}.$$

Mulţimea $B = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}\right\} \subset \mathcal{X}(M)$ cu $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(x) = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\forall x \in M$ este o bază în $\mathcal{X}(M)$. Deci $\dim_{C^\infty(M)} \mathcal{X}(M) = n$.

Demonstraţie: Verificările sunt imediate. ■

Rezultă că orice $X \in \mathcal{X}(M)$ se scrie în mod unic $X(x) = (X^1(x), \dots, X^n(x)) = X^i(x)e_i = X^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}(x)$ i.e. $X = X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

Definiţia 2.3

Numim *curbă pe M* o aplicaţie $c : I \subset \mathbb{R} \to M$, $t \in I \mapsto c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \in M$ a.î. funcţiile $x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot)$ sunt infinit derivabile pe I.

De-a lungul curbei c definim două câmpuri vectoriale remarcabile:

– *câmpul vitezelor*: $V_c(c(t)) = \left(\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}(t), \dots, \dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t}(t)\right) \overset{\text{not}}{=} (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$

– *câmpul acceleraţiilor*: $A_c(c(t)) = (\ddot{x}^1(t), \dots, \ddot{x}^n(t))$.

Legea a II-a a dinamicii, formulată de I. Newton în forma vectorială $m\overline{a} = \overline{F}$ se poate reformula astfel: traiectoria punctului material de masă m sub acţiunea câmpului vectorial al forţelor $\overline{F}$ este o curbă c pentru care $A_c = \frac{1}{m}\overline{F}$. Din acest motiv suntem profund interesaţi de studiul câmpurilor vectoriale.

Introducem aplicaţiile $\nabla : C^\infty(M) \to \mathcal{X}(M)$, $\operatorname{div} : \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$:

– ∇f (sau $\operatorname{grad} f$) $= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$ sau ca să utilizăm regula Einstein $\nabla f = \delta^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}$. ∇f îl numim *câmpul gradient al lui f*

– $\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x^i}$ *funcţia divergenţă a lui X*.

Aceste aplicaţii sunt operatori $\mathbb{R}$-liniari în sensul introdus în primul curs:

$$\begin{cases} \nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g \\ \operatorname{div}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \operatorname{div} X + \mu \operatorname{div} Y \end{cases}.$$

Pentru alte proprietăţi ale acestor operatori a se vedea exerciţiul S 2.1.

Putem considera, via schema $C^\infty(M) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{X}(M) \xrightarrow{\operatorname{div}} C^\infty(M)$, operatorul compus $\operatorname{div} \circ \nabla$ notat Δ şi numit *operatorul Laplace* sau *Laplacean pe funcţii*. În coordonate: $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}$. O funcţie $f \in C^\infty(M)$ pentru care $\Delta f = 0$ o numim *armonică*.

Exemplul 5

– Fie $i \in \{1, \dots, n\}$ fixat şi $\pi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi^i(x) = \pi^i(x^1, \dots, x^n) = x^i$ numită funcţia *proiecţie de indice i*. Avem $\pi^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ şi $\nabla \pi^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

– Dacă $n = 1$ atunci $\Delta f = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ şi deci funcţiile armonice sunt cele liniare: $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ fixate.

Cum $C^\infty(M)$ este o algebră este natural să ne punem întrebarea: cât este $\nabla(f \cdot g)$? Cum operatorul ∇ este definit prin intermediul derivatei, ce satisface relativ la produsul de funcţii regula Leibniz, rezultă că avem regula Leibniz extinsă:

$$\nabla(f \cdot g) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g.$$

Acest fapt ne conduce la considerarea unei "acţiuni" a câmpurilor vectoriale pe câmpuri scalare:

$$\mathcal{X}(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$
$$(X, f) \mapsto X(f) \overset{\text{def}}{=} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Proprietăţile acestei acţiuni:

– ($\mathbb{R}$-liniaritate) $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$

– $(\lambda X + \mu Y)(f) = \lambda X(f) + \mu Y(f)$, $(fX)(g) = f \cdot X(g)$

– (regula Leibniz) $X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$

Definiţia 2.4
Dat $X \in \mathcal{X}(M)$ numim *curbă integrală* a lui X o curbă c pe M pentru care $V_c = X$.

Dacă $c(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ şi $X = (X^1, \ldots, X^n)$ rezultă că avem *sistemul diferenţial al curbelor integrale*:

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) &=& X^1(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \\ & & \cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}^n(t) &=& X^n(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \end{cases}$$

şi din teoria ecuaţiilor diferenţiale rezultă că $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$ $\exists \varepsilon = \varepsilon(t_0, x_0) > 0$ şi $c : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to M$ curbă integrală a lui X cu $c(t_0) = x_0$; deci este suficientă darea condiţiilor iniţiale ale mişcării: momentul iniţial (t_0) şi poziţia iniţială (x_0), iar cunoaşterea la orice moment a vectorului viteză determină complet traiectoria!

Suntem interesaţi de găsirea unor mărimi (cu caracter fizic eventual!) ce se conservă de-a lungul traiectoriei; spre exemplu energia (vrem să nu avem consum de energie). Să căutăm în ce condiţii asupra lui $f \in C^\infty(M)$ aceasta se conservă pe curbele integrale ale lui $X \in \mathcal{X}(M)$. Invarianţa lui f înseamnă $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(c(t)) = 0$ $\forall t \in I$; avem deci:

$$0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i = X(f)$$

ceea ce conduce la introducerea:

Definiţia 2.5

Funcţia $f \in C^{\infty}(M)$ o numim *integrală primă* a lui $X \in \mathcal{X}(M)$ dacă $X(f) = 0$.

Din proprietăţile acţiunii câmpurilor vectoriale pe câmpuri scalare rezultă că dacă f, g sunt integrale prime atunci $\lambda f + \mu g$ şi $f \cdot g$ sunt integrale prime i.e. mulţimea integralelor prime este subalgebră în $C^{\infty}(M)$!

Generalizăm noţiunea de integrală primă, pentru un câmp vectorial remarcabil $\Gamma \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$:

$$\Gamma = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} = (x^1, \ldots, x^n)$$

numit *câmp radial*.

Definiţia 2.6

Dat $r \in \mathbb{R}$ spunem că $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ este *r-omogenă* dacă $\Gamma(f) = rf$.

O caracterizare utilă a acestor funcţii este:

Propoziţia 2.3 (Euler)

f este r-omogenă dacă şi numai dacă $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Din discuţia precedentă rezultă că funcţiile 0-omogene sunt integralele prime ale lui Γ şi formează o subalgebră în $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Din relaţia Leibniz avem că dacă f este r-omogenă, iar g este s-omogenă atunci $f \cdot g$ este $(r + s)$-omogenă.

Cum $C^{\infty}(M)$ este o algebră, ne putem întreba dacă există o "înmulţire" pe $\mathcal{X}(M)$. Răspunsul este afirmativ şi constituie încă o aplicaţie a acţiunii câmpurilor vectoriale pe câmpuri scalare. Fie:

$$[\,] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto [X, Y]$$

unde

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

$[\,]$ o numim *paranteza* (sau *croşetul*) *Lie* şi dacă $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ atunci:

$$\begin{aligned}
[X, Y](f) &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(X^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \overset{\text{Leibniz}}{=} \\
&= \underline{X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}} + X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \underline{X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \\
&= \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial f}{\partial x^j}
\end{aligned}$$

căci termenii subliniaţi se reduc. În concluzie, permutând eventual indicii de sumare i, j între ei, obţinem:

$$[X,Y] = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = (X(Y^i) - Y(X^i))\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Numele de croşet Lie acordat [ ] se bazează pe:

Propoziţia 2.4

$(\mathcal{X}(M), [\cdot])$ este algebră Lie reală.

Demonstraţie: Antisimetria $[X,X] = 0$ rezultă imediat din defininţie. Identitatea Jacobi se verifică imediat. ■

Propoziţia 2.5

Fie $f \in \mathcal{X}^\infty(M)$ integrală primă pentru $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Atunci f este integrală primă pentru $[X,Y]$.

Demonstraţie:

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = X(0) - Y(0) = 0 - 0 = 0.$$

■

Definiţia 2.7

$X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ îl numim *câmp r-omogen* dacă $[\Gamma, X] = (r-1)X$.

Propoziţia 2.6

Fie $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ câmpuri r-omogene. Atunci $[X,Y]$ este câmp $(2r-1)$-omogen.

Demonstraţie: Avem deci $[\Gamma, X] = (r-1)X$, $[\Gamma, Y] = (r-1)Y$ şi din relaţia Jacobi avem:

$$\begin{aligned} 0 &= [\Gamma,[X,Y]] + [X,[Y,\Gamma]] + [Y,[\Gamma,X]] = \\ &= [\Gamma,[X,Y]] - (r-1)[X,Y] + (r-1)[Y,X] = \\ &= [\Gamma,[X,Y]] - 2(r-1)[X,Y]. \end{aligned}$$

■

Ne interesează deci cazul $r = 2r - 1$ ceea ce înseamnă $r = 1$. Un câmp 1-omogen îl numim simetrie a lui Γ şi mai general:

Definiţia 2.8

Fixat $X \in \mathcal{X}(M)$ un câmp, $Y \in \mathcal{X}(M)$ îl numim *simetrie a lui* X dacă $[X, Y] = 0$.

Propoziţia 2.7

Dat $X \in \mathcal{X}(M)$*, mulţimea simetriilor lui* X *este subalgebă Lie în* $\mathcal{X}(M)$*.*

DEMONSTRAŢIE: Fie Y_1, Y_2 simetrii pentru X. Avem

$$[X, \lambda^1 Y_1 + \lambda^2 Y_2] = \lambda^1 [X, Y_1] + \lambda^2 [X, Y_2] = \lambda^1 \cdot 0 + \lambda^2 \cdot 0 = 0$$

şi din nou, folosind identitatea Jacobi

$$0 = [X, [Y_1, Y_2]] + [Y_1, [Y_2, X]] + [Y_2, [X, Y_1]] = [X, [Y_1, Y_2]].$$

■

Notăm $\mathrm{Int}(X) = \{f \in C^\infty(M); f = \text{integrală primă pentru } X\}$ şi $\mathrm{Sim}(X) = \{Y \in \mathcal{X}(M); Y = \text{simetrie pentru } X\}$. Ştim că $\mathrm{Int}(X)$ este subalgebră în $C^\infty(M)$. Mai mult, avem:

Propoziţia 2.8

$\mathrm{Sim}(X)$ *este* $\mathrm{Int}(X)$*-modul.*

DEMONSTRAŢIE: Trebuie arătat că dacă $f \in \mathrm{Int}(X)$ şi $Y \in \mathrm{Sim}(X)$ atunci $fY \in \mathrm{Sim}(X)$. Dar pentru orice $f \in C^\infty(M)$ avem:

$$[X, fY] = X(f) \cdot Y + f[X, Y].$$

Dacă $f \in \mathrm{Int}(X)$ atunci $X(f) = 0$, iar dacă $Y \in \mathrm{Sim}(X)$ atunci $[X, Y] = 0$. ■

Avem următoarea generalizare a propoziţiei 2.6:

Propoziţia 2.9

Fie $X, Y \in \mathcal{X}(M)$*,* X *r-omogen şi* Y *s-omogen. Atunci* $[X, Y]$ *este* $(r + s - 1)$*-omogen.*

DEMONSTRAŢIE:

$$\begin{aligned} 0 &= [\Gamma, [X, Y]] + [X, [Y, \Gamma]] + [Y, [\gamma, X]] = \\ &= [\Gamma, [X, Y]] + [X, -(s-1)Y] + [Y, (r-1)X] \end{aligned}$$

adică: $[\Gamma, [X, Y]] = (s-1)[X, Y] + (r-1)[X, Y] = (r + s - 2)[X, Y]$. ■

Prin urmare mulţimea câmpurilor omogene (de toate gradele) este subalgebră Lie în $\mathcal{X}(M)$.

În cursul 1 am introdus pentru orice $\mathcal{K}$-spaţiu vectorial spaţiul său dual $V^* = \{\omega : V \to \mathcal{K}; \omega(\lambda x + \mu y) = \lambda\omega(x) + \mu\omega(y)\}$. Cum $\mathcal{X}(M)$ este $C^\infty(M)$-modul (cf. propoziţiei 2.3) putem considera $\mathcal{X}(M)^*$ notat $\Omega^1(M)$ şi ale cărei elemente le numim 1-*forme*. Deci $\omega \in \Omega^1(M)$ este o aplicaţie $\omega : \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$, $X \mapsto \omega(X)$ satisfăcând $\omega(fX + gY) = f\omega(X) + g\omega(Y)$.

Definim aplicaţia, pentru $X \in \mathcal{X}(M)$ fixat,

$$L_X : \Omega^1(M) \to \Omega^1(M),\ \omega \mapsto L_X\,\omega$$

numită *derivata Lie*; astfel $(L_X\,\omega)(Y) = L_X(\omega(Y)) - \omega(L_X\,Y)$ unde $L_X\,f = X(f)$, $L_X\,Y = [X,Y]$. Spunem că ω este 1-formă *invariantă* pentru X dacă $L_X\,\omega = 0$.

Teorema 2.1 (Noether)
Dacă Y este simetrie şi ω 1-formă invariantă pentru X atunci $f = \omega(Y)$ este integrală primă pentru X.

DEMONSTRAŢIE:

$$L_X\,f = L_X(\omega(Y)) = (L_X\,\omega)(Y) + \omega(L_X\,Y) = 0 + \omega(0) = 0 + 0 = 0.$$

■

Seminar

S 2.1 (Rotor)
Aplicaţia $\mathrm{rot} : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ dată de:

$$\mathrm{rot}\,X = \nabla \times X = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X^1 & X^2 & X^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial X^3}{\partial y} - \frac{\partial X^2}{\partial z}, \frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^3}{\partial x}, \frac{\partial X^2}{\partial x} - \frac{\partial X^1}{\partial y}\right)$$

o numim *rotor*. Proprietăţi:

i) $\mathrm{div}(fX) = f\,\mathrm{div}\,X + \langle \nabla f, X\rangle$

ii) $\mathrm{rot}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\,\mathrm{rot}\,X + \mu\,\mathrm{rot}\,Y$ i.e. rot este $\mathbb{R}$-operator liniar

iii) $\mathrm{rot}(fX) = f\,\mathrm{rot}\,X + \nabla f \times X$ deci rot nu este $C^\infty(\mathbb{R}^3)$-operator liniar *iv)* $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$, $\operatorname{rot} \circ \nabla = 0$

v) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} X) = \nabla(\operatorname{div} X) - (\Delta X^1, \Delta X^2, \Delta X^3)$.

S 2.2

Care sunt funcţiile r-armonice în dimensiune 1?

REZOLVARE: Cum $r = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ rezultă că $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ este r-armonică dacă $xf' = rf$ i.e. $\frac{f'}{f} = \frac{r}{x}$ şi prin integrare $\ln f = r \ln x + C' = \ln Cx^r$ pentru $C' = \ln C$. Cum funcţia ln este injectivă rezultă că $f(x) = Cx^r$. ■

S 2.3 (Sisteme conservative)

Fie particula de masă m supusă acţiunii câmpului de forţe $\overline{F}$; spunem că avem un sistem mecanic n-dimensional descris de perechea $(m, \overline{F})$. Acest sistem îl numim *conservativ* dacă există $U \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\overline{F} = -\nabla U$; funcţia U o numim *potenţial*. Ecuaţia legii a doua a dinamicii este $m\overline{a} = \overline{F} = -\nabla U$ sau în componenta i: $m\ddot{x}^i = -\frac{\partial U}{\partial x^i}(x)$, ceea ce spune că traiectoria este curba integrală a câmpului vectorial $X(x, y) = (y, -\frac{1}{m}\nabla U(x))$ scriind ecuaţia de ordinul doi ca o ecuaţie de gradul întâi cu număr dublu de variabile:

$$\begin{cases} \dot{x}^i &= y^i \\ \dot{y}^i &= -\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial U}{\partial x^i}(x) \end{cases}$$

Să se arate că energia totală se conservă (acest fapt explică denumirea "conservativ").

REZOLVARE: Energia totală $E(x, y)$ = energia cinetică + energia potenţială:

$$E(x, y) = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2 + U(x)$$

Avem:

$$X(E) = y^i\frac{\partial E}{\partial x^i} - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x^i}\frac{\partial E}{\partial y^i} = y^i\frac{\partial U}{\partial x^i} - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x^i} \cdot (my^i) = 0$$

■

S 2.4 (Sisteme hamiltoniene)

Să descriem exerciţiul anterior în termenii fizici de poziţie (q^i) şi impuls (p_i). Avem că $q^i = x^i$, $p_i = m\dot{x}^i = my^i$. Deci

$$E = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{m}\right)^2 + U(q) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n}p_i^2 + U(q)$$

Renotăm această funcţie $H = H(q,p)$ şi o numim *Hamiltonian* al sistemului. Să se scrie ecuaţiile de mişcare de la exerciţiul anterior în funcţie de H.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \dot{x}^i = y^i = \frac{p_i}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= m\dot{y}^i = m\Big(-\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x^i}\Big) = -\frac{\partial U}{\partial x^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}$$

Deci ecuaţiile de mişcare numite *ecuaţiile Hamilton* sunt:

$$\begin{cases} \dot{q}^i &= \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases}$$

şi obţinem că H este integrală primă:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}\Big) = 0$$

Să căutăm ecuaţia generală a unei integrale prime $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}\Big)$$

Considerăm $\{\ \} : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\Big)$$

numită *paranteza Poisson* pe $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Un calcul imediat dă:

- $\{f,f\} = 0$
- $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$

Deci $(C^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \{\cdot\})$ este o algebră Lie reală. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ este integrală primă dacă şi numai dacă $\{H,f\} = 0$. ■

S 2.5 (Oscilatorul armonic 1-dimensional)

Acest sistem mecanic este descris de forţa elastică care fiind forţă repulsivă are expresia $F(x) = -kx$, k fiind constanta elastică. Să se arate că acest sistem este hamiltonian.

REZOLVARE: Sistemul este conservativ cu potenţialul $U(x) = \frac{k}{2}x^2 = -\int F\mathrm{d}x$. Deci sistemul dat este hamiltonian cu Hamiltonianul $H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}q^2$. ■

S 2.6 (Pendulul matematic)

Este un sistem mecanic 1-dimensional descris de forţa $F(x) = -\sin x$. Să se arate că acest sistem este hamiltonian.

REZOLVARE: Sistemul este conservativ cu potenţialul $U(x) = -\int F(x)\mathrm{d}x = \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x$. Deci sistemul dat este hamiltonian cu hamiltonianul $H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 - \cos q$.

Ecuaţia de mişcare este $m\ddot{x} = F(x) = -\sin x$. Presupunând că masa este unitatea i.e. $m = 1$ şi x este foarte mic, cum $\sin x \simeq x$ (din dezvoltarea Taylor în jurul originii) putem considera ecuaţia $\ddot{x} = -x$ care este curba integrală a câmpului vectorial $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ i.e. $X(x,y) = (y, -x)$.
■

S 2.7 (ceasul)

De ce sensul orar este opus celui trigonometric? Apoi să se rezolve complet (să se integreze) ecuaţia ceasului.

REZOLVARE: Ceasul este un oscilator armonic şi deci conform exerciţiului S 2.5 este descris de ecuaţia $m\ddot{x} = -kx$. Introducem $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ numită *frecvenţa* şi avem $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Ceasul are frecvenţa $\omega = 1$ (bate secunda!); deci $\ddot{x} = -x$ ce este curba integrală a câmpului vectorial $X(x,y) = (y, -x)$.

Ecuaţia $\ddot{x} = -x$ o scriem $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ care se poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

unde $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Avem că $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -I_2$, deci J este o generalizare (2-dimensională) a lui $i = \sqrt{-1}$. Sensul de parcurgere a curbelor integrale ale lui $X(x,y) = (y, -x)$ este sensul orar; spre exemplu $X(1,0) = (0,-1) = -i$ ceea ce explică faptul că sensul orar (dat de ceas) este anti-trigonometric.

Pentru rezolvarea sistemului diferenţial $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ introducem coordonatele polare. Fie funcţia: $F : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $F(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (x,y)$. Avem

– $\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}$

– $\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$

Rezultă sistemul

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi} &= r\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi} &= -r\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\dot{r}}{r}\operatorname{ctg}\varphi - \dot{\varphi} &= 1 \\ \dfrac{\dot{r}}{r}\operatorname{tg}\varphi + \dot{\varphi} &= -1 \end{cases}$$

şi prin adunare avem $\dfrac{\dot{r}}{r}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi) = 0$. Dar $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \dfrac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}$ şi deci $\dot{r} = 0$ care are soluţia $r(t) = r(0) \overset{\text{not}}{=} r_0$. Înlocuind în oricare dintre ecuaţii avem $\dot{\varphi} = -1$ cu soluţia $\varphi(t) = -t + \varphi(0) = -t + \varphi_0$. Deci soluţia generală este:

$$\begin{cases} x(t) &= r_0\cos(\varphi_0 - t) \\ y(t) &= r_0\sin(\varphi_0 - t) \end{cases}$$

■

S 2.8

Să se rezolve complet $\ddot{x} = x$.

Rezolvare: Avem sistemul $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ şi considerăm schimbarea de variabile $x = u + v$, $y = u - v$. Din $\dot{x} = \dot{u} + \dot{v}$ şi $\dot{y} = \dot{u} - \dot{v}$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dot{u} + \dot{v} &= u - v \\ \dot{u} - \dot{v} &= u + v \end{cases}$$

care prin adunare, respectiv scădere conduce la:

$$\begin{cases} \dot{u} &= u \\ \dot{v} &= -v \end{cases}$$

cu soluţia $u(t) = u(0)e^t = u_0e^t$, $v(t) = v(0)e^{-t} = v_0e^{-t}$. Deci

$$\begin{cases} x(t) &= u_0e^t + v_0e^{-t} \\ y(t) &= u_0e^t - v_0e^{-t} \end{cases}$$

unde $x_0 = u_0 + v_0$, $y_0 = u_0 - v_0$; deci $u_0 = \frac{1}{2}(x_0 + y_0)$, respectiv $v_0 = \frac{1}{2}(x_0 - y_0)$. În final

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 \operatorname{ch} t + y_0 \operatorname{sh} t \\ y(t) &= x_0 \operatorname{sh} t + y_0 \operatorname{ch} t \end{cases}$$

■

Lecţia 3

Structuri Poisson

Suport de curs

În cursul precedent am introdus o structură de algebră Lie pe mulţimea $\mathcal{X}(M)$ a câmpurilor vectoriale. Este natural să cercetăm eventualele structuri de algebră Lie pe mulţimea $C^\infty(M)$ a câmpurilor scalare.

Definiţia 3.1

Numim *structură* (sau *paranteză*) *Poisson* pe mulţimea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ o aplicaţie $\{\ ,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ cu proprietăţile:

P_1) (*antisimetria*) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (echivalent $\{f, f\} = 0$)

P_2) ($\mathbb{R}$-*biliniaritate*) $\{f, \lambda g + \mu h\} = \lambda\{f, g\} + \mu\{f, h\}$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (din P_1 rezultă şi liniaritatea în primul argument)

P_3) (*identitatea Jacobi*) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (din P_1 rezultă Jacobi cu $\{\ \}$ pe primul loc)

P_4) (*identitatea Leibniz*) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ (din P_1 rezultă identitatea Leibniz cu produsul pe primul loc)

Perechea $(M, \{\ ,\})$ o numim *varietate Poisson*. $C \in C^\infty(M)$ îl numim *Casimir* al structurii Poisson date dacă $\{f, C\} = 0$, $\forall f \in C^\infty(M)$.

Relaţiile P_1–P_3 spun că $(C^\infty(M), \{\ ,\})$ este o algebră Lie reală, iar P_4 este o relaţie de compatibilitate între structura de algebră Lie şi structura de algebră reală comutativă.

Propoziţia 3.1

Mulţimea funcţiilor Casimir este o subalgebră Lie în $(C^\infty(M), \{\ ,\})$.

DEMONSTRAŢIE: Trebuie arătat că dacă C_1, C_2 sunt funcţii Casimir şi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ atunci $\lambda C_1 + \mu C_2$ şi $\{C_1, C_2\}$ sunt funcţii Casimir. Fie $f \in C^\infty(M)$ oarecare. Avem $\{f, \lambda C_1 + \mu C_2\} \overset{P_2}{=} \lambda\{f, C_1\} + \mu\{f, C_2\} = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$ şi

$$0 \overset{P_3}{=} \{f, \{C_1, C_2\}\} + \{C_1, \{C_2, f\}\} + \{C_2, \{f, C_1\}\} = \{f, \{C_1, C_2\}\}$$

■

Un rezultat de bază în înţelegerea parantezelor Poisson este:

Teorema 3.1 (de structură a parantezelor Poisson)

i) *Fie $\{\ ,\}$ o structură Poisson pe $\mathbb{R}^n$ şi $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ oarecare. Atunci $\{f, g\} = \{\pi^i, \pi^j\}\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\dfrac{\partial g}{\partial x^j}$.*

ii) *Fie $\{\ ,\}$ o lege de compoziţie pe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ce satisface P_1, P_2, P_4. Atunci $\{\cdot\}$ satisface P_3 dacă şi numai dacă satisface P_3 pe funcţiile proiecţie π^i, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

DEMONSTRAŢIE: Vom arăta doar *i)* deoarece *ii)* implică un calcul mai laborios. Fie $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixat şi funcţia $X_i : f \in C^\infty(M) \to \{\pi^i, f\} \in C^\infty(M)$. Conform P_4 aplicaţia X_i satisface $X_i(fg) = X_i(f) \cdot g + f \cdot X_i(g)$ ceea ce spune că $X_i \in \mathcal{X}(M)$; deci $X_i = A_i^a \dfrac{\partial}{\partial x^a}$. Avem $X_i(\pi^j) = A_i^a \dfrac{\partial \pi^j}{\partial x^a} = A_i^a \delta_a^j = A_i^j$; prin urmare $\{\pi^i, f\} = A_i^j \dfrac{\partial f}{\partial x^j} = \{\pi^i, \pi^j\}\dfrac{\partial f}{\partial x^j}$. Fie acum $f \in C^\infty(M)$ fixată şi aplicaţia $X_f : g \in C^\infty(M) \to \{f, g\} \in C^\infty(M)$. Din nou $X_f \in \mathcal{X}(M)$; deci $X_f = X_f^a \dfrac{\partial}{\partial x^a}$. Avem $X_f(\pi^k) = X_f^a \dfrac{\partial \pi^k}{\partial x^a} = X_f^a \delta_a^k = X_f^k$. În concluzie:

$$\begin{aligned}
\{f, g\} &= X_f(g) = X_f^k \frac{\partial g}{\partial x^k} = \{f, \pi^k\}\frac{\partial g}{\partial x^k} = -\{\pi^k, f\}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \\
&= -\{\pi^k, \pi^j\}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \{\pi^j, \pi^k\}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

■

Conform teoremei de structură vom considera matricea $P = (p^{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $p^{ij} = \{\pi^i, \pi^j\}$ numită *matricea de structură* a parantezei Poisson date. Relaţia din teorema de structură *i)* devine:

$$\{f,g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) \cdot (p^{ij}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

sau, într-o notaţie "index free":

$$\{f,g\} = {}^t(\nabla f) \cdot P \cdot \nabla g.$$

Proprietăţile matricii de structură:

$P_1) \Rightarrow p^{ij} = -p^{ji}$ i.e. P este o matrice antisimetrică

$P_3) \Rightarrow \{\pi^i, \{\pi^j, \pi^k\}\} + \{\pi^j, \{\pi^k, \pi^i\}\} + \{\pi^k, \{\pi^i, \pi^j\}\} = 0 \ \Rightarrow \{\pi^i, p^{jk}\} + \{\pi^j, p^{ki}\} + \{\pi^k, p^{ij}\} = 0$
$\Rightarrow p^{ia}\dfrac{\partial p^{jk}}{\partial x^a} + p^{ja}\dfrac{\partial p^{ki}}{\partial x^a} + p^{ka}\dfrac{\partial p^{ij}}{\partial x^a} = 0$, $\forall i, j, l \in \{1, \dots, n\}$.

Dat punctul $x_0 \in \mathbb{R}^n$ numim *deschis centrat în* x_0 o mulţime de forma $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; (x^1 - x_0^1)^1 + \dots + (x^n - x_0^n)^2 < r\}$, $r > 0$. Numim *rang* al parantezei Poisson în $x_0 \in \mathbb{R}^n$ rangul matricii $P(x_0) = (p^{ij}(x_0))$. Avem următorul rezultat de exprimare locală a parantezelor Poisson:

Teorema 3.2 (de structură locală a parantezelor Poisson)

Dacă rangul parantezei Poisson pe un deschis centrat în x_0 este constant egal cu k atunci k este par ($k = 2m$) şi există (pe un deschis centrat în x_0, eventual mai mic decât cel iniţial) coordonatele locale în jurul lui x_0 de forma $x = (x^1, \dots, x^m, p_1, \dots, p_m, u_{2m+1}, \dots, u_{n-2m})$ aşa încât pentru orice x al acestui deschis secund avem:

$$P(x) = \begin{pmatrix} O_m & I_m & \vdots & \\ -I_m & O_m & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & O_{n-2m} \end{pmatrix}$$

unde O_s, I_s este matricea nulă, respectiv matricea unitate, de ordin s.

Definiţia 3.2

Varietatea Poisson $(M, \{\ ,\})$ o numim *simplectică* dacă $\forall x \in M$ matricea $P(x)$ este inversabilă.

Conform teoremei de structură locală rezultă că $\forall x \in M$ rangul matricii $P(x)$ este $n = k = 2m$ (deci suntem în $\mathbb{R}^{2m}$) şi avem:

$$P(x) = \begin{pmatrix} O_m & I_m \\ -I_m & O_m \end{pmatrix}$$

Prin urmare:

$$\{f, g\} = {}^t(\nabla f) \cdot \begin{pmatrix} O_m & I_m \\ -I_m & O_m \end{pmatrix} \cdot \nabla g, \qquad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2m})$$

sau încă:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m}, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_m}\right) \cdot \begin{pmatrix} O_m & I_m \\ -I_m & O_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x^m} \\ \frac{\partial g}{\partial p^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p^m} \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial p_m}, \frac{f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x^m} \\ \frac{\partial g}{\partial p^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p^m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ceea ce dă expresia finală a parantezelor Poisson simplectice:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right)$$

Pentru următorul exemplu de varietăţi Poisson facem câteva pregătiri. Fie V un spaţiu vectorial real n-dimensional şi $a \in V$ fixat. Mulţimea $T_a V = \{(a, x); x \in \mathbb{R}^n\}$ o numim *spaţiu tangent în a la V* şi este un spaţiu vectorial n-dimensional relativ la operaţiile $\lambda(a, x) + \mu(a, y) = (a, \lambda x + \mu y)$. Reamintim că am introdus dualul lui V notat V^* ca $V^* = \{\alpha : V \to \mathbb{R}; \alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda\alpha(u) + \mu\alpha(v)$ i.e. α este transformare liniară$\}$. Se arată că $V^{**} = V$. Fie $f \in C^\infty(V) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ şi $a \in V$ fixat. Există aplicaţia $\mathrm{d}f_a(a, v) : T_a V \to \mathbb{R}$ numită *diferenţiala lui f în a*:

$$\mathrm{d}f_a(a, v) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) v^i$$

Avem:

$$\mathrm{d}f_a(a, \lambda v + \mu w) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(\lambda v^i + \mu w^i) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)v^i + \mu \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)w^i = \lambda \mathrm{d}f_a(a, v) + \mu \mathrm{d}f_a(a, w)$$

i.e. $\mathrm{d}f_a$ este transformare liniară, $\mathrm{d}f_a \in (T_aV)^*$.

Exemplu remarcabil de varietate Poisson. Fie $\mathcal{G}$ o algebră Lie. Există două paranteze Poisson pe $\mathcal{G}^*$, $\{\ \}_\pm : C^\infty(\mathcal{G}^*) \times C^\infty(\mathcal{G}^*) \to C^\infty(\mathcal{G}^*)$ dată de:

$$\{f, g\}_\pm(\mu) = \pm\mu([\mathrm{d}f_\mu, \mathrm{d}g_\mu])$$

unde $\mathrm{d}f_\mu, \mathrm{d}g_\mu \in (\mathcal{G}^*)^* = \mathcal{G}$, iar $[\ ]$ este paranteza Lie pe $\mathcal{G}$, iar μ este un element fixat din $\mathcal{G}^*$.

Pentru a găsi matricea de structură a acestor structuri Poisson să introducem câteva notaţii. Fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ bază în V şi $B^* = \{e^1, \ldots, e^n\}$ baza duală în V^*. Vectorul $[e_i, e_j]$ se descompune în baza B deci avem descompunerea $[e_i, e_j] = c^k_{ij}e_k$; numerele reale $(c^k_{ij})_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n}$ se numesc *constantele de structură* ale algebrei Lie $(\mathcal{G}, [\cdot])$. Elementele din B^* satisfac $e^a(e_b) = \delta^a_b$. Dat $\mu \in \mathcal{G}^*$ avem descompunerea $\mu = \mu_a e^a$ şi dată $f \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ avem $\mathrm{d}f_\mu = \dfrac{\partial f}{\partial \mu_i}(\mu)e_i$ şi deci

$$\{f, g\}_\pm(\mu) = \pm\mu_a e^a\left(\left[\frac{\partial f}{\partial \mu_i}(\mu)e_i, \frac{\partial f}{\partial \mu_j}(\mu)e_j\right]\right) = \pm\mu_a \frac{\partial f}{\partial \mu_i}(\mu)\frac{\partial f}{\partial \mu_j}(\mu)c^a_{ij}$$

Seminar

S 3.1 (Structura simplectică plană)
Să se arate că $\{f, g\} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial p} - \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ unde în $\mathbb{R}^2$ folosim coordonatele (x, p), este o structură Poisson simplectică.

REZOLVARE: Este caz particular imediat al formulei de la curs. ■

S 3.2
Pe $\mathbb{R}^2$ avem structura Poisson $\{f, g\} = xp\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial p} - \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)$ ce nu are funcţii Casimir neconstante.

REZOLVARE: Se verifică P_1, P_2 şi P_4 foarte uşor, iar P_3 după un calcul mai laborios. Fie $C \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ funcţie Casimir pentru paranteza Poisson dată. Deci $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial C}{\partial p} = \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial C}{\partial x}$ $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pentru $f = \pi^1$ i.e. $f(x, p) = x$ obţinem $\dfrac{\partial C}{\partial p} = 0$; pentru $f = \pi^2$ i.e. $f(x, p) = p$ obţinem $\dfrac{\partial C}{\partial x} = 0$. Din $\dfrac{\partial C}{\partial x} = \dfrac{\partial C}{\partial p} = 0$ rezultă că $C =$ constantă. Mai general, structurile Poisson generate de structuri simplectice au funcţiile Casimir constante. ■

S 3.3

Să se arate că pe $\mathbb{R}^3$ avem structurile Poisson:

$$\{f,g\}_\pm = \pm \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x^1} & \dfrac{\partial g}{\partial x^2} & \dfrac{\partial g}{\partial x^3} \end{vmatrix}$$

cu funcţia Casimir $C(x^1,x^2,x^3) = \dfrac{1}{2} \parallel x \parallel^2 = \dfrac{1}{2}\left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right)$.

Rezolvare: Din nou P_1, P_2 şi P_4 se verifică imediat, iar P_3 mai laborios folosind expresia: $\{f,g\}_\pm = \pm \varepsilon_a^{ij} x^a \dfrac{\partial f}{\partial x^i} \dfrac{\partial g}{\partial x^j}$ unde:

$$\varepsilon_a^{ij} = \begin{cases} +1 & \text{dacă permutarea } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & i & j \end{pmatrix} \text{ este pară} \\ -1 & \text{dacă permutarea } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & i & j \end{pmatrix} \text{ ete impară} \end{cases}$$

expresie ce rezultă din dezvoltarea (formula de calcul) a determinantului. Avem:

$$\{f,C\}_\pm = \pm \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f}{\partial x^3} \\ x^1 & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

deoarece un determinant cu două linii (sau coloane) proporţionale (în particular egale) este nul.

■

S 3.4

Se cer $\pm$-structurile Poisson de pe duala algebrei Lie $(\mathbb{R}^3, \times)$.

Rezolvare: Fie $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Calculăm constantele de structură ale algebrei Lie $(\mathbb{R}^3, \times)$ ştiind că $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$; deci avem tabelul:

$\times$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

din care citim constantele de structură:

1) $c_{11}^{\bullet} = (0,0,0)$, $c_{12}^{\bullet} = (0,0,1)$, $c_{13}^{\bullet} = (0,-1,0)$

2) $c_{21}^{\bullet} = (0,0,-1)$, $c_{22}^{\bullet} = (0,0,0)$, $c_{23}^{\bullet} = (1,0,0)$

3) $c_{31}^{\bullet} = (0,1,0)$, $c_{32}^{\bullet} = (-1,0,0)$, $c_{33}^{\bullet} = (0,0,0)$

De la curs avem că matricea de structură a $\pm$-structurii Poisson este $\pm(\mu_a c_{ij}^a)$. Deci:

1) $p^{11} = \pm(\mu_a c_{11}^a) = 0$, $p^{12} = \pm(\mu_a c_{12}^a) = \pm(\mu_3)$, $p^{13} = \pm(\mu_a c_{13}^a) = \pm(-\mu_2)$

2) $p^{21} = \pm(\mu_a c_{21}^a) = \pm(-\mu_3)$, $p^{22} = \pm(\mu_a c_{22}^a) = 0$, $p^{23} = \pm(\mu_a c_{23}^a) = \pm(\mu_1)$

3) $p^{31} = \pm(\mu_a c_{31}^a) = \pm(\mu_2)$, $p^{32} = \pm(\mu_a c_{32}^a) = \pm(-\mu_1)$, $p^{33} = \pm(\mu_a c_{33}^a) = 0$

Din aceste relaţii obţinem:

$$P_{\pm}(\mu) = \pm \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

în punctul $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in (\mathbb{R}^3)^*$ i.e. $\mu = \mu_a e^a$ unde $(e^a)_{1 \leqslant a \leqslant 3}$ este baza duală bazei canonice $(e_1, e_2, e_3) = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$. ■

S 3.5

Fie $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ fixată. Să se arate că:

$$\{f, g\} = \langle \nabla F, \nabla f \times \nabla g \rangle$$

este o structură Poisson pe $\mathbb{R}^3$ cu F ca funcţie Casimir.

Rezolvare: $\nabla f \times \nabla g = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} e_i\right) \times \left(\frac{\partial g}{\partial x^j} e_j\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} c_{ij}^a e_a$ unde (c_{ij}^a) sunt cele de la exerciţiul precedent.

Deci $\{f, g\}_F = \langle \nabla F, \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} c_{ij}^a e_a \rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \langle \frac{\partial F}{\partial x^b} e_b, e_a \rangle c_{ij}^a = c_{ij}^a \frac{\partial F}{\partial x^a} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$ folosind ortonormalitatea bazei canonice. Avem că $\{\ \}_F$ este o structură Poisson cu matricea de structură:

$$P_F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial x^3} & -\frac{\partial F}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial F}{\partial x^3} & 0 & \frac{\partial F}{\partial x^1} \\ \frac{\partial F}{\partial x^2} & -\frac{\partial F}{\partial x^1} & 0 \end{pmatrix}$$

Pentru partea a doua avem:

$$P_F \cdot \nabla F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial x^3} & -\frac{\partial F}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial F}{\partial x^3} & 0 & \frac{\partial F}{\partial x^1} \\ \frac{\partial F}{\partial x^2} & -\frac{\partial F}{\partial x^1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^1} \\ \frac{\partial F}{\partial x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şi deci $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$:

$$\{f, F\}_F = \nabla f \cdot P_F \cdot \nabla F = \nabla f \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

■

S 3.6 (paranteză Poisson pătratică)

Fie $A = (A^{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ o matrice antisimetrică ($A^{ij} = -A^{ji}$). Pe $\mathbb{R}^n$ definim $B^{ij}(x) = A^{ij}x^i x^j$, fără sumare. Atunci (B^{ij}) este o matrice de structură pentru o paranteză Poisson.

Rezolvare: Avem imediat $B^{ij} = -B^{ji}$ din proprietatea omoloagă pentru A. Să calculăm expresia:

$$B^{ia}\frac{\partial B^{jk}}{\partial x^a} + B^{ja}\frac{\partial B^{ki}}{\partial x^a} + B^{ka}\frac{\partial B^{ij}}{\partial x^a}, \quad 1 \leqslant i, j, k \leqslant n.$$

Avem

$$\begin{aligned} B^{ia}\frac{\partial B^{jk}}{\partial x^a} &= A^{ia}x^i x^a \frac{\partial}{\partial x^a}(A^{jk}x^j x^k) = A^{ia}x^i x^a (A^{jk}\delta^j_a x^k + A^{jk}x^j \delta^k_a) = \\ &= A^{ij}A^{jk}x^i x^k x^j + A^{ik}A^{jk}x^i x^j x^k = A^{jk}x^i x^j x^k (A^{ij} + A^{ik}) \end{aligned}$$

şi deci suma cerută este, fără factorul $x^i x^j x^k$:

$$A^{jk}(\underline{A^{ij}} + \underline{\underline{A^{ik}}}) + A^{ki}(\underline{\underline{A^{jk}}} + A^{ji}) + A^{ij}(A^{ki} + \underline{A^{kj}}) = 0$$

deoarece termenii subliniaţi se reduc din antisimetria lui A. ■

S 3.7 (paranteză Poisson cubică)

Pentru $x \in \mathbb{R}^3$ considerăm: $\{x^1, x^2\} = \| x \| \cdot x^3$, $\{x^2, x^3\} = \| x \| \cdot x^1$, $\{x^3, x^1\} = \| x \| \cdot x^2$. Atunci matricea $(p^{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ cu $p^{ij} = \{x^i, x^j\}$ dacă $i < j$, respectiv $p^{ij} = -p^{ji}$ în celelalte cazuri defineşte o structură Poisson pe $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare: TEMĂ! ■

S 3.8

Ne interesează în ce condiţii asupra unei paranteze (nu neapărat Poisson) un element poate trece de la un argument la altul. Să se arate că dacă $\{\ \}$ satisface identitatea Leibniz atunci:

$$\{f, gh\} - \{fg, h\} = \{f, g\}h - f\{g, h\}$$

REZOLVARE: Se scad relaţiile:

$$\begin{cases} \{f, gh\} &= \{f, g\}h + g\{f, h\} \\ \{fg, h\} &= \{f, h\}g + f\{g, h\} \end{cases}$$

Relaţia cerută se poate scrie şi sub forma:

$$\{f, gh\} - \{f, g\}h = \{fg, h\} - f\{g, h\}$$

ceea ce spune că dacă un factor "iese" din paranteză la argumentul al doilea ($\{f, gh\} = \{f, g\}h$) atunci "iese" şi factor de la primul argument ($\{fg, h\} = f\{g, h\}$) şi reciproc. ■

S 3.9 (Forme simplectice pe spaţii vectoriale)

Fie V un spaţiu vectorial şi $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ biliniară. Definim $\Omega^b : V \to V^*$ prin $\Omega^b(v) : V \to \mathbb{R}$, $\Omega^b(v)(w) = \Omega(v, w)$. Avem că:

i) $\Omega^b(v) \in V^*$

ii) Ω^b este transformare liniară între spaţiile vectoriale V, V^*

Ω o numim *slab nedegenerată* dacă $\Omega(v, w) = 0\ \forall w \in V$ implică $v = 0$, Să se arate că:

iii) Ω este slab nedegenerată dacă şi numai dacă Ω^b este transformare liniară injectivă

Ω este *tare nedegenerată* dacă Ω^b este chiar izomorfism liniar. Se ştie că pe un spaţiu vectorial de dimensiune finită o transformare liniară este bijecţie dacă şi numai dacă este injectivă (deci dacă $\dim V = n$ nedegenerarea slabă şi cea tare sunt echivalente). Ω o numim *formă simplectică pe V_n* dacă este biliniară, nedegenerată şi antisimetrică; în acest caz perechea (V_n, Ω) o numim spaţiu vectorial simplectic.

REZOLVARE:

i) $\Omega^b(v)(\lambda w_1 + \mu w_2) = \Omega(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda\Omega(v, w_1) + \mu\Omega(v, w_2) = \lambda\Omega^b(v)(w_1) + \mu\Omega^b(v)(w_2)$

ii) rezultă din calcul

iii) $\Omega(v, w) = 0 \iff \Omega^b(v)(w) = 0$. Deci Ω^b injectivă echivalentă cu ($\Omega^b(v) = 0_{V^*} \Rightarrow v = 0$) echivalent cu nedegenerarea.

■

Lecţia 4

Sisteme Hamiltoniene

Suport de curs

Definiţia 4.1

i) Numim *sistem Hamiltonian n-dimensional* un triplet $(M, \{\ ,\ \}, H)$ cu $(M, \{\ ,\ \})$ varietate Poisson, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $H \in C^\infty(M)$ câmp scalar fixat numit *Hamiltonianul* (sau *energia*) sistemului dat. O *integrală primă* a acestui sistem este o funcţie $I \in C^\infty(M)$ ce satisface $\{I, H\} = 0$.

ii) Fie câmpul vectorial $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Sistemul difereţial al curbelor integrale ale lui X:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 &= X^1(x^1, \dots, x^n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}^n &= X^n(x^1, \dots, x^n) \end{cases}$$

spunem că admite o *descriere Hamiltoniană* dacă există un sistem Hamiltonian n-dimensional $(M, \{\ ,\ \}, H)$ a.î. sistemul diferenţial dat se scrie:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 &= \{x^1, H\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}^n &= \{x^n, H\} \end{cases}$$

iii) Un sistem Hamiltonian n-dimensional îl numim *complet integrabil* dacă există $I_1, \dots, I_n$ integrale prime ale sale cu prorietăţile:

a) sunt în *involuţie*: $\{I_i, I_j\} = 0$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

b) sunt *funcţional independente* i.e. $\forall x \in M$ vectorii $\nabla I_1(x), \ldots, \nabla I_n(x)$ sunt liniar independenţi.

Conform celor din primul curs ultima condiţie revine la faptul că $\forall x \in M$ vectorii $\nabla I_1(x), \ldots, \nabla I_n(x)$ constituie o bază în $\mathbb{R}^n$. Tehnic, verificăm faptul că:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial I_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial I_n}{\partial x^1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\partial I_1}{\partial x^n} & \cdots & \dfrac{\partial I_n}{\partial x^n} \end{vmatrix} (x) \neq 0$$

în orice $x \in M$. Din antisimetria parantezei Poisson putem lua $I_1 = H$, iar dacă $\{\ \}$ admite funcţii Casimir neconstante (pentru a avea coloane nenule în determinantul precedent) acestea constituie integrale prime. Mai rămâne de găsit numărul corespunzător de integrale prime ce satisfac $a)$ şi $b)$.

Fie aplicaţia $X_H : f \in C^\infty(M) \to \{f, H\} \in C^\infty(M)$; datorită condiţiei Leibniz avem că X_H este un câmp vectorial numit *câmpul Hamiltonian* asociat lui H. Curbele integrale ale lui X_H le numim *traiectorii* ale sistemului Hamiltonian dat.

Teorema 4.1 (Poisson)
Dacă I_1, I_2 sunt integrale prime ale sistemului Hamiltonian dat atunci $\{I_1, I_2\}$ este o integrală primă.

DEMONSTRAŢIE: Din identitatea Jacobi avem:

$$0 = \{\{I_1, I_2\}, H\} + \{\{I_2, H\}, I_1\} + \{\{H, I_1\}, I_2\} = \{\{I_1, I_2\}, H\}$$

din $\{I_2, H\} = 0 = -\{H, I_1\}$. ■

Este posibil ca prin procedeul Poisson să nu generăm o integrală primă nouă sau $\{I_1, I_2\}$ să fie o constantă.

Observaţie importantă: Dacă $\{\ \}$ este simplectică, conform cursului precedent, $n = 2m$. Atunci pentru completa integrabilitate trebuie să găsim *numai* m integrale prime ce satisfac $a)$ şi $b)$. Să analizăm cazul $m = 1$ care datorită faptului că luăm $I_1 = H$ este *întotdeauna* complet integrabil. Deci M are coordonatele (q, p), iar câmpul Hamiltonian este $X_H = \dfrac{\partial H}{\partial p}\dfrac{\partial}{\partial q} - \dfrac{\partial H}{\partial q}\dfrac{\partial}{\partial p}$

ce dă ecuaţiile, numite *ecuaţiile Hamilton*:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}.$$

Fie $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ momentul iniţial al mişcării şi $E = H(q(t_0), p(t_0))$. Cum H este integrală primă rezultă că $\forall t \in I$ avem $H(q(t), p(t)) = E$; mulţimea $\{(q, p) \in \mathbb{R}^2; H(q, p) = E\}$ este o curbă în plan (în general definită implicit) ce se poate parametriza (măcar local) $p = \varphi(q)$. Din prima ecuaţie Hamilton scrisă $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p}(q, \varphi(q))$ avem:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\dfrac{\partial H}{\partial p}(q, \varphi(q))} = \mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}q}{\dfrac{\partial H}{\partial p}(q, \varphi(q))} = t - t_0$$

şi deci rezolvarea ecuaţiilor Hamilton s-a redus la calculul unei integrale; mai spunem că s-a redus la o "cuadratură".

Să considerăm cazul unui sistem conservativ i.e. $H(q, p) = \dfrac{1}{2m}p^2 + U(q)$. Atunci $\dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m}$ şi $\dfrac{p^2}{2m} + U(q) = E$ dă $p = \pm(2m)^{1/2}\sqrt{E - U(q)}$ şi $\dfrac{\partial H}{\partial p} = \pm\left(\dfrac{2}{m}\right)^{1/2}\sqrt{E - U(q)}$. Deci:

$$\pm\left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{E - U(q)}} = t - t_0$$

Seminar

S 4.1 (Rigidul liber)

Fie (I_1, I_2, I_3) tensorul de inerţie a rigidului liber cu $I_1 > I_2 > I_3 > 0$ şi $a_1 = \dfrac{1}{I_3} - \dfrac{1}{I_2}$, $a_2 = \dfrac{1}{I_1} - \dfrac{1}{I_2}$, $a_3 = \dfrac{1}{I_2} - \dfrac{1}{I_1}$. Se ştie că dinamica rigidului liber este dată de sistemul diferenţial al lui Euler:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = a_1 x^2 x^3 \\ \dot{x}^2 = a_2 x^3 x^1 \\ \dot{x}^3 = a_3 x^1 x^2 \end{cases}$$

Să se arate că acest sistem admite descrierea Hamiltoniană $(\mathbb{R}^3, \{\cdot\}_-, H)$ cu $\{\ \}_-$ dată de problema S 3.3 şi

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{(x^1)^2}{I_1} + \frac{(x^2)^2}{I_2} + \frac{(x^3)^2}{I_3}\right).$$

Se ştie că tensorul de inerţie este constant.

Rezolvare: Avem:

$$\{x^1, H\}_- = -\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{x^1}{I_1} & \dfrac{x^2}{I_2} & \dfrac{x^3}{I_3} \end{vmatrix} = x^2x^3\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right) = a_1x^2x^3$$

$$\{x^2, H\}_- = -\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{x^1}{I_1} & \dfrac{x^2}{I_2} & \dfrac{x^3}{I_3} \end{vmatrix} = x^3x^1\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right) = a_2x^3x^1$$

$$\{x^3, H\}_- = -\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{x^1}{I_1} & \dfrac{x^2}{I_2} & \dfrac{x^3}{I_3} \end{vmatrix} = x^1x^2\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) = a_3x^1x^2$$

■

S 4.2 (Maxwell-Bloch)

Să se arate că ecuaţiile Maxwell-Bloch din dinamica laser-materie:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = x^3x^1 \\ \dot{x}^3 = -x^1x^2 \end{cases}$$

admit descrierea Hamiltoniană $(\mathbb{R}^3, \{\cdot\}_{MB}, H)$ cu structura Poisson având matricea de structură

$$P_{MB} = \begin{pmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & 0 \\ -x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi $H = \dfrac{1}{2}(x^1)^2 + x^3$.

Rezolvare: Avem:

$$\{x^1, H\}_{MB} = (1,0,0)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & 0 \\ -x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, -x^3, x^2)\begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x^2$$

$$\{x^2, H\}_{MB} = (0,1,0)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & 0 \\ -x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (x^3, 0, 0)\begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x^3x^1$$

$$\{x^3, H\}_{MB} = (0,0,1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & 0 \\ -x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-x^2, 0, 0)\begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -x^1x^2.$$

■

S 4.3

Fie varietatea Poisson $(M, \{\cdot\})$ şi $f, g \in C^\infty(M)$. Atunci:

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$$

Se cer interpretări ale acestei relaţii.

Rezolvare: Fie $h \in C^\infty(M)$ oarecare. Aplicăm Jacobi:

$$\begin{aligned}[X_f, X_g](h) &= \{\{h,g\},f\} - \{\{h,f\},g\} = -\{\{g,h\},f\} - \{\{h,f\},g\} = \{\{f,g\},h\} \\ &= -\{h,\{f,g\}\}\end{aligned}$$

ceea ce dă relaţia cerută. Interpretare: dacă f, g sunt în involuţie ($\{f,g\} = 0$) atunci câmpurile Hamiltoniene comută ($[X_f, X_g] = 0$). Altă interpretare: aplicaţia $f \in C^\infty(M) \to X_f \in \mathcal{X}(M)$ este un antimorfism de algebre Lie. ■

S 4.4 (conservarea momentului cinetic)

Fie $M = \{(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^6\} \equiv \mathbb{R}^6$ şi paranteza Poisson simplectică

$$P = \begin{pmatrix} O_3 & I_3 \\ -I_3 & O_3 \end{pmatrix}$$

Să se arate că dacă două din componentele momentului cinetic, $I_1 = q^2p_3 - q^3p_2$, $I_2 = q^3p_1 - q^1p_3$ sunt integrale prime atunci $I_3 = \{I_1, I_2\}$ este a treia componentă a momentului cinetic (şi conform teoremei Poisson este integrală primă). Să se continue procedeul Jacobi.

Rezolvare: Avem:

$$I_3 = (0, p_3, -p_2, 0, -q^3, q^2)\begin{pmatrix} O_3 & I_3 \\ -I_3 & O_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \\ q^3 \\ 0 \\ -q^1 \end{pmatrix} = (0, q^3, -q^2, 0, p_3, -p_2)\begin{pmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \\ q^3 \\ 0 \\ -q^1 \end{pmatrix} = q^1p_2 - q^2p_1.$$

Continuând algoritmul Jacobi se obţine $[I_3, I_1] = I_2$ şi $[I_3, I_2] = -I_1$ deci nu avem integrale prime noi. ■

Lecţia 5

Stabilitatea punctelor de echilibru

Suport de curs

Fixăm câmpul vectorial $X \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ şi fie sistemul diferenţial al curbelor integrale ale lui X:

$$\dot{x}^i(t) = X^i(x^1(t), \ldots, x^n(t)), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Definiţia 5.1

i) Numim *punct de echilibru* al sistemului diferenţial dat un zero al lui X i.e. $x_e \in \mathbb{R}^n$ a.î. $X(x_e) = \overline{0} = (0, \ldots, 0)$.

ii) Punctul de echilibru x_e îl numim *neliniar stabil* dacă pentru orice deschis U centrat în x_e există V un deschis centrat în x_e cu $V \subset U$ a.î. orice curbă integrală a lui X cu $x(0) \in V$ satisface $x(t) \in U$, $\forall t \geqslant 0$; echivalent $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ a.î.

$$(x^1(0) - x_e^1)^2 + \cdots + (x^n(0) - x_e^n)^2 < \delta \Rightarrow (x^1(t) - x_e^1)^2 + \cdots + (x^n(t) - x_e^n)^2 < \varepsilon, \forall t \geqslant 0.$$

Dacă în plus putem alege V a.î. $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = x_e$ i.e. $\lim\limits_{t\to\infty} x^i(t) = x_e^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, spunem că x_e este *asimptotic stabil*. Un punct de echilibru ce nu este neliniar stabil îl numim *instabil*.

Teorema 5.1 (I Lyapunov)
Dacă X este câmp vectorial liniar i.e. $X(x^1, \ldots, x^n) = A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ *cu* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *atunci* $\overline{0} = (0, \ldots, 0)$ *este punct de echilibru cu proprietăţile:*

i) *este asimptotic stabil dacă şi numai dacă toate valorile proprii λ ale lui A satisfac* $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ *unde* $\mathrm{Re}(\lambda) =$ *partea reală a numărului complex* λ

ii) *este neliniar stabil dacă şi numai dacă toate valorile proprii λ ale lui A satisfac* $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$, *iar dacă* $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ *atunci λ este rădăcină simplă a polinomului minimal al lui A i.e. polinomul de grad minim ce anulează pe A ($p(A) = 0$).*

Dacă X este neliniar atunci considerăm matricea numită linearizata lui X*:*

$$A_X(x_e) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^n}{\partial x^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial X^1}{\partial x^n} & \cdots & \dfrac{\partial X^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}(x_e),$$

şi avem că x_e este:

iii) *asimptotic stabil dacă toate valorile proprii ale lui $A(x_e)$ au partea reală strict negativă*

iv) *instabil dacă măcar o valoare proprie a lui $A(x_e)$ are partea reală pozitivă.*

Definiţia 5.2

Dat punctul de echilibru x_e spunem că acesta *admite* o funcţie Lyapunov $L \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dacă:

i) $L(x_e) = 0$; $L(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_e\}$

ii) $X(L)(x) \leqslant 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_e\}$.

Teorema 5.2 (a II-a Lyapunov)

Dacă x_e admite o funcţie Lyapunov atunci x_e este neliniar stabil. Dacă în plus L satisface $X(L)(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_e\}$ atunci x_e este asimptotic stabil.

Ne interesează în cele ce urmează stabilitatea punctelor de echilibru ale sistemelor Hamiltoniene.

Propoziţia 5.1

Fie $I \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ şi $c(t = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ curbă integrală a câmpului vectorial X. Atunci:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(c(t)) = X(I(c(t))).$$

Demonstraţie: Avem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(c(t)) = \frac{\partial I}{\partial x^i}(c(t)) \cdot \dot{x}^i(t) = \frac{\partial I}{\partial x^i}(c(t)) \cdot X^i(c(t)) = X(I)(c(t)).$$

■

Corolarul 5.1

i) *Dacă I este integrală primă pentru X atunci I este constantă pe curbele integrale ale lui X.*

ii) *Dacă I este integrală primă atunci $\forall \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă C^∞ avem că $\varphi(I) = \varphi \circ I$ este integrală primă pentru X.*

DEMONSTRAŢIE: *i)* Conform propoziţiei 5.1 avem $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(c(t)) = 0$ ceea ce dă concluzia.

ii) $X(\varphi \circ I(x)) = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi \circ I(x)) = X^i(x) \cdot \left(\varphi'(I(x)) \cdot \frac{\partial I}{\partial x^i}(x)\right) = \varphi'(I(x)) \cdot X(I(x)) = \varphi'(I(x)) \cdot 0 = 0.$

■

Fie acum sistemul Hamiltonian $(M, \{\ ,\ \}, H)$, x_e un punct de echilibru pentru X_H şi $\mathcal{C}$ o familie de integrale prime. Metoda pe care o vom da pentru studiul stabilităţii lui x_e se numeşte *metoda energie-Casimir* şi constă în găsirea unei integrale prime $C \in \mathcal{C}$ aşa încât:

A) $\nabla(H + C)(x_e) = \left(\frac{\partial(H+C)}{\partial x^1}(x_e), \ldots, \frac{\partial(H+C)}{\partial x^n}(x_e)\right) = (0, \ldots, 0) = \overline{0}$

B) Matricea (numită *Hessiana* lui $H + C$ în x_e):

$$D^2(H+C)(x_e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2(H+C)}{\partial x^1 \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2(H+C)}{\partial x^n \partial x^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2(H+C)}{\partial x^1 \partial x^n} & \cdots & \frac{\partial^2(H+C)}{\partial x^n \partial x^n} \end{pmatrix}(x_e)$$

este pozitiv definită sau negativ definită. Atunci x_e este neliniar stabil. De regulă, în aplicaţii, ştiindu-se un Casimir C al varietăţii Poisson $(M, \{\ ,\ \})$ căutăm $\varphi(C)$ ce satisface *A)* şi *B)*. O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ o numim *pozitiv definită* (respectiv *negativ definită*) dacă pentru orice $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ avem $(x^1, \ldots, x^n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} > 0$ (respectiv < 0).

Seminar

S 5.1 (oscilatorul armonic 2D)

Considerăm doi oscilatori armonici independenţi şi cu frecvenţa $\omega = 1$:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 &= x^2 \\ \dot{x}^2 &= -x^1 \\ \dot{x}^3 &= x^4 \\ \dot{x}^4 &= -x^3 \end{cases}$$

Să se arate că originea $(0,0,0,0) = \overline{0}$ este punct de echilibru neliniar stabil.

Rezolvare: Avem un sistem liniar cu matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cu polinomul caracteristic:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2(\lambda^2+1) + (1+\lambda^2) = (\lambda^2+1)^2 \end{aligned}$$

şi verifică:

$$A^2 + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + I_4 = O_4$$

ceea ce spune că polinomul minimal al lui A este $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Valorile proprii ale lui A sunt rădăcinile polinomului caracteristic: $\lambda_1 = \lambda_2 = i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -i$ care au partea reală nulă. Aplicăm teorema I Lyapunov *ii*) şi cum $i, -i$ sunt rădăcini simple ale polinomului minimal avem concluzia. ∎

S 5.2

Să se arate că originea este punct de echilibru instabil pentru sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}^1 &= x^2 \\ \dot{x}^2 &= -x^1 \\ \dot{x}^3 &= x^4 \\ \dot{x}^4 &= x^1 - x^3 \end{cases}$$

care apare ca deformare la ultima ecuaţie a sistemului precedent.

Rezolvare: Avem un sistem liniar cu matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cu polinomul caracteristic:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^2+1) - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+1)^2$$

dar:

$$A^2 + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + I_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_4$$

Cum polinomul minimal divide polinomul caracteristic rezultă că $p_A = P_A$. Cum teorema I Lyapunov $b)$ nu se verifică, în sensul că $\pm i$ nu sunt rădăcini simple (ci cu multiplicitate 2) rezultă că $\overline{0}$ este punct de echilibru instabil. Acest exerciţiu, comparat cu primul, arată că o modificare

“relativ mică” (la ultima ecuaţie se adaugă x^1) schimbă dramatic natura punctului de echilibru.
■

S 5.3

Arătaţi că originea $\overline{0} = (0,0)$ este punct de echilibru neliniar stabil pentru sistemul:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 &= -x^1 + x^2 + x^1x^2 \\ \dot{x}^2 &= x^1 - x^2 - (x^1)^2 \end{cases}$$

REZOLVARE: Avem:

$$A_X = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & 1 + x^1 \\ 1 - 2x^1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_X(\overline{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_{A_X(\overline{0})}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 1 = \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda+2)$$

deci A are valorile proprii $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. Din teorema I Lyapunov *iii)* $\overline{0}$ nu este asimptotic stabil deoarece λ_1 nu este strict negativă, iar din *iv)* $\overline{0}$ nu este instabil căci $\lambda_1\lambda_2 \leqslant 0$. Altfel, pentru a aplica teorema a II-a Lyapunov avem nevoie de o funcţie Lyapunov pentru $\overline{0}$. Fie $L(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2$. Avem $L(x_e) = L(\overline{0}) = 0$ şi $L(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Avem

$$X(L) = (-x^1 + x^2 + x^1x^2)2x^1 + (x^1 - x^2 - (x^1)^2)2x^2 = -2((x^1)^2 + 2x^1x^2 + (x^2)^2) \leqslant 0$$

ceea ce voiam pentru teorema a II-a Lyapunov. Avem $X(L)(-a,a) = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$ deci $\overline{0}$ nu este asimptotic stabil. ■

S 5.4

Să se arate că originea este punct de echilibru asimptotic stabil pentru sistemul $\dot{X} = AX$ dacă matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisface $\operatorname{tr} A = a + c < 0$ şi $\det A = ad - bc > 0$.

REZOLVARE: Fie λ_1, λ_2 valorile proprii ale lui A deci soluţiile ecuaţiei $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A = 0$.
Caz I. $\lambda_1 \in \mathbb{C}$; atunci şi $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ cu $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ Atunci, din relaţiile Viete, $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = 2\operatorname{Re}(\lambda_1) = 2\operatorname{Re}(\lambda_2)$ şi din ipoteză rezultă $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$. Din teorema I Lyapunov *iii)* avem concluzia.
Caz II. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ Din relaţiile Viete avem $\lambda_1\lambda_2 = \det A > 0$ ceea ce spune că λ_1 şi λ_2 au acelaşi semn. Cum $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A < 0$ rezultă că $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ şi din nou avem concluzia cu acelaşi argument. ■

S 5.5 (rigidul liber)

Să se arate că $(0,0,0)$, $(M,0,0)$, $(0,M,0)$, $(0,0,M)$, $M \in \mathbb{R}^*$ sunt puncte de echilibru în dinamica rigidului liber după cum urmează: $(0,M,0)$ instabil, iar celelalte neliniar stabile.

REZOLVARE: Conform exerciţiului S4.1 liniarizat a sistemului diferenţial din dinamica rigidului este în $x = (x^1, x^2, x^3)$:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a_2x^3 & a_3x^3 \\ a_1x^3 & 0 & a_3x^1 \\ a_1x^2 & a_2x^1 & 0 \end{pmatrix}$$

În $x_e = (0, M, 0)$ avem:

$$A(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3M \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1M & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(x_e) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a_3M \\ 0 & -\lambda & 0 \\ a_1M & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - a_1a_3M).$$

Reamintim că pentru rigidul liber avem $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_3 > 0$ şi deci valorile proprii în $(0,M,0)$ sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{a_1a_3M}$. Cum există o valoare proprie pozitivă $(+\sqrt{a_1a_3M})$ conform criteriului *iv*) de la curs, punctul de echilibru $(0,M,0)$ este instabil.

I. Pentru originea $\overline{0}$ să arătăm că Hamiltonianul $H = \frac{1}{2}\left(\frac{(x^1)^2}{I_1} + \frac{(x^2)^2}{I_2} + \frac{(x^3)^2}{I_3}\right)$ este o funcţie Lyapunov. Avem $H(\overline{0}) = 0$, $H(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overline{0}\}$ şi $X(H) = 0$ deci aplicând teorema a II-a Lyapunov originea este punct de echilibru neliniar stabil.

II. Pentru $x_2 = (M,0,0)$, $M \neq 0$ aplicăm metoda energie-Casimir şi conform celor de la curs căutăm funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $L = H + \varphi\left(\frac{1}{2}(x^1)^2 + \frac{1}{2}(x^2)^2 + \frac{1}{2}(x^3)^2\right)$ să satisfacă condiţiile $A + B$.

A) $\nabla L(x) = \left(\frac{x^1}{I_1} + \varphi' \cdot x^1, \frac{x^2}{I_2} + \varphi' \cdot x^2, \frac{x^3}{I_3} + \varphi' \cdot x^3\right)$; deci $\nabla L(M,0,0) = \left(M\left(\frac{1}{I_1} + \varphi'\left(\frac{M^2}{2}\right)\right), 0, 0\right) = \overline{0}$ dacă $\varphi'\left(\frac{M^2}{2}\right) = -\frac{1}{I_1}$

B) $$D^2L(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} + \varphi' + \varphi''(x^1)^2 & \varphi''x^1x^2 & \varphi''x^1x^3 \\ \varphi''x^1x^2 & \frac{1}{I_2} + \varphi' + \varphi''(x^2)^2 & \varphi''x^2x^3 \\ \varphi''x^1x^3 & \varphi''x^2x^3 & \frac{1}{I_3} + \varphi' + \varphi''(x^3)^2 \end{pmatrix}$$

deci:

$$D^2L(M,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_1} + \varphi''\left(\frac{M^2}{2}\right)M^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} + \varphi''\left(\frac{M^2}{2}\right)0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} + \varphi''\left(\frac{M^2}{2}\right)0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi''\Big(\frac{M^2}{2}\Big)M^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 \end{pmatrix}$$

Trebuie îndeplinite condiţiile $\varphi'\Big(\frac{M^2}{2}\Big) = -\frac{1}{I_1}$, $\varphi''\Big(\frac{M^2}{2}\Big) > 0$ pentru ca $D^2L(M,0,0)$ să fie pozitiv definită. În acest caz $(M,0,0)$ este neliniar stabil. Pentru a găsi un exemplu de funcţie φ cu relaţiile cerute căutăm $\varphi(x) = \alpha\Big(x - \frac{M^2}{2}\Big)^2 + \beta\Big(x - \frac{M^2}{2}\Big)$. Avem $\varphi'(x) = 2\alpha\Big(x - \frac{M^2}{2}\Big) + \beta$ deci $\beta = \varphi'\Big(\frac{M^2}{2}\Big) = -\frac{1}{I_1}$ şi $\varphi''(x) = 2\alpha > 0$ deci luăm $\alpha = 1$. În concluzie $\varphi(x) = \Big(x - \frac{M^2}{2}\Big)^2 - \frac{1}{I_1}\Big(x - \frac{M^2}{2}\Big)$ satisface condiţiile cerute.

III. Aplicăm aceeaşi metodă:

A) $\nabla L(0,0,M) = \Big(0,0,M\Big(\frac{1}{I_3} + \varphi'\Big(\frac{M^2}{2}\Big)\Big)\Big) = \overline{0}$ dacă $\varphi'\Big(\frac{M^2}{2}\Big) = -\frac{1}{I_3}$

B) $D^2L(0,0,M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi''\Big(\frac{M^2}{2}\Big)M^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi''\Big(\frac{M^2}{2}\Big)M^2 \end{pmatrix}$

Deci căutând $\varphi'\Big(\frac{M^2}{2}\Big) = -\frac{1}{I_3}$ şi $\varphi''\Big(\frac{M^2}{2}\Big) < 0$ avem că A, B sunt îndeplinite cu $D^2L(0,0,M)$ negativ definită şi în concluzie $(0,0,M)$ este neliniar stabil. Funcţia $\varphi(x) = -\Big(x - \frac{M^2}{2}\Big)^2 - \frac{1}{I_3}\Big(x - \frac{M^2}{2}\Big)$ satisface cerinţele problemei.

■

S 5.6 (Lagrange)

Considerăm un sistem Hamiltonian simplectic pe $\mathbb{R}^{2m}$ cu Hamiltonianul H. Dacă x_e este punct de echilibru cu $D^2H(x_e)$ pozitiv sau negativ definită atunci x_e este neliniar stabil.

Rezolvare: Aplicăm criteriul energie-Casimir cu φ funcţia nulă. ■

Exemplu. Originea pentru $\ddot{q} = -q - q^3$. Acest sistem este Hamiltonian cu $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{q^2}{2} + \frac{q^4}{4}$. Cum $\nabla H = (q + q^3, p)$ rezultă $D^2H(q,p) = \begin{pmatrix} 1+3q^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ deci $D^2H(\overline{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ care este pozitiv definită.

Lecţia 6

Traiectoriile câmpurilor vectoriale liniare

Suport de curs

Definiţia 6.1

Câmpul vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ îl numim *liniar* dacă $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o transformare liniară i.e. există $A \in M_n(\mathbb{R})$ aşa încât $X(x) = A \cdot x$.

Pentru matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ numim *norma* lui A numărul real pozitiv $\| A \| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} (a^i_j)^2 \right)^{1/2} = (\langle A, A \rangle)^{1/2}$ conform exerciţiului S1.5.

O proprietate importantă a normei, utilă în cele ce urmează, este $\| AB \| \leqslant \| A \| \cdot \| B \|$; rezultă că pentru numărul natural k avem $\| A^k \| \leqslant \| A \|^k$.

Definiţia 6.2

Spunem că şirul de matrici $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge în normă* la $A \in M_n(\mathbb{R})$ dacă $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $k > N$ implică $\| A_k - A \| < \varepsilon$. Notăm $A_k \to A$.

Suntem interesaţi în găsirea curbelor integrale ale câmpului vectorial liniar $A \in M_n(\mathbb{R})$. Acestea sunt determinate de sistemul diferenţial:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix}.$$

Analizăm cazul $n = 1$ deci $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Din expresia $\frac{\dot{x}}{x} = A$ prin integrare avem $\ln x - \ln x_0 = At$ cu soluţia generală $x(t) = e^{At}x_0$ unde $x_0 = x(t_0)$ este data iniţială iar $A \in \mathbb{R}$. Pentru cazul general $n \geqslant 2$ rezultă că trebuie definită matricea e^{At} pentru $t \in \mathbb{R}$ şi $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Propoziţia 6.1

Dat $t \in \mathbb{R}$ şi $A \in M_n(\mathbb{R})$ seria matriceală $\sum_{k \geqslant 0} \frac{t^k}{k!} A^k$ converge absolut şi uniform pentru $t \in [-T, T]$ cu $T > 0$.

Demonstraţie: Fie $a = \parallel A \parallel \in \mathbb{R}_+$. Avem $\left\| \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \leqslant \frac{|t|^k}{k!} \parallel A \parallel^k \leqslant \frac{(Ta)^k}{k!}$; deci $\sum_{k \geqslant 0} \left\| \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \leqslant \sum_{k \geqslant 0} \frac{(Ta)^k}{k!} = e^{Ta}$. Aplicând criteriul Weierstrass avem concluzia. ■

Definiţia 6.3

Limita seriei din propoziţia precedentă o notăm e^{At} şi o numim *exponenţiala* matricii A.

Proprietăţile exponenţialei:

i) $e^{O_n} = I_n$

ii) ${}^t(e^{\bar{A}}) = e^{{}^t\bar{A}}$ considerând $A \in M_{2n}(\mathbb{C})$

iii) e^{At} este inversabilă şi $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

iv) $e^{(\alpha+\beta)A} = e^{\alpha A} e^{\beta A}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

v) dacă A, B comută i.e. $AB = BA$ atunci $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$

vi) dacă S este inversabilă atunci $e^{SAtS^{-1}} = Se^{At}S^{-1}$

vii) $\parallel e^A \parallel \leqslant e^{\parallel A \parallel}$

viii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$; în particular $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At}\right|_{t=0} = A$.

Curbele integrale ale câmpurilor vectoriale liniare sunt date de:

Teorema 6.1 (fundamentală a sistemelor diferenţiale liniare)

Sistemul diferenţial liniar

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ dat} \end{cases}$$

are soluţia unică $x(t) = e^{At}x_0$.

Prin urmare suntem interesaţi de metode de calcul a exponenţialei:

I. *A diagonalizabilă*; deci există $S \in GL(n, \mathbb{R})$ a.î. $A = SDS^{-1}$ cu:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Cum $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$ rezultă că:

$$e^A = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1}$$

II. *A nilpotentă* adică $\exists m \in \mathbb{N}^*$ a.î. $A^m = O_n$. Rezultă că $e^A = I_n + \dfrac{1}{1!}A + \dfrac{1}{2!}A^2 + \cdots + \dfrac{1}{(m-1)!}A^{m-1}$.

III. *A oarecare*. Se arată că orice matrice A se poate scrie în mod unic sub forma $A = X + N$ cu X diagonalizabilă, N nilpotentă şi $XN = NX$. Atunci $e^A = e^X \cdot e^N$ şi e^X, e^N se calculează imediat după cazurile precedente.

Se poate arăta şi următoarea formulă de calcul a exponenţialei: $e^A = \lim\limits_{k\to\infty}(I_n + \dfrac{1}{k}A)^k$. Drept aplicaţie a acestei formule să considerăm pentru $z_0 = u + iv \in \mathbb{C}$ fixat câmpul vectorial $X : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $X(z) = z_0 \cdot z$. Avem $X(1) = z_0 \cdot 1 = u + iv$ şi $X(i) = z_0 \cdot i = -v + iu$ deci $A = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$. Fie $I_2 + \dfrac{1}{k}A$ ce apare ca matricea câmpului vectorial liniar $1 + \dfrac{z_0}{k}$.

Orice număr complez z se scrie $z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$. Avem, pentru un n foarte mare:

– $\arg\left(1 + \dfrac{z}{n}\right) = \operatorname{Im}\dfrac{z}{n} = \dfrac{1}{n}\operatorname{Im} z$

– $\left|1 + \frac{z}{n}\right| = 1 + \operatorname{Re}\frac{z}{n} = 1 + \frac{1}{n}\operatorname{Re} z$

Matricea $\left(I_2 + \frac{1}{k}A\right)^k$ este matricea câmpului vectorial $\left(1 + \frac{z_0}{k}\right) \underbrace{\circ \cdots \circ}_{k \text{ ori}} \left(1 + \frac{z_0}{k}\right)$. Deci

$$\begin{cases} n \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \operatorname{Im} z \\ \left|1 + \frac{1}{z}\right|^n = \left(1 + \frac{1}{n} \operatorname{Re} z\right)^n \end{cases}$$

şi din formula Moivre $z^n = |z|^n (\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z))$ rezultă că

$$e^A = \lim_{n\to\infty} \left|1 + \frac{z_0}{n}\right|^n (\cos(n \arg(1 + \frac{z_0}{n})) + i \sin(n \arg z_0)) = e^{\operatorname{Re} z_0}(\cos(\operatorname{Im} z_0) + i \sin(\operatorname{Im} z_0))$$

În concluzie:

$$e^z = e^u(\cos v + i \sin v)$$

numită *formula Euler*.

Seminar

S 6.1

Folosind formula Euler să se arate că:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & -v \\ v & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix}, \quad e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v, \quad e^{\pi i} = -1$$

Rezolvare: Conform formulei Euler:

$$e^{\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{pmatrix}$$

şi pentru $u = 0$ obţinem prima relaţie, iar din prima relaţie cu $v = 1$ obţinem a doua relaţie. Relaţia a treia se obţine din $e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$ cu $u = 0$, iar a patra relaţie se obţine din a treia făcând $v = \pi$. ■

S 6.2

Se cere exponenţiala matricii:

$$A = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Rezolvare: Matricea dată se scrie $A = X + N$ cu:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi avem:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deci $XN = NX$, iar X este diagonală, N nilpotentă cu:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

Avem:

$$e^{Xt} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 & 0 \\ 0 & e^{at} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ct} \end{pmatrix}, \quad e^{Nt} = I_3 + \frac{t}{1!} N = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi deci:

$$e^{At} = e^{Xt} e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 & 0 \\ 0 & e^{at} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ct} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ct} \end{pmatrix}.$$

■

S 6.3

Se cere exponenţiala matricii:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

Rezolvare: Polinomul caracteristic al lui A este:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & t \\ t & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - t^2 = (\lambda + t)(\lambda - t)$$

deci A are valorile proprii $\lambda_1 = t$, $\lambda_2 = -t$. Pentru $V(\lambda_1) : -tx + ty = 0$ dă vectorul propriu $v_1 = (1, 1)$, iar pentru $V(\lambda_2) : tx + ty = 0$ dă vectorul propriu $v_2 = (-1, 1)$. Deci considerând matricea

$$S = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

aceasta este inversabilă cu

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Avem $A = SDS^{-1}$, $D = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$ şi deci

$$\begin{aligned} e^A &= Se^D s^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

În concluzie

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

■

S 6.4

Folosind S 6.1 să se arate că:

$$\begin{cases} \cos t &= \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \\ \sin t &= \frac{1}{2}(e^{it} - e^{-it}) \end{cases}$$

Rezolvare: Din $e^{it} = \cos t + i \sin t$ rezultă $e^{-it} = \cos t - i \sin t$ şi prin adunare, respectiv scădere avem concluzia. Am folosit paritatea funcţii cosinus şi imparitatea funcţiei sinus. ■

S 6.5

Dacă A este matrice antisimetrică (${}^tA = -A$) atunci $B = e^A$ este ortogonală (${}^tB \cdot B = I_n$).

Rezolvare: ${}^t(e^A) = {}^t\left(\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}A^k\right) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}({}^tA)^k = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}(-A)^k = e^{-A}$ şi $e^A \cdot e^{-A} = e^{O_n} = I_n$.
■

S 6.6 (simetrie pentru sisteme diferenţiale)

Fie A matrice antisimetrică şi $x(t)$ soluţie unică a sistemului diferenţial $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$. Atunci $\forall t \in \mathbb{R}$ avem $\| x(t) \| = \| x_0 \|$.

Rezolvare: Conform exerciţiului anterior $e^{At} \in O(n)$ şi deci $\| x(t) \|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle = \langle e^{At}x_0, e^{At}x_0 \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle$ (din $e^{At} \in O(n)$) $= \| x_0 \|^2$. Deci $\| x(t) \| = \| x_0 \|$. ■

Lecţia 7

Grupuri matriceale

Suport de curs

Fie $\mathcal{K}$ unul din corpurile comutative $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ şi $M_n(\mathcal{K})$ mulţimea matricilor pătratice de ordin n cu elemente din $\mathcal{K}$. $M_n(\mathcal{K})$ este inel relativ la adunarea şi înmulţirea matricilor, inel comutativ doar pentru $n = 1$ când $M_1(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$; pentru $n \geqslant 2$ $M_n(\mathcal{K})$ este inel necomutativ. Suntem interesaţi în studiul elementelor inversabile (relativ la înmulţire) ale acestui inel. Fie deci $GL(n, \mathcal{K}) = \{A \in M_n(\mathcal{K}); A = \text{matrice inversabilă}\}$; reamintim caracterizarea $A \in GL(n, \mathcal{K}) \iff \det A \neq 0$.

Propoziţia 7.1

$GL(n, \mathcal{K})$ este grup relativ la înmuţirea matricilor (pentru $n \geqslant 2$ neabelian).

Demonstraţie: Fie $A_1, A_2 \in GL(n, \mathcal{K})$; cum $\det(A_1A_2) = \det A_1 \cdot A_2$ şi cum $\mathcal{K}$ fiind corp nu admite divizori ai lui zero, din $\det A_1 \neq 0$ şi $\det A_2 \neq 0$ rezultă că $\det(A_1A_2) \neq 0$ deci $A_1A_2 \in GL(n, \mathcal{K})$. Prin urmare $GL(n, \mathcal{K})$ este parte stabilă relativ la înmulţire. Înmulţirea matricilor este asociativă, I_n este element neutru şi $I_n \in GL(n, \mathcal{K})$ iar pentru $A \in GL(n, \mathcal{K})$ există evident A^{-1} şi $A^{-1} \in GL(n, \mathcal{K})$. ■

Definiţia 7.1

$GL(n, \mathcal{K})$ îl numim *n-grupul liniar general* peste $\mathcal{K}$.

Spre exemplu $GL(1, \mathcal{K}) = \mathcal{K}^*$ şi numai în acest caz grupul liniar este abelian.

Definiţia 7.2

i) Fie şirul $(A_k)_k \in M_n(\mathcal{K})$ şi $A \in M_n(\mathcal{K})$. Spunem că $(A_k)_k$ *converge* la A dacă $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ şirul numeric $(A_k)^i_j$ converge la A^i_j. Dacă $(A_k)_k$ converge în normă la A atunci $(A_k)_k$ converge la A; deci notăm la fel $A_k \to A$.

ii) Mulţimea $G \subset GL(n, \mathcal{K})$ o numim *închisă* dacă $\forall (A_k)_k \in GL(n, \mathcal{K})$ cu $A_k \to A$ avem $A \in G$.

iii) Mulţimea $G \subset GL(n, \mathcal{K})$ o numim *grup matricial tare* dacă este subgrup în $GL(n, \mathcal{K})$ şi închisă.

iv) Mulţimea $G \subset GL(n, \mathcal{K})$ o numim *grup matricial slab* dacă este subgrup în $GL(n, \mathcal{K})$ şi satisface următoarea proprietate (Lie): dacă $(A_k)_k \in G$ şi $A_k \to A$ atunci sau $A \in G$ sau $A \notin GL(n, \mathcal{K})$.

Definiţia 7.3

Fie $F : M \subseteq \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}$, $(x^1, \ldots, x^n) \to F(x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{K}$ şi $x_0 \in M$ fixat. Spunem că F este *continuă în* x_0 dacă $\forall (x_k)_k \in M$ cu $x_k \to x_0$ (pe componente) avem că şirul $(F(x_k))_k$ converge în $\mathcal{K}$ la $F(x_0)$. Dacă F este continuă în orice punct din M spunem că F este continuă pe M.

Exemplul 6

i) Orice câmp scalar, funcţiile constante, funcţiile polinomiale, funcţiile raţionale cu numitor ce nu se anulează pe M.

ii) $F = \det : M_n(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{K}^{n^2} \to \mathcal{K}$, $\det A =$ determinantul matricii A este funcţie polinomială de grad n.

iii) $F : \operatorname{tr} : M_n(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}$, $\operatorname{tr} A =$ urma matricii $A = \sum_{i=1}^{n} a^i_i$ este funcţie liniară, $\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr} A + \mu \operatorname{tr} B$, deci continuă

Exemple de grupuri matriceale

I. $\underline{G = GL(n, \mathcal{K})}$

Este evident că dat şirul $(A_k)_k \in GL(n, \mathcal{K})$ cu $A_k \to A$ avem că sau A este inversabilă i.e. $A \in G$ sau A nu este inversabilă. Deci $GL(n, \mathcal{K})$ este grup matricial slab.

II. $\underline{G = SL(n, \mathcal{K})} = \{A \in M_n(\mathcal{K}); \det A = 1\}$

Cum $\det A = 1 > 0$ rezultă că $SL(n, \mathcal{K}) \subset GL(n, \mathcal{K})$.

Propoziţia 7.2

$SL(n,\mathcal{K})$ este subgrup în $GL(n,\mathcal{K})$.

DEMONSTRAŢIE: *i)* Fie $A_1, A_2 \in SL(n,\mathcal{K})$. Avem $\det(A_1A_2) = \det A_1 \det A_2 = 1 \cdot 1 = 1$. Deci $A_1A_2 \in SL(n,\mathcal{K})$.

ii) Fie $A \in SL(n,\mathcal{K})$; din $A \cdot A^{-1} = I_n$ rezultă că $\det A \cdot \det A^{-1} = \det I_n = 1$. Deci $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1$ i.e. $A^{-1} \in SL(n,\mathcal{K})$.

■

Definiţia 7.4

$SL(n,\mathcal{K})$ îl numim *n-grupul liniar special peste $\mathcal{K}$.*

Spre exemplu $SL(n,\mathcal{K}) = \{1_{\mathcal{K}}\} = \{1\}$.

Fie $(A_k)_k \in SL(n,\mathcal{K})$ cu $A_k \to A$. Din continuitatea funcţiei determinant avem că $\det A_k = 1 \to \det A$; deci $\det A = 1$, adică $A \in SL(n,\mathcal{K})$. În concluzie $SL(n,\mathcal{K})$ este grup matricial tare.

Observaţii:

Exemple remarcabile de grupuri matriciale se obţin cerând invarianţa relativ la forme biliniare speciale pe $\mathcal{K}^n$. Următoarele două exemple şi alte exemple din seminar sunt de acest tip.

III. $\underline{G = O_n} = \{A \in M_n(\mathbb{R}); \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}$

Am arătat la sfârşitul primului curs că $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); {}^tA \cdot A = I_n\}$; deci $O(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$ căci $\forall A \in O(n)\ \exists A^{-1} = {}^tA$.

Propoziţia 7.3

$O(n)$ este subgrup în $GL(n,\mathbb{R})$.

DEMONSTRAŢIE: *i)* Fie $A_1, A_2 \in O(n)$ şi $x, y \in \mathbb{R}^n$ oarecare. Avem $\langle A_2A_1x, A_2A_1y\rangle \overset{A_2\in O(n)}{=} \langle A_1x, A_1y\rangle \overset{A_1\in O(n)}{=} \langle x, y\rangle$; deci $A_2A_1 \in O(n)$.

ii) Fie $A \in O(n)$. Folosim definiţia pentru elementele $A^{-1}x, A^{-1}y$; deci $\langle A(A^{-1}x), A(A^{-1}y)\rangle = \langle A^{-1}x, A^{-1}y\rangle$; rezultă că $A^{-1} \in O(n)$.

■

Definiţia 7.5

$O(n)$ îl numim *n-grupul ortogonal.*

Exemplul 7

$O(1) = \{A \in \mathbb{R}; A \cdot A = 1\} = \{-1, +1\}$; am arătat că $O(1)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_2, +)$ în S1.7.

Cum $\det {}^tA = \det A$ avem $\det({}^tA \cdot A) = \det {}^tA \cdot \det A = (\det A)^2 = \det I_n = 1$; $\det A \in \{-1, +1\}$. Rezultă că $O(n) = O^-(n) \cup SO(n)$ unde $O^-(n) = \{A \in O(n); \det A = -1\}$ şi $SO(n) = \{A \in O(n); \det A = +1\}$. $O^-(n)$ nu este parte stabilă la înmulţire deoarece dacă $A_1, A_2 \in O^-(n)$ atunci $\det(A_1A_2) = \det A_1 \det A_2 = (-1) \cdot (-1) = +1$; deci $A_1A_2 \notin O^-(n)$.

Propoziţia 7.4

$SO(n)$ este subgrup în $O(n)$.

Demonstraţie: *i)* Fie $A_1, A_2 \in SO(n)$. Din $\det(A_1A_2) = 1$ rezultă că $A_1A_2 \in SO(n)$.

ii) Fie $A \in SO(n)$; cum $A^{-1} = {}^tA$ avem $\det A^{-1} = \det({}^tA) = 1$ i.e. $A^{-1} \in SOL(n)$.

■

Definiţia 7.6

$SO(n)$ îl numim *n-grupul ortogonal special.*

Avem că $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$. Fie $(A_k)_k \in O(n)$ cu $A_k \to A$. Cum funcţia transpunere este continuă avem că ${}^tA_k \to {}^tA$; deci ${}^tA_k \cdot A_k = I_n \to {}^tA \cdot A$ i.e. ${}^tA \cdot A = I_n$. În concluzie $O(n)$ este grup matricial tare. $SO(n)$ este intersecţie de grupuri matriciale tari; rezultă că $SO(n)$ este grup matricial tare.

IV. $\underline{G = U(n)} = \{A \in M_n(\mathbb{C}); \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall x, y \in \mathbb{C}^n\}$

Am arătat că $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}); {}^t\bar{A} \cdot A = I_n\}$; deci $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ căci $\forall A \in U(n)\ \exists A^{-1}$ cu $A^{-1} = {}^t\bar{A}$. Exact la fel ca la $O(n)$ avem că $U(n)$ este subgrup în $GL(n, \mathbb{C})$ numit *n-grupul unitar.* Fie $(A_k)_k \in U(n)$ cu $A_k \to A$. Funcţiile transpunere şi conjugare sunt continue, deci ${}^t\bar{A}_k \to {}^t\bar{A}$. Avem ${}^t\bar{A}_k \cdot A_k = I_n \to {}^t\bar{A}A$; deci ${}^t\bar{A} \cdot A = I_n$ i.e. $A \in U(n)$. Prin urmare $U(n)$ este grup matricial tare. Fie $A \in U(n)$ oarecare: $\det({}^t\bar{A} \cdot A) = \det {}^t\bar{A} \det A = \det \bar{A} \det A = \overline{\det A} \det A = |\det A|^2 = \det I_n = 1$. Avem că $U(n) \subset \{A \in GL(n, \mathbb{C}); |\det A| = 1\}$. Fie $SU(n) = \{A \in U(n); \det A = 1\}$. Avem că $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$ şi cum acestea sunt grupuri rezultă că $SU(n)$ este subgrup în $U(n)$. Mai mult $SU(n)$ este intersecţia a două grupuri matriciale tari; deci $SU(n)$ este grup matricial tare numit *n-grupul unitar special.*

V. $\underline{G = H_3}$ (Heisenberg)

Fie $H_3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}); A = A(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$. Fie $A = A(a_1,a_2,a_3)$, $B = (b_1,b_2,b_3) \in H_3$; avem:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1+b_1 & b_2+a_1b_3+a_2 \\ 0 & 1 & a_3+b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= A(a_1+b_1, a_2+b_2+a_1b_3, a_3+b_3)$$

ceea ce arată că H_3 este parte stabilă relativ la înmulţire. Avem că $I_3 = A(0,0,0) \in H_3$ şi din sistemul

$$\begin{cases} a_1+b_1 = 0 \\ a_2+b_2+a_1b_3 = 0 \\ a_3+b_3 = 0 \end{cases}$$

rezultă soluţia $b_1 = -a_1$, $b_3 = -a_3$, $b_2 = -a_2 - a_1(-a_3) = -a_2 + a_1a_3$. În concluzie, H_3 este grup cu:

$$(A(a,b,c))^{-1} = A(-a, -b+ac, -c)$$

ceea ce arată şi faptul că H_3 este subgrup în $GL(3,\mathbb{R})$. Acest grup se numeşte *grupul Heisenberg* datorită legăturii cu relaţiile Heisenberg de comutare din mecanica cuantică. Avem imediat că H_3 este grup matricial tare.

VI. $\underline{G = O(n,\mathbb{C}), SO(n,\mathbb{C})}$

Fie $(\ ) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $(x,y) = x^1y^1 + \cdots + x^ny^n$. $A \in M_n(\mathbb{C})$ o numim *complex ortogonală* dacă invariază $(\ )$ i.e. $\forall x,y \in \mathbb{C}^n$ avem $(Ax,Ay) = (x,y)$ şi fie $O(n,\mathbb{C})$ mulţimea acestor matrici. Cum $(x,y) = {}^tx \cdot y$ rezultă exact ca la grupul $O(n)$ că $O(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}); {}^tA \cdot A = I_n\}$ şi de aici rezultă că $O(n,\mathbb{C})$ este subgrup în $GL(n,\mathbb{C})$. Exact ca la $O(n)$ avem că $O(n,\mathbb{C})$ este grup matricial tare numit *n-grupul complex ortogonal*; acest grup diferă de $U(n)$ deoarece $(\ )$ diferă de $\langle\ \rangle$. Analog $SO(n,\mathbb{C}) = \{A \in O(n,\mathbb{C}); \det A = +1\}$ este subgrup în $O(n,\mathbb{C})$ şi este grup matricial tare numit *n-grupul complex ortogonal special*.

Seminar

S 7.1

Să se determine $O(2)$ şi $SO(2)$.

REZOLVARE: Fie $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$; deci:

$$^{t}A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Din sistemul

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ c^2+d^2 = 1 \\ ac+bd = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \cos\varphi, \ b = \sin\varphi \\ c = \cos\psi, \ d = \sin\psi \\ \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = \cos(\psi-\varphi) = 0 \end{cases}$$

avem două cazuri: I) $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$, II) $\psi = \varphi + \frac{3\pi}{2}$.

I) $c = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi$, $d = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$. În concluzie:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

şi cum $\det A = 1$ rezultă că:

$$SO(2) = \left\{ A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}; \varphi \in [0, 2\pi) \right\}$$

II) $c = \cos\left(\varphi + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\varphi$, $d = \sin\left(\varphi + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\varphi$. În concluzie:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

şi cum $\det A = -1$ rezultă că:

$$O^{-}(2) = \left\{ A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}; \varphi \in [0, 2\pi) \right\}$$

■

S 7.2

Să se arate că $SO(2)$ este grup izomorf cu $(S^1, \cdot)$.

REZOLVARE: Fie aplicaţia $F : SO(2) \to \mathbb{R}^2$, $F(A(\varphi)) = (\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Avem că $|F(A(\varphi))| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$ deci $\operatorname{Im} F = S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ = cercul unitate. F este evident surjectivă; dat numărul complex z de modul 1 acesta se scrie în mod unic, în forma trigonometrică $z = |z|(\cos\varphi + 1\sin\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$, deci $z = F(A(\varphi))$. Pentru injectivitate presupunem $F(A(\varphi_1)) = F(A(\varphi_2))$; cum $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$, $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$ are soluţia unică $\varphi_1 = \varphi_2$ (în intervalul $[0, 2\pi)$ datorită periodicităţii funcţiilor trigonometrice) rezultă că F este injectivă. Deci F este bijecţie şi mai trebuie arătat că este morfism de grupuri. Un calcul imediat dă $A(\varphi_1) \cdot A(\varphi_2) = A(\varphi_1 + \varphi_2)$ (verificaţi!) şi $z_1 \cdot z_2 = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$; rezultă că

$$F(A(\varphi_1) \cdot A(\varphi_2)) = F(A(\varphi_1 + \varphi_2)) = z_1 \cdot z_2 = F(A(\varphi_1)) \cdot F(A(\varphi_2))$$

şi deci F este izomorfism de grupuri. ■

S 7.3

Se cere $U(1)$ şi $SU(1)$.

REZOLVARE: $U(1) = \{z \in M_1(\mathbb{C}); \bar{z} \cdot z = 1\} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = S^1$. $SU(1) = \{z \in S^1; z = 1\} = \{1\}$ ■

S 7.4

Se cere $SU(2)$ şi legătura cu numerele cuaternionice.

REZOLVARE: Fie $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SU(2)$; deci $\det A = ad - bc = 1$ şi

$${}^t\bar{A} \cdot A = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & \bar{a}c + \bar{b}d \\ a\bar{c} + b\bar{d} & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ceea ce spune că:

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1 \\ \bar{a}c + \bar{b}d = 0 \\ -bc + ad = 1 \end{cases}$$

Înmulţim ecuaţia a doua cu b, a treia cu $\bar{a}$ şi adunând noile ecuaţii obţinem $(|b|^2 + |a|^2)d = \bar{a}$ i.e. $d = \bar{a}$. Din a treia ecuaţie rezultă $c = -b$ şi în concluzie:

$$SU(2) = \{A(a, b) = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}); |a|^2 + |b|^2 = 1\}.$$

Să observăm legea de înmulţire pe $SU(2)$:

$$A(a,b)\cdot A(c,d) = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -\bar{d} \\ d & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-\bar{b}d & -a\bar{d}-\bar{b}\bar{c} \\ bc+\bar{a}d & -b\bar{d}+\bar{a}\bar{c} \end{pmatrix} = A(ac-\bar{b}d, bc+\bar{a}d).$$

Mulţimea $\{(a,b)\in\mathbb{C}^2; |a|^2+|b|^2=1\}$ este $\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4; a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=1\}$ adică *exact* sfera S^3. Prin urmare aplicaţia $F: SU(2)\to S^3$, $F(A(a,b))=(a,b)$ este exact o bijecţie. Cum pe S^1 avem o lege de înmulţire indusă de cea a lui $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ ne întrebăm dacă legea de înmulţire pe S^3 indusă via F este restricţia unei înmulţiri din $\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$. Fie deci $z=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{C}^2$ scris sub forma $z=a_1+ia_2+ja_3+ka_4$ cu regulile de înmulţire $i^2=j^2=k^2=-1$ ca extensie a înmulţirii din $\mathbb{C}$ şi încă: $ij=k$, $jk=i$, $ki=i$ adică avem regula circulară.

Atunci $z_1\cdot z_2=(a_1+ia_2+ja_3+ka_4)(b_1+ib_2+jb_3+kb_4)=(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)+i(\ldots)+j(\ldots)+k(\ldots)$. Verificăm cu înmulţirea de la $SU(2)$: $ac-\bar{b}d=(a_1+ia_2)(b_1+ib_2)-(a_3-ia_4)(b_3+ib_4)=(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)+i(\ldots)$; deci cele două înmulţiri coincid. $\mathbb{R}^4=\mathbb{C}^2$ cu înmulţirea astfel introdusă este corp necomutativ numit *corpul cuaternionilor*. ■

Observaţii:

$A(0,-1)$ este exact structura simplectică planului:

$$A(0,-1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lecţia 8

Algebra Lie a unui grup matriceal

Suport de curs

Definiţia 8.1

Fie G un grup matricial (slab sau tare). Mulţimea $L(G) = \{X \in M_n(\mathcal{K}); e^{tX} \in G\ \forall t \in \mathbb{R}\}$ o numim *algebră Lie* a grupului matricial G.

Propoziţia 8.1

Fie $X, Y \in L(G)$. Atunci $X + Y \in L(G)$, $sX \in L(G)\ \forall s \in \mathbb{R}$ şi $X \cdot Y - Y \cdot X \in L(G)$. Mai mult dacă $A \in G$ atunci $AXA^{-1} \in L(G)$.

Demonstraţie: $e^{t(X+Y)} = e^{tX} \cdot e^{tY} \in G$ din G grup dacă X, Y comută. Dacă nu comută se foloseşte formula $e^{t(X+Y)} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(e^{\frac{t}{k}X} e^{\frac{t}{k}Y}\right)^k$. $e^{t(sX)} = e^{(ts)X} \in G$ deci $sX \in L(G)$. Din proprietatea *viii*) a exponenţialei (vezi cursul 6) avem $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{tX}Y\right)\Big|_{t=0} = XY$ din regula Leibniz $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{tX}Ye^{-tX}\right)\Big|_{t=0} = (XY)e^{O_n} + (e^{O_n}Y)(-X) = XY - YX$. Avem că $e^{tX}Ye^{-tX} \in L(G)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ dacă mai arătăm ultima proprietate. Or, această ultimă proprietate rezultă din faptul că $e^{t(AXA^{-1})} = Ae^{tX}A^{-1} \in G\ \forall t \in \mathbb{R}$. ∎

Rezultă că $L(G)$ este spaţiu vectorial real relativ la operaţiile de sumă şi înmulţire cu scalari reali. Mai mult $L(G)$ este mulţime închisă relativ la paranteza $[X, Y] = XY - YX$ care verifică axiomele de algebră Lie. Deci $(L(G), +, [\ ])$ este o algebră Lie şi acest lucru justifică denumirea lui $L(G)$.

I $\quad \underline{L(GL(n, \mathcal{K}))}$

Deoarece $\forall X \in M_n(\mathcal{K})$ matricea e^{tX} este inversabilă rezultă că $L(GL(n,\mathcal{K}))$ care o notăm $\underline{gl(n,\mathcal{K})}$ este chiar $M_n(\mathcal{K})$.

II $\underline{L(SL(n,\mathcal{K}))}$

Avem că $\det(e^X) = e^{\operatorname{tr} X}$ şi deci $\operatorname{tr} X = 0$ implică $\det(e^{tX}) = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Invers, dacă $\det(e^{tX}) = e^{t \operatorname{tr} X} = 1$ rezultă că $\operatorname{tr} X = 0$. În concluzie $U(SL(n,\mathcal{K}))$ notată $\underline{sl(n,\mathcal{K})}$ este $sl(n,\mathcal{K}) = \{A \in M_n(\mathcal{K}); \operatorname{tr} A = 0\}$.

III $\underline{L(O(n))}$

Fie $X \in M_n(\mathbb{R})$ a.î. $e^{sX} \in O(n)$; deci ${}^t(e^{sX}) \cdot e^{sX} = I_n$ deci e^{sX} este inversabilă cu $(e^{sX})^{-1} = {}^t(e^{sX}) = e^{s^tX}$. Dar $(e^{sX})^{-1} = e^{-sX}$ şi deci $e^{sX} \in O(n)$ $\forall s \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $e^{-sX} = e^{s^tX}$ echivalent ${}^tX = -X$. Deci $L(O(n))$ notată $\underline{o(n)}$ este

$$o(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}); {}^tX = -X\} = \operatorname{Antisym}(n,\mathbb{R})$$

adică mulţimea matricilor antisimetrice. $L(SO(n))$ este aceeaşi mulţime $so(n) = \operatorname{Antisym}(n,\mathbb{R})$. $O(n,\mathbb{C})$ şi $SO(n,\mathbb{C})$ au aceeaşi algebră Lie $so(n,\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}); {}^tX = -X\}$.

IV $\underline{L(U(n))}$

Cu aceleaşi argumente de mai sus algebra Lie a lui $U(n)$ notată $\underline{u(n)}$ este

$$u(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}); {}^t\bar{X} = -X\}.$$

Cum $SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$ rezultă că algebra Lie a lui $SU(n)$ este:

$$\underline{su(n)} = \{X \in M_n(\mathbb{C}); {}^t\bar{X} = -X, \operatorname{tr} X = 0\}$$

V $\underline{L(H_3)}$

Fie $X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ oarecare. Avem că:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^3 = O_3$$

şi deci:

$$e^{tX} = I_3 + \frac{t}{1!}X + \frac{t^2}{2!}X^2 = \begin{pmatrix} 1 & t\alpha & t\beta \\ 0 & 1 & t\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2}\alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cu $c = t\alpha$, $b = t\beta + \dfrac{t^2}{2}\alpha\gamma$, $c = t\gamma$. În concluzie:

$$L(H_3) = \left\{ X(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}); \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Asocierea grup matricial $\rightarrow$ algebră Lie are proprietăţi remarcabile date de:

Teorema 8.1

Fie G, H grupuri matriciale şi $\Phi : G \to H$ un morfism de grupuri matriciale. Atunci există şi este unică o transformare $\mathbb{R}$-liniară $\varphi : L(G) \to L(H)$ a.î. $\Phi(e^X) = e^{\varphi(X)}$, $\forall X \in L(G)$. *În plus:*

i) $\varphi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\varphi(X)\Phi(A^{-1})$, $\forall X \in L(G), A \in G$

ii) $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$, $\forall X, Y \in L(G)$*; deci φ este morfism de algebre Lie*

iii) $\varphi(X) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(e^{tX})|_{t=0}$, $\forall X \in L(G)$.

Fie K este încă un grup matricial şi $\Psi : H \to K$ este morfism de grupuri matriciale şi corespondent compunerea $\Lambda = \Psi \circ \Phi$.

Dacă φ, ψ, λ sunt morfismele asociate de algebre Lie atunci $\lambda = \psi \circ \varphi$.

Definiţia 8.2 (Aplicaţia adjunctă)

Fie $A \in G$; aplicaţia $\mathrm{Ad}_A : L(G) \to L(G)$, $\mathrm{Ad}_A(X) = AXA^{-1}$ o numim *aplicaţia adjunctă*.

Avem că Ad_A este transformare liniară inversabilă cu inversa $\mathrm{Ad}_A([X,Y]) = [\mathrm{Ad}_A(X), \mathrm{Ad}_A(Y)]$, $\forall X, Y \in L(G)$.

Seminar

S 8.1 (Matrici Pauli)

Fie $V = \{A \in M_2(\mathbb{C}); {}^t\bar{A} = A$ şi $\mathrm{tr}\, A = 0\}$. Să se arate că V este spaţiu vectorial *real* 3-dimensional.

REZOLVARE: Fie $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in V$. Deci:

$$\begin{cases} a + d = \operatorname{tr} A = 0 \\ \left.\begin{array}{l} a = \bar{a} \\ d = \bar{d} \\ c = \bar{b} \\ b = \bar{c} \end{array}\right\} \text{din } {}^t\bar{A} = A \end{cases}$$

Rezultă că $a \in \mathbb{R}$ şi din prima ecuaţie $d = -a$; deci $A = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & -a \end{pmatrix}$ şi din $b = u + iv$:

$$A = \begin{pmatrix} a & u - iv \\ u + iv & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = a\sigma_3 + u\sigma_1 + v\sigma_2$$

unde:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se numesc *matricile Pauli*. Deci V este spaţiu vectorial real 3-dimensional cu baza *canonică* $C = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. ■

S 8.2

Să se organizeze V de la exerciţiul precedent cu un produs scalar a.î. matricile Pauli să formeze o bază ortonormată.

REZOLVARE: Fie $\langle\, , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, $\langle A, B\rangle = \dfrac{1}{2} \operatorname{tr}(AB)$. Avem că $\langle\ \rangle$ este simetrică, biliniară şi $\langle A, A\rangle = \dfrac{1}{2} \operatorname{tr} A^2$. Avem:

$$\sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de unde rezultă $\langle\sigma_1, \sigma_1\rangle = \langle\sigma_2, \sigma_2\rangle = \langle\sigma_3, \sigma_3\rangle = 1$. Avem şi:

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de unde rezultă $\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle = \langle\sigma_2, \sigma_3\rangle = \langle\sigma_3, \sigma_1\rangle = 0$. Fie $A(a, u, v) = a\sigma_2 + u\sigma_1 + v\sigma_2$; avem:

$$\begin{aligned} A^2 &= (a\sigma_2 + u\sigma_1 + v\sigma_2)(a\sigma_2 + u\sigma_1 + v\sigma_2) = \\ &= a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + u^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + v^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &\quad +au\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + av\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} + ua\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} + \\ &\quad +uv\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + va\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + vu\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + u^2 + v^2 & \dots \\ \dots & a^2 + u^2 + v^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

şi deci $\dfrac{1}{2}\operatorname{tr} A^2 = \langle A, A\rangle = a^2 + u^2 + v^2$ ceea ce arată că $\langle\ \rangle$ este produs scalar. Din cele de mai sus avem că $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ constituie o bază ortonormată. ■

S 8.3 (Grupuri ortogonale generalizate)

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ şi $[\,,\,]_{n,k} : \mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$:

$$[x, y]_{n,k} = x^1y^1 + \cdots + x^ny^n - x^{n+1}y^{n+1} - \cdots - x^{n+k}y^{n+k}$$

care este o formă biliniară simetrică. Fie $O(n, k)$ mulţimea matricilor $A \in M_{n+k}(\mathbb{R})$ ce invariază $[\,,\,]_{n,k}$ i.e. $\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+k}$ avem $[Ax, Ay]_{n,k} = [x, y]_{n,k}$. Să se arate că $O(n, k)$ este grup matriciale tare numit *grup ortogonal generalizat*. $O(3, 1)$ se numeşte *grupul Lorenz* datorită aplicaţiilor la studiul spaţiului-timp.

Rezolvare: Fie:

$$I_{n,k} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

unde 1 apare de n ori iar (-1) de k ori. Avem că $I^2_{n,k} = I_{n+k}$ deci $I_{n,k}$ este inversabilă cu $I^{-1}_{n,k} = I_{n,k}$. Avem că:

$$[x, y]_{n,k} = {}^t x \cdot I_{n,k} \cdot y$$

şi pentru $A \in M_{n+k}(\mathbb{R})$ avem caracterizarea:

$$A \in O(n,k) \iff {}^tA \cdot I_{n,k} \cdot A = I_{n,k}.$$

Fie $A_1, A_2 \in O(n,k)$. Avem ${}^t(A_1A_2)I_{n,k}(A_1A_2) = {}^tA_2{}^tA_1I_{n,k}A_1A_2 \overset{A_1 \in O(n,k)}{=} {}^tA_2I_{n,k}A_2 \overset{A_2 \in O(n,k)}{=} I_{n,k}$ deci $A_1A_2 \in O(n,k)$.

Fie $A \in O(n,k)$; înmulţind la stânga caracterizarea precedentă cu $I_{n,k}$ avem $I_{n,k}{}^tAI_{n,k}A = I_{n+k}$ şi deci A este inversabilă cu $A^{-1} = I_{n,k}{}^tAI_{n,k}$. Rezultă că $O(n,k) \subset GL(n+k,\mathbb{R})$. Aplicând definiţia pentru $A \in O(n,k)$ şi elementele $A^{-1}x, A^{-1}y \in \mathbb{R}^{n+k}$ avem $[A(A^{-1}x), A(A^{-1}y)]_{n,k} = [A^{-1}x, A^{-1}y]_{n,k} = [x,y]_{n,k}$ ceea ce spune că $A^{-1} \in O(n,k)$. Deci $O(n,k)$ este subgrup în $GL(n,k,\mathbb{R})$. Rezultă imediat şi faptul că $O(n,k)$ este grup matricial tare (exact ca la $O(n)$).

Pentru $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ şi $i \in \{1,\dots,n+k\}$ notăm $A^{(i)}$ coloana i din A i.e. $A^{(i)} = \begin{pmatrix} A_i^1 \\ \vdots \\ A_i^{n+k} \end{pmatrix}$.
Avem caracterizarea $A \in O(n,k)$ dacă şi numai dacă

i) $[A^{(i)}, A^{(i)}]_{n,k} = 1$, dacă $1 \leqslant i \leqslant n$

ii) $[A^{(i)}, A^{(i)}]_{n,k} = -1$, dacă $n+1 \leqslant i \leqslant n+k$

iii) $[A^{(i)}, A^{(j)}]_{n,k} = 0$, dacă $i \neq j$.

Algebra Lie a lui $O(n,k)$ coincide cu algebra Lie a lui $SO(n,k)$ şi este $so(n,k) = \{X \in M_{n+k}(\mathbb{R}); I_{n,k} \cdot {}^tX \cdot I_{n,k} = -X\}$. $SO(n,k) = \{A \in O(n,k); \det A = +1\}$. ■

Lecţia 9

Acţiuni de grupuri matriceale

Suport de curs

Fie $G \subset GL(n, \mathcal{K})$ un grup matricial şi $M \subset \mathcal{K}^m = (\mathbb{R}^m$ dacă $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{R}^{2m}$ dacă $\mathcal{K} = \mathbb{C})$.

Definiţia 9.1

Spunem că G *acţionează* (la stânga) pe M dacă există o aplicaţie $\Phi : G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto gx$ cu proprietăţile:

$A_1)$ $ex = x$, $\forall x \in M$

$A_2)$ $g_1(g_2(x)) = (g_1 g_2)x$, $\forall x \in M$, $\forall g_1, g_2 \in G$

$A_3)$ considerând $G \subset \mathbb{R}^{n^2}$ (respectiv $\mathbb{R}^{2n^2}$ dacă $\mathcal{K} = \mathbb{C}$) şi $M \subseteq \mathbb{R}^m$ (respectiv $\mathbb{R}^{2m}$) obţinem $\Phi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$; cerem ca toate cele t componente ale lui Φ să fie câmpuri scalare, adică elemente din $C^\infty(\mathbb{R}^s)$.

Fie $g \in G$ fixat şi aplicaţia $\Phi_g : M \to M$, $x \mapsto gx$. $A_1)$ spune că $\Phi_e = 1_M$ şi $A_2)$ spune că $\Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2} = \Phi_{g_1 g_2}$. Fie $S(M)$ = mulţimea bijecţiilor pe $M = \{f : M \to M; f \text{ bijecţie}\}$. Cum compuneterea funcţiilor este asociativă, $1_M \in S(M)$ este element neutru la compunere şi dată $f \in S(M)$ $\exists f^{-1} \in S(M)$ rezultă că $(S(M), \circ)$ este grup, numit *grupul simetric* al lui M. Fie $\mathrm{Diff}(M) = \{f \in S(M); f \in \mathcal{X}(M)\}$. Avem că Diff este subgrup în $S(M)$ numit *grupul difeomorfismelor* lui M (compunerea a doua difeomorfisme este difeomorfism şi inversul unui difeomorfism este difeomorfism).

Propoziţia 9.1

Aplicaţia $g \in G \mapsto \Phi_g \in \mathrm{Diff}(M)$ *este morfism de grupuri.*

DEMONSTRAŢIE: Mai întâi să observăm că din A_3) avem că $\Phi_g \in \mathrm{Diff}(M)$. Faptul că asocierea dată este un morfism de grupuri este parafrazarea axiomelor A_1)–A_2). Avem că $\Phi_g \in S(M)$ cu $(\Phi_g)^{-1} = \Phi_{g^{-1}}$. ■

Fie $x \in M$ fixat. Mulţimea $\mathrm{Orb}(x) = \{\Phi_g(x); g \in G\} \subseteq M$ o numim *orbita lui* x la acţiunea Φ, iar mulţimea $G_x = \{g \in G; \Phi_g(x) = x\}$ se numeşte *stabilizatorul lui* x.

Propoziţia 9.2

G_x *este subgrup în* G *şi mulţime închisă în* G*; deci* G_x *este grup matricial tare.*

DEMONSTRAŢIE: *i*) Fie $g_1, g_2 \in G_x$; cum $\Phi_{g_1 g_2} = \Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2}$ şi $\Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2}(x) = \Phi_{g_1}(\Phi_{g_2}(x)) = \Phi_{g_1}(x) = x$ rezultă că $g_1 g_2 \in G_x$.

ii) Fie $g \in G_x$ oarecare. $\Phi_{g^{-1}}(x) = g^{-1}(gx) \overset{A_2}{=} (g^{-1}g)x = ex \overset{A_1}{=} x$ deci $g^{-1} \in G_x$.

■

Din acest motiv G_x mai este numit *grupul de izotropie* al lui x.

Definiţia 9.2

Acţiunea Φ se numeşte:

i) *tranzitivă* dacă există o unică orbită i.e. $\forall x, y \in M$ $\exists g \in G$ a.î. $y = gx$. Dacă acest g este unic spunem că acţiunea este *simplu tranzitivă* şi mai general dacă există doar k astfel de $g \in G$ ($\forall x, y \in M$!) spunem că acţiunea este *k-tranzitivă*. Dacă acţiunea este simplu tranzitivă spunem că M este *spaţiu omogen* al lui G.

ii) *fidelă* (sau *efectivă*) dacă $\Phi_g = 1_M$ implică $g = e$; echivalent asocierea $g \in G \mapsto \Phi_g \in \mathrm{Diff}(M)$ este injectivă.

iii) *liberă* dacă nu admite puncte fixe i.e. $\forall x \in M$ aplicaţia $g \in G \mapsto \Phi_g(x) \in M$ este injectivă; echivalent $G_x = \{e\}$ $\forall x \in M$.

Rezultă imediat că orice acţiunea liberă este fidelă. Acţiunea este liberă dacă pentru un $x \in M$ dat $\Phi_g(x) = x$ implică $g = e$.

Fie $X \in L(G)$ algebra Lie a lui G şi g_X curba integrală a lui $X \in \mathcal{X}(\mathcal{K}^n)$ (X gândit drept câmp vectorial liniar!) cu data iniţială $g_X(0) = e \in G$. O proprietate remarcabilă a acestei curbe integrale este: $g_X(t_1) \cdot g_X(t_2) = g_X(t_1 + t_2)$. Funcţia $X \in L(G) \to g_X(1) \overset{\text{not}}{=} \exp(X) \in G$ o numim *exponenţiala pe* G.

Definiţia 9.3

Pentru $X \in L(G)$ funcţia $F_X : M \to \mathbb{R}^m$ dată de:

$$F_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(g_X(t), x)\Big|_{t=0}$$

este un câmp vectorial pe M numit *generatorul infinitezimal* al lui Φ corespunzător lui X.

Propoziţia 9.3

Asocierea $X \in L(G) \to F_X \in \mathcal{X}(M)$ *este anti-morfism de algebre Lie i.e. este transformare liniară şi* $[F_X, F_Y] = -F_{[X,Y]}$.

Se arată şi faptul că $L(G_x) = \{X \in L(G); F_X(x) = 0\}$.

Definiţia 9.4

Dat $y \in \mathrm{Orb}(x)$ mulţimea $T_y\mathrm{Orb}(x) = \{F_X(y); X \in L(G)\}$ o numim *spaţiul tangent* în y la $\mathrm{Orb}(x)$.

Dacă M este un spaţiu omogen al lui G atunci toate grupurile de izotropie sunt izomorfe şi fie H grupul de izotropie comun. Definim pe G relaţia "$\sim$" astfel: $g_1, g_2 \in G$ sunt în relaţia "$\sim$" dacă $\exists h \in H$ a.î. $g_2 = hg_1$. Avem că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă pe G şi fie $G/_H$ mulţimea factor i.e. $G/_H = \{[g]; [g] = \text{clasa de echivalenţă a lui } g \in G\}$. Dacă M este spaţiu omogen al lui G atunci M este in bijecţie cu $G/_H$.

Seminar

S 9.1

Fie $A \in M_2(\mathcal{K})$. Să se arate că:

$$A^2 - \mathrm{tr}\, A \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2.$$

REZOLVARE: Fie $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Avem:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+bd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & c \cdot \operatorname{tr} A \\ b \cdot \operatorname{tr} A & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

şi deci:

$$A^2 - \operatorname{tr} A \cdot A = \begin{pmatrix} a^2+bc-a(a_d) & 0 \\ 0 & bc+d^2-d(a+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = -\det A \cdot I_2$$

ceea ce dă concluzia. ■

S 9.2

Folosind dezvoltările în serie Taylor:

$$\begin{cases} \sin x &= \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots \end{cases}$$

să se arate că dacă $A \in M_2(\mathcal{K})$ are $\operatorname{tr} A = 0$ atunci:

$$e^A = \cos(\sqrt{\det A}) \cdot I_2 + \frac{\sin(\sqrt{\det A})}{\sqrt{\det A}} \cdot A.$$

REZOLVARE: Deoarece $\operatorname{tr} A = 0$ conform exerciţiului anterior avem:

$$A^2 = -\det A \cdot I_2,\ A^3 = -\det A \cdot A,\ A^4 = (\det A)^2 I_2, A^5 = (\det A)^2 A$$

şi:

$$\begin{aligned} e^A &= I_2 + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \frac{1}{5!}A^5 + \cdots \\ &= I_2 + \frac{1}{1!}A - \frac{\det A}{2!}I_2 - \frac{\det A}{3!}A + \frac{(\det A)^2}{4!}I_2 + \frac{(\det A)^2}{5!}A + \cdots \\ &= I_2\Big(1 - \frac{\det A}{2!} + \frac{(\det A)^2}{4!} + \cdots\Big) + A\Big(1 - \frac{\det A}{3!} + \frac{(\det A)^2}{5!} + \cdots\Big) = \\ &= I_2\Big(1 - \frac{(\sqrt{\det A})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{\det A})^4}{4!} + \cdots\Big) + \\ &\quad + \frac{A}{\sqrt{\det A}}\Big(\frac{1}{1!}\sqrt{\det A} - \frac{1}{3!}(\sqrt{\det A})^3 + \frac{1}{5!}(\sqrt{\det A})^5 + \cdots\Big) = \\ &= I_2 \cdot \cos(\sqrt{\det A}) + \frac{\sin(\sqrt{\det A})}{\sqrt{\det A}}A. \end{aligned}$$

Dacă $\det A = 0$ cum $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ atunci coeficientul lui A se consideră 1 în formula precedentă.

■

S 9.3

Folosind exerciţiul anterior se cere e^X pentru $X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare: Avem:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 3I_2 + A$$

iar $\operatorname{tr} A = 0$. Deci, cum $\det A = 2$, avem:

$$\begin{aligned} e^X &= e^{3I_2+A} = e^{3I_2} \cdot e^A = e^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\cos\sqrt{2} I_2 + \frac{\sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}} A \right) = \\ &= e^3 \left\{ \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{\sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= e^3 \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2} + \frac{\sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 3\frac{\sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \cos\sqrt{2} - \frac{\sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

S 9.4

Fie $(L, [\ ])$ o algebră Lie şi $X \in L$ fixat. Aplicaţia $\mathrm{Ad}_X : L \to L$, $\mathrm{Ad}_X(Y) = [X, Y]$ o numim *aplicaţia adjunctă*. Să se arate că Ad_X este transformare liniară. Interpretare.

Rezolvare: $\mathrm{Ad}_X(\lambda Y + \mu Z) = [X, \lambda Y + \mu Z] = \lambda[X, Y] + \mu[X, Z] = \lambda \mathrm{Ad}_X(Y) + \mu \mathrm{Ad}_X(Z)$; ceea ce voiam. Interpretare: rezultă că avem aplicaţia $\mathrm{Ad} : L \to gl(L) =$ mulţimea transformărilor liniare de la L la L. $gl(L)$ este de fapt $L(L)$ unde prin $L(V)$, cu $V = \mathcal{K}$-spaţiu vectorial, am notat mulţimea transformărilor $\mathcal{K}$-liniare de la V la V. Notaţia $L(L)$ este nefericită deoarece am notat cu L algebra Lie dată; în plus $g(L)$ o gândim ca o algebră Lie relativ la operaţia $[\ ] : gl(L) \times gl(L) \to gl(L)$, $[T_1, T_2] = T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1$, $\forall T_1, T_2 \in gl(L)$. ■

S 9.5

Să se arate că aplicaţia $\mathrm{Ad} : L \to gl(L)$ este morfism de algebre Lie i.e.:

$$\mathrm{Ad}_{[X,Y]} = [\mathrm{Ad}_X, \mathrm{Ad}_Y].$$

Rezolvare: Fie $Z \in L$ oarecare:

$$\begin{aligned} (\mathrm{Ad}_{[X,Y]} - [\mathrm{Ad}_X, \mathrm{Ad}_Y])(Z) &= [[X, Y], Z] - \mathrm{Ad}_X([Y, Z]) + \mathrm{Ad}_Y([X, Z]) \overset{Jacobi}{=} \\ &= -[[Y, Z], X] - [[Z, X], Y] - [X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]] = 0 \end{aligned}$$

din antisimetrie. ■

S 9.6

Fie G un grup matricial şi $g \in G$. Definim *translaţia la stânga* $L_g : G \to G$, $L_g(a) = ga$ respectiv *translaţia la dreapta* $R_g : G \to G$ $R_g(a) = ga$. Compunerea $I_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$ o numim *automorfism interior* al lui G. Să se arate că L_g, R_g sunt acţiuni tranzitive, chiar simplu tranzitive. Se cere expresia lui I_g.

REZOLVARE: $L_g(a) = b$ are soluţia $g = ba^{-1}$ şi $R_g(a) = b$ are soluţia $g = a^{-1}b$. Aceste soluţii sunt unice. $I_g(a) = L_g(ag^{-1}) = g \circ a \circ g^{-1}$. ■

Lecţia 10

Sisteme Hamiltoniene cu simetrie

Suport de curs

Fie $(M, \{\ \})$ o varietate Poisson pe care acţionează grupul matricial G prin intermediul acţiunii Φ. Reamintim că $\forall \xi \in L(G)$ = algebra Lie a lui G i se asociază *generatorul infinitezimal* $F_\xi \in \mathcal{X}(M)$ prin formula:

$$F_\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(e^{t\xi}, x)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\Phi(e^{t\xi}, x) - x),$$

căci $\Phi(e^{0\cdot\xi}, x) = \Phi(e^{O_n}, x) = \Phi(I_n, x) = x$.

Definiţia 10.1

Spunem că acţiunea dată este *Hamiltoniană* dacă $\exists J : L(G) \to C^\infty(M)$ transformare liniară (între cele două algebre Lie $L(G)$ şi $C^\infty(M)$) a.î. $\forall \xi \in L(G)$ avem F_ξ = câmpul Hamiltonian $X_{J(\xi)}$ asociat Hamiltonianului $J(\xi) \in C^\infty(M)$.

Deci orice generator infinitezimal este câmp Hamiltonian. Acţiunii Hamiltoniene Φ i se asociază aplicaţia $\widehat{J} : M \to L(G)^*$ = duala algebrei Lie $L(G)$, dată de $\widehat{J}(x)(\xi) \overset{\text{def}}{=} J(\xi)(x)$ $(\in \mathbb{R})$. $\widehat{J}$ o numim *aplicaţia moment* a acţiunii Hamiltoniene Φ. Trebuie observat că nu orice acţiune a unui grup matricial pe o varietate Poisson dată este Hamiltoniană!

Asociem 4-uplului $(M, \{\ \}, G, \Phi)$ un Hamiltonian fixat $H \in C^\infty(M)$.

Definiţia 10.2

5-uplul $(M, \{\ \}, G, \Phi, H)$ îl numim *sistem Hamiltonian cu simetrie* dacă acţiunea Φ este Hamiltoniană şi în plus Hamiltonianul H este invariat de acţiunea Φ i.e. $\forall A \in G$ avem $H \circ \Phi_A = H$.

Rezultatul central al teoriei sistemelor Hamiltoniene cu simetrie este faptul că aplicaţia moment induce integrale prime pentru câmpul Hamiltonian asociat lui H adică pentru evoluţia sistemului dinamic avut în vedere.

Teorema 10.1 (Noether)

Pentru un sistem Hamiltonian cu simetrie $\forall \xi \in L(G)$ dă integrala primă $J(\xi)$.

DEMONSTRAŢIE: Trebuie arătat că $\{H, J(\xi)\} = 0$. Să folosim mai întâi invarianţa Hamiltonianului H. Fie $x \in M$ fixat şi relaţia $H \circ \Phi(e^{t\xi}, x) = H(x) = H \circ \Phi(e^{0\cdot\xi}, x)$. Deci $\frac{1}{t}(H \circ \Phi(e^{t\xi}, x) - H \circ \Phi(e^{0\cdot\xi}, x)) = 0$ i.e.

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(H \circ \Phi(e^{t\xi}, x) - H \circ \Phi(e^{0\cdot\xi}, x)) = 0$$

dar membrul stâng este $F_\xi(H)(x) = 0$. Cum $x \in M$ era oarecare rezultă că $F_\xi(H) = 0$; dar $F_\xi(H) = X_{J(\xi)}(H) = \{J(\xi), H\}$ ceea ce voiam. ∎

Exemplul 8 (Momentul liniar total)

Considerăm N particule în spaţiul fizic $\mathbb{R}^3$. Avem că $M = \mathbb{R}^{6N} = \{(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{q}^1, \ldots, \bar{q}^N, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_N) : \bar{q}^i, \bar{p}_i \in \mathbb{R}^3, 1 \leqslant i \leqslant N\}$, unde $\bar{q}^i$ este vectorul coordonatelor particulei i, $\bar{p}_i$ este vectorul impuls al particulei i. Pe M avem paranteza Poisson simplectică:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\left\langle \frac{\partial F}{\partial \bar{q}^i}, \frac{\partial G}{\partial \bar{p}_i} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \bar{p}_i}, \frac{\partial G}{\partial \bar{q}^i} \right\rangle \right).$$

$G = (\mathbb{R}^3, +)$ acţionează pe M prin $\Phi(x)(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{q}^1 + x, \ldots, \bar{q}^n + x, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)$ i.e. Φ translează fiecare particulă cu vectorul $x \in \mathbb{R}^3$. Fie $\xi \in L(G) \simeq \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} F_\xi(\bar{q}, \bar{p}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(e^{t\xi}, (\bar{q}, \bar{p}))\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{q}^1 + e^{t\xi}, \ldots, \bar{q}^n + e^{t\xi}, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)\Big|_{t=0} = \\ &= (\xi \cdot e^{t\xi}, \ldots, \xi \cdot e^{t\xi}, 0, \ldots, 0)|_{t=0} = (\xi, \ldots, \xi, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Să căutăm dacă acţiunea este Hamiltoniană. Vrem $X_{J(\xi)} = \left(\frac{\partial J(\xi)}{\partial \bar{p}_1}, \ldots, \frac{\partial J(\xi)}{\partial \bar{p}_n}, -\frac{\partial J(\xi)}{\partial \bar{q}^1}, \ldots, -\frac{\partial J(\xi)}{\partial \bar{q}^n} \right) = F_\xi$ deci avem sistemul:

$$\frac{\partial J(\xi)}{\partial \bar{p}_i} = \xi, \quad \frac{\partial J(\xi)}{\partial \bar{q}^i} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Se observă că avem soluţia: $J(\xi)(\bar{q}, \bar{p}) = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \bar{p}_i, \xi \right\rangle$ şi deci $\widehat{J}(\bar{q}, \bar{p}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i$ care este momentul liniar total.

Concluzie: Dacă un sistem fizic este invariant la translaţii atunci momentul liniar total al acestui sistem se conservă! (Avem şi: dacă un sistem este invariant la translaţii după o direcţie dată atunci proiecţia momentului total al sistemului pe direcţia de translaţie se conservă. Analog, conservarea energiei totale a unui sistem este consecinţa invarianţei la translaţii temporale!)

Exemplul 9 (Momentul unghiular total)

Considerăm exemplul anterior cu $N = 1$; deci $M = \mathbb{R}^6 = \{(\bar{q}, \bar{p}) = (q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3)\}$. $G = SO(3)$ acţionează pe M prin $\Phi(A, (\bar{q}, \bar{p})) = (A \cdot \bar{q}, A \cdot \bar{p})$. Fie $\xi \in L(SO(3)) = so(3)$:

$$F_\xi(\bar{q}, \bar{p}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(e^{t\xi}, (\bar{q}, \bar{p})) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{t\xi} \cdot \bar{q}, e^{t\xi} \cdot \bar{p})\Big|_{t=0} = (\xi \cdot \bar{q}, \xi \cdot \bar{p}).$$

Fie $\xi = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$. Avem:

$$\xi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \widehat{\xi} \times X$$

unde $\widehat{\xi} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ şi $X = (x, y, z)$. Deci $F_\xi(\bar{q}, \bar{p}) = (\widehat{\xi} \times \bar{q}, \widehat{\xi} \times \bar{p})$; căutăm $X_{J(\xi)}$ ca la exemplul anterior soluţie a sistemului:

$$\frac{\partial J(\xi)}{\partial \bar{p}} = \widehat{\xi} \times \bar{q}, \qquad \frac{\partial J(\xi)}{\partial \bar{q}} = -\widehat{\xi} \times \bar{p}.$$

Fie $J(\xi) = \langle \widehat{\xi} \times \bar{q}, \bar{p} \rangle$ ce verifică prima ecuaţie. Cum avem şi expresia $J(\xi) = \langle \bar{q} \times \bar{p}, \widehat{\xi} \rangle = \langle \bar{p} \times \widehat{\xi}, \bar{q} \rangle = -\langle \widehat{\xi} \times \bar{p}, \bar{q} \rangle$ rezultă că $J(\xi)$ este soluţia cerută. În concluzie $\widehat{J}(\bar{q}, \bar{p}) = \bar{q} \times \bar{p}$ care este momentul unghiular al unei singure particule.

Seminar

S 10.1 ($\mathbb{R}^n$ ca grup matricial)

Fie aplicaţia $\exp : \mathbb{R}^n \to GL(n, \mathbb{R})$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \mapsto \exp(x) = \begin{pmatrix} e^{x^1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{x^n} \end{pmatrix}$. Se verifică imediat că $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$; deci exp este morfism de grupuri de la $(\mathbb{R}^n, +)$ la $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$. Avem că mulţimea $\mathrm{Diag}^+(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} a^1 & & \\ & \ddots & \\ & & a^n \end{pmatrix}, a^1, \ldots, a^n >$

$0\}$ este subgrup în $GL(n,\mathbb{R})$ şi $\operatorname{Im}\exp = \operatorname{Diag}^+(n)$. Prin urmare grupul $(\mathbb{R}^n,+)$ este izomorf cu grupul $(\operatorname{Diag}^+(n),\cdot)$, ceea ce arată că $\mathbb{R}^n$ este grup matricial. Fie $(A_k)_k \in \operatorname{Diag}^+(n)$ cu $A_k \mapsto A$; cum $A_k = \begin{pmatrix} a_k^1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_k^n \end{pmatrix}$ rezultă că A este matrice diagonală, $A = \begin{pmatrix} a^1 & & \\ & \ddots & \\ & & a^n \end{pmatrix}$. Dacă toţi $(a^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sunt strict pozitivi atunci $A \in \operatorname{Diag}^+(n)$, iar dacă există a^i nul atunci $A \notin GL(n,\mathbb{R})$. În concluzie $\operatorname{Diag}^+(n)$ şi deci $(\mathbb{R}^n,+)$ este grup matricial slab!

S 10.2 (Grupul Poincaré)

Fie $\operatorname{Izom}(n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; f(x) = Ax + a, A \in O(n), a \in \mathbb{R}^n\}$. Deci un element $f \in \operatorname{Izom}(n)$ îl identificăm cu perechea $(A,a) \in O(n)\times\mathbb{R}^n$. Fie $f_1 = (A_1,a_1), f_2 = (A_2,a_2) \in \operatorname{Izom}(n)$ şi $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f_2 \circ f_1(x) = f_2(A_1x + a_1) = A_2(A_1x + a_1) + a_2 = A_2A_1x + (A_2a_1 + a_2).$$

Deci pe $O(n)\times\mathbb{R}^n$ avem legea:

$$(A_2,a_2)\cdot(A_1,a_1) = (A_2A_1, A_2a_1 + a_2)$$

în raport cu care $O(n)\times\mathbb{R}^n$ devine grup în care avem legea inversului:

$$(A,a)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}a)$$

deoarece $(I_n,\bar{0})$ este element neutru. Fie aplicaţia $\Phi : \operatorname{Izom}(n) = O(n)\times\mathbb{R}^n \to GL(n+1,\mathbb{R})$:

$$\Phi(A,a) = \begin{pmatrix} & & & a^1 \\ & A & & \vdots \\ & & & a^n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Φ este injectivă şi un calcul imediat dă faptul că Φ este chiar morfism de grupuri:

$$\begin{aligned} \Phi((A_2,a_2)\cdot(A_1,a_1)) &= \Phi(A_2A_1, A_2a_1 + a_2) = \begin{pmatrix} & A_2A_1 & & A_2a_1 + a_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Phi(A_2,a_2)\cdot\Phi(A_1,a_1) &= \begin{pmatrix} & A_2 & & a_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} & A_1 & & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} & A_2A_1 & & A_2a_1 + a_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

În concluzie Izom(n) este grup izomorf cu grupul $\{\begin{pmatrix} & & & a^1 \\ & A & & \vdots \\ & & & a^n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1,\mathbb{R}); A \in O(n), a = (a^1,\dots,a^n)\}$ deci Izom(n) este grup matricial. Cum $O(n)$ este grup matricial tare şi limita unui şir de matrici de forma $\begin{pmatrix} & & & a^1 \\ & A & & \vdots \\ & & & a^n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este o matrice de acelaşi tip rezultă că Izom(n) este grup matricial tare notat uneori şi $E(n)$ de la Euclidian. Analog avem grupul $P(n,1) = O(n,1) \times \mathbb{R}^n = \{f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}; f(x) = Ax + a, A \in O(n,1), a \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ care este grup matricial tare. $P(n,1)$ se numeşte grupul Poincaré. $f \in$ Izom(n) invariază distanţa Euclidiană:

$$d(x,y) = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + \dots + (y^n - x^n)^2}$$

iar $f \in P(n,1)$ invariază distanţa Lorentz din $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$d_L = \sqrt{(y^0 - x^0)^2 + (y^1 - x^1)^2 + \dots + (y^n - x^n)^2} \in \mathbb{C}$$

Algebra Lie a lui Izom(n) este:

$$L(\mathrm{Izom}(n)) = \{\begin{pmatrix} & & & x^1 \\ & X & & \vdots \\ & & & x^n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R}); X \in o(n), x \in \mathbb{R}^n\}$$

iar algebra Lie a lui $P(n,1)$ este:

$$L(P(n,1)) = \{\begin{pmatrix} & & & x^1 \\ & X & & \vdots \\ & & & x^{n+1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+2}(\mathbb{R}); X \in so(n,1), x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$

S 10.3 (Descompunerea polară pentru $SL(n,\mathbb{R})$)

Fie $P \in M_n(\mathbb{R})$ simetrică i.e. ${}^tP = P$. Spunem că P este matrice *pozitivă* dacă $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ avem $\langle x, Px\rangle > 0$. Dacă P este pozitivă atunci toate valorile proprii ale lui P sunt strict pozitive.

Să se arate că P este diagonalizabilă cu $P = RDR^{-1}$ unde:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

sunt valorile proprii pozitive ale lui P, iar $R \in O(n)$.

Rezolvare: Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ valoare proprie pentru P şi $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ vector propriu corespunzător lui λ. Atunci $\langle x, Px \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \parallel x \parallel^2 > 0$ şi deci $\lambda > 0$. Fie $v_1, \ldots, v_n$ o bază ortonormată de vectori proprii pentru P. P este diagonalizabilă fiind simetrică şi luăm $R =$ matricea având coloanele $(v_1, \ldots, v_n)$. ■

S 10.4 (continuare)

Pentru $P \in M_n(\mathbb{R})$ simetrică şi pozitivă fie $P^{1/2} = RD^{1/2}R^{-1}$ conform celor anterioare unde $D^{1/2} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{1/2} \end{pmatrix}$. Atunci $P^{1/2}$ este *unica* matrice simetrică şi pozitivă a.î. $P^{1/2} \cdot P^{1/2} = P$.

Rezolvare: [(continuare)] Fie $A \in SL(n, \mathbb{R})$; există o unică pereche (P, R) cu $P \in SL(n, \mathbb{R})$ simetrică şi pozitivă şi $R \in SO(n)$ a.î. $A = RP$. ■

Lecţia 11

Morfisme de grupuri matriciale şi algebre Lie

Suport de curs

Definiţia 11.1

i) Fie G, H grupuri matriciale şi $\Phi : G \to H$. Spunem că Φ este *morfism* de grupuri matriciale dacă este morfism de grupuri şi aplicaţie continuă (i.e. dacă $(A_k)_k \in G$ verifică $A_k \to A$ atunci $\Phi(A_k) \in H$ verifică $\Phi(A_k) \to \Phi(A)$). Dacă în plus Φ este bijecţie şi Φ^{-1} este aplicaţie continuă atunci spunem că Φ este *izomorfism* de grupuri matriciale.

ii) Fie L_1, L_2 algebre Lie şi $\phi : L_1 \to L_2$. Spunem că ϕ este *morfism* de algebre Lie dacă este transformare liniară şi $\forall X, Y \in L_1$ avem $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$. Dacă în plus ϕ este bijecţie spunem că ϕ este *izomorfism* de algebre Lie.

iii) Fie $G \subset GL(n, \mathcal{K})$ un grup matricial. Numim *reprezentare complexă m-dimensională* ($m \in \mathbb{N}$) pentru G o pereche (V, Φ) cu V spaţiul vectorial complex m-dimensional şi $\Phi : G \to GL(V)$ morfism de grupuri matriciale unde $GL(V) = \{T \in L(V); T = \text{inversabilă}\}$ este grupul automorfismelor liniare ale lui V (în fapt, fixând o bază pe V, este $GL(m, \mathbb{C})$). Dacă V este spaţiu vectorial real spunem că avem o *reprezentare reală*.

iv) Fie L o algebră Lie. Numim *reprezentare complexă m-dimensională* o pereche (V, φ) cu V ca la *ii)* şi $\varphi : L \to gl(V)$ morfism de algebre Lie (unde, până la o bază a lui V, $gl(V) = M_m(\mathbb{C})$). Dacă V este spaţiu vectorial real spunem că avem o *reprezentare reală*.

v) Dacă Φ sau φ de la *iii)* sau *iv)* este injectivă spunem că avem o *reprezentare fidelă*.

Putem gândi o reprezentare ca o acţiune *liniară* a lui G (sau L) pe V i.e. avem:

iii) $G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto \Phi(g)(v) \in V$ cu $\Phi(g) : V \to V$ transformare liniară inversabilă

iv) $L \times V \to V$, $(X, v) \mapsto \varphi(X)(v) \in V$ cu $\varphi(X) : V \to V$ transformare liniară.

Rezultatul central al acestei teorii este dat de:

Teorema 11.1

Fie grupul matricial G şi (V, Π) o reprezentare a acestuia (reală sau complexă). Atunci există o unică reprezentare π a lui $L(G)$ pe V cu proprietatea $\Pi(e^X) = e^{\pi(X)}$ pentru $\forall X \in L(G)$. Mai mult, $\forall A \in G$ şi $\forall X \in L(G)$:

$$\pi(AXA^{-1}) = \Pi(A)\pi(X)\Pi(A)^{-1}.$$

Demonstraţie: Definim:

$$\pi(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Pi(e^{tX})\Big|_{t=0}$$

şi se arată proprietăţile cerute folosind faptul că $L(GL(V)) = gl(V)$. ■

Exemple de reprezentări

I Fie $G \subset GL(n, \mathbb{C})$. Atunci: $\Pi : G \to GL(n, \mathbb{C})$, $\Pi(A) = A$ este reprezentarea numită *reprezentarea standard* a lui G. Dacă $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ reprezentarea standard este reală. Algebra Lie $L(G)$ este inclusă în $gl(n, \mathbb{C})$ respectiv $gl(n, \mathbb{R})$ şi incluziunea lui $L(G)$ în $gl(n, \mathcal{K})$ este o reprezentare a lui $L(G)$ numită *reprezentarea standard*.

II Fie $G \subset GL(n, \mathcal{K})$. Atunci $\Pi : G \to GL(1, \mathbb{C})$, $\Pi(A) = 1$ $\forall A \in G$ este o reprezentare numită *banală*. Analog dacă L este o algebră Lie atunci $\pi : L \to gl(1, \mathbb{C})$, $\pi(X) = 0$ $\forall X \in L$ este o reprezentare numită *banală*.

III Pentru G grup matricial avem aplicaţia $\mathrm{Ad} : G \to GL(L(G))$, $A \in G \mapsto \mathrm{Ad}_A$, $\mathrm{Ad}_A : L(G) \to L(G)$, $\mathrm{Ad}_A(X) = AXA^{-1}$. Ad este morfism de grupuri matriciale şi deci perechea $(L(G), \mathrm{Ad})$ este o reprezentare n-dimensională pentru G numită *reprezentarea adjunctă* a lui G.

Analog, dacă L este o algebră Lie, aplicaţia $\mathrm{ad} : L \to gl(L)$, $X \in L \mapsto \mathrm{ad}_X$, $\mathrm{ad}_X : L \to L$, $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$ este un morfism de algebre Lie şi deci o reprezentare a lui L numită *reprezentarea adjunctă* a lui L.

Propoziţia 11.1

Pentru grupul matricial G fie $GL(L(G))$ grupul matricial al transformărilor liniare inversabile pe $L(G)$ algebra Lie a lui G. Aplicaţia $\mathrm{Ad}_A \in GL(L(G))$ pentru orice $A \in G$ şi $(\mathrm{Ad}_A)^{-1} \equiv \mathrm{Ad}_{A^{-1}}$. Mai mult, aplicaţia $A \in G \mapsto \mathrm{Ad}_A \in GL(L(G))$ este morfism de grupuri matriciale şi $\forall X, Y \in L(G)$ avem:

$$\mathrm{Ad}_A([X,Y]) = [\mathrm{Ad}_A(X), \mathrm{Ad}_A(Y)].$$

Definiţia 11.2

Fie (V, Π) o reprezentare a grupului matricial G (sau algebrei Lie L) şi W un subspaţiu vectorial al lui V. Spunem că W este *invariant* dacă $\forall A \in G$ şi $w \in W$ avem $\Pi(A)(w) \in W$. Subspaţiul invariant W îl numim *netrivial* (sau *nebanal*) dacă $W \notin \{V, \{0\}\}$. O reprezentare ce nu admite subspaţii invariante netriviale se numeşte *reprezentare ireductibilă*.

Reprezentarea banală este ireductibilă deoarece $\mathbb{C}$ nu are subspaţii netriviale.

Seminar

S 11.1 (Reprezentări pentru $SU(2)$)

Fie $m \in \mathbb{N}^*$ şi V_m mulţimea polinoamelor în două variabile complexe, polinoame omogene de grad total m i.e.

$$V_m = \left\{ f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{m} a_k z_1^{m-k} z_2^k ; a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{C} \right\}.$$

Avem că V_m este spaţiu vectorial complex cu baza $\{z_1^{m-k} z_2^k\}_{0 \leqslant k \leqslant m}$; deci $\dim_{\mathbb{C}} V_m = m + 1$. Fie $\Pi_m : SU(2) \to L(V_m)$, $U \in SU(2) \mapsto \Pi_m(U) \in L(V_m)$ cu $[\Pi_m(U)f](z_1, z_2) = f(U^{-1} \cdot (z_1, z_2))$. Notând:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} U_{11}^{-1} & U_{12}^{-1} \\ U_{21}^{-1} & U_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

avem că:

$$[\Pi_m(U)f](z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{m} a_k (U_{11}^{-1} z_1 + U_{12}^{-1} z_2)^{m-k} \cdot (U_{21}^{-1} z_1 + U_{22}^{-1} z_2)^k$$

şi dezvoltând, cu binomul lui Newton, obţinem că $\Pi_m(U)f \in V_m$. Avem şi:

$$\begin{aligned} \Pi_m(U_1)[\Pi_m(U_2)f](z_1, z_2) &= [\Pi_m(U_2)f](U_1^{-1}(z_1, z_2)) = f(U_2^{-1} U_1^{-1}(z_1, z_2)) = \\ &= f((U_1 U_2)^{-1}(z_1, z_2)) = [\Pi_m(U_1 U_2)f](z_1, z_2) \end{aligned}$$

deci Π_m este morfism de grupuri matriciale. Avem imediat şi faptul că Π_m este aplicaţie continuă; deci (V_m, Π_m) este reprezentarea complexă $(m+1)$-dimensională pentru $SU(2)$.

S 11.2 (Reprezentări pentru $su(2)$)

Din exerciţiul anterior şi teoria de la curs avem $\pi_m : su(2) \to gl(V_m)$:

$$\pi_m(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Pi_m(e^{tX})\Big|_{t=0}.$$

Deci:

$$(\pi_m(X)f)(z_1, z_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(e^{-tX}(z_1, z_2))\Big|_{t=0}.$$

Fie $z : I \to \mathbb{C}^2$, $z(t) = (z_1(t), z_2(t)) = e^{-tX}(z_1, z_2)$; deci $z(0) = (z_1, z_2)$. Din regula Leibniz de derivare a produsului:

$$(\pi_m(X)f)(z_1, z_2) = \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}.$$

Cum

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} &= -Xe^{0\cdot X}\cdot(z_1, z_2) = -X\cdot(z_1, z_2) = -\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2\end{pmatrix} = \\ &- (X_{11}z_1 + X_{12}z_2, X_{21}z_1 + X_{22}z_2)\end{aligned}$$

rezultă:

$$(\pi_m(X)f)(z_1, z_2) = -\frac{\partial f}{\partial z_1}(z_1, z_2)(X_{11}z_1 + X_{12}z_2) - \frac{\partial f}{\partial z_2}(z_1, z_2)(X_{21}z_1 + X_{22}z_2).$$

Exemplu:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} \in sl(2, \mathbb{C}) \simeq su(2).$$

Din $(*)$ avem:

$$(\pi_m(H)f)(z_1, z_2) = -\frac{\partial f}{\partial z_1}z_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2}z_2 \Rightarrow \pi_m(U) = -z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

Astfel aplicând $\pi_m(H)$ elementului $z_1^{m-k}z_2^k$ din baza lui V_m avem:

$$\pi_m(H)z_1^{m-k}z_2^k = -(m-k)z_1^{m-k}z_2^k + kz_1^{m-k}z_2^k = (2k-m)z_1^{m-k}z_2^k$$

ceea ce arată că $z_1^{m-k}z_2^k$ este vector propriu pentru $\pi_m(H)$ cu valoarea proprie $(2k-m)$. Obţinem că $\pi_m(H)$ are valorile proprii reale şi distincte $\{-m, 2-m, \ldots, 2(m-1)-m = m-2, +m\}$ deci $\pi_m(H)$ este diagonalizabilă.

Exemplu:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \in sl(2, \mathbb{C}), \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \in sl(2, \mathbb{C}).$$

Avem:

$$\pi_m(X) = -z_2\frac{\partial}{\partial z_1},\ \pi_m(Y) = -z_1\frac{\partial}{\partial z_2} \Rightarrow \pi_m(X) = (z_1^{m-k}z_2^k)$$

S 11.3 (Reprezentări pentru $sl(2,\mathbb{C})$)

În $sl(2,\mathbb{C})$ avem baza:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se arate relaţiile de comutare:

$$\begin{cases} [H,X] &= 2X \\ [H,Y] &= -2Y \\ [X,Y] &= H \end{cases}$$

Rezultă că dacă V este un spaţiu vectorial complex şi $A, B, C \in L(V)$ satisfac:

$$\begin{cases} [A,B] &= 2B \\ [A,C] &= -2C \\ [B,C] &= A \end{cases}$$

atunci aplicaţia $\pi : sl(2,\mathbb{C}) \to gl(V)$: $\pi(H) = A$, $\pi(X) = B$, $\pi(Y) = C$ extinsă prin linearitate va fi o reprezentare a lui $sl(2,\mathbb{C})$.

Lecţia 12

Spaţii vectoriale simplectice

Suport de curs

Fie V spaţiu vectorial real n-dimensional cu dualul V^* şi $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ transformare biliniară antisimetrică:

i) $\Omega(u, v) = -\Omega(v, u)$

ii) $\Omega(\lambda u + \mu v, w) = \lambda\Omega(u, w) + \mu\Omega(v, w)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall u, v, w \in V$.

Se observă că din 1) şi 2) rezultă şi liniaritatea în al doilea argument pentru Ω. Deasemenea rezultă că $\Omega(u, u) = 0$, $\forall u \in V$.

Fie $\Omega^b : V \to V^*$, $u \in V \mapsto \Omega^b(u)$ cu $\Omega^b(u)(v) = \Omega(u, v)$, $\forall u, v \in V$.

Propoziţia 12.1
$\Omega^b(u) \in V^*$, $\forall u \in V$.

Demonstraţie: $\Omega^b(u)(\lambda v + \mu w) = \Omega(u, \lambda v + \mu w) = \lambda\Omega(u, v) + \mu\Omega(u, w) = \lambda\Omega^b(u)(v) + \mu\Omega^b(u)(w)$. ■

Propoziţia 12.2
Ω^b este transformare liniară între spaţiile vectoriale reale V, V^*.

Demonstraţie: Trebuie arătat că $\Omega^b(\lambda u + \mu v) = \lambda\Omega^b(u) + \mu\Omega^b(v)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$. Fie

$w \in V$ oarecare. Avem:

$$\begin{cases} \Omega^b(\lambda u + \mu v)(w) = \Omega(\lambda u + \mu v, w) = \lambda\Omega(u, w) + \mu\Omega(v, w) \\ (\lambda\Omega^b(u) + \mu\Omega^b(v))(w) = \lambda\Omega^b(u)(w) + \mu\Omega^b(v, w) = \lambda\Omega(u, w) + \mu\Omega(v, w) \end{cases}$$

■

Definiţia 12.1

Transformarea biliniară antisimetrică Ω o numim *formă* (sau *structură*) *simplectică* dacă Ω^b este izomorfism de spaţii vectoriale. În acest caz perechea (V, Ω) o numim *spaţiu vectorial simplectic.*

Cum Ω^b este deja transformare liniară cerem deci ca Ω^b să fie bijecţie. Conform unui rezultat de algebră liniară o transformare liniară între spaţii vectoriale de aceeaşi dimensiune este surjectivă dacă şi numai dacă este injectivă. Cum $\dim V = \dim V^* = n$ rezultă că este suficientă injectivitatea lui Ω^b i.e. $\Omega^b(u_1) = \Omega^b(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$. Echivalent $\Omega^b(u_1) - \Omega^b(u_2) = 0_{V^*} \Rightarrow u_1 - u_2 = 0_V$ sau încă $\Omega^b(u_1 - u_2) = 0_{V^*} \Rightarrow u_1 - u_2 = 0_V$ deoarece Ω^b este transformare liniară. Prin urmare cerem ca $\Omega^b(u) = 0_{V^*} \Rightarrow u = 0_V$ adică $\Omega(u, v) = 0\ \forall v \in V$ să implice $u = 0$, condiţie ce se mai numeşte *nedegenerarea* lui Ω.

Fie $B = \{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o bază fixată în V şi $B^* = \{e^k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ baza duală din V^* i.e. $e^k(e_i) = \delta_i^k$. $\Omega^b(e_i) \in V^*$; deci $\Omega^b(e_i)$ admite o descompunere unică în raport cu B^*: $\Omega^b(e_i) = \Omega_{ik}e^k$. Dacă aplicăm această egalitate de transformări liniare pe vectorul $e_j \in V$ avem $\Omega^b(e_i)(e_j) = \Omega(e_i, e_j) = (\Omega_{ik}e^k)(e_j) = \Omega_{ik}\delta_j^k = \Omega_{ij}$. Deci $\Omega_{ij} = \Omega(e_i, e_j)$ şi identificăm Ω cu matricea $A = (\Omega_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Din antisimetria lui Ω i.e. $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ rezultă că ${}^tA = -A$ i.e. A este matrice antisimetrică, $A \in o(n)$. Să aplicăm funcţia determinant egalităţii precedente: $\det {}^tA = \det(-A)$. Cum $\det {}^tA = \det A$ şi $\det(-A) = (-1)^n \det A$ rezultă că $(-1)^n = 1$ adică n este număr par! Prin urmare, structurile simplectice pot fi definite doar pe spaţii vectoriale de dimensiune pară; altfel spus, paritatea dimensiunii este o condiţie necesară pentru existenţa unei structuri simplectice!

Exemplul fundamental de structură simplectică

Fie $\Omega_{can} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, $\Omega_{can} = {}^tX \cdot J_k \cdot Y$ cu:

$$J_k = \begin{pmatrix} O_k & I_k \\ -I_k & O_k \end{pmatrix}$$

Deci pentru $X = (x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^{2k})$, $Y = (y^1, \dots, y^k, y^{k+1}, \dots, y^{2k})$ avem:

$$\begin{aligned}\Omega_{con}(X,Y) &= (-x^{k+1}, \dots, -x^{2k}, x^1, \dots, x^k) \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{2k} \end{pmatrix} = \\ &= x^1 y^{k+1} + \dots + x^k y^{2k} - x^{k+1} y^1 - \dots - x^{2k} y^k.\end{aligned}$$

Ω_{can} este structură simplectică numită *canonică*.

Această formă simplectică este utilă în scrierea ecuaţiilor Hamilton de mişcare. Fie $(q,p) = (q^1, \dots, q^k, p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{R}^{2k}$ şi $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2k})$ funcţia Hamilton. Reamintim ecuaţiile Hamilton: $\dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial q^i}$, $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Acestea se pot scrie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q,p) = J_k \cdot \nabla H = \begin{pmatrix} O_k & I_k \\ -I_k & O_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$. Prin urmare $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q,p) = \Omega_{can}(\nabla H)$ şi deci $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q,p) = \Omega(\nabla H, \nabla H) = 0$ ceea ce este conservarea lui H: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q,p)(\nabla H) = \dot{q}^i \dfrac{\partial H}{\partial q^i} + \dot{p}_i \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(H(q,p))$. Deci $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q,p) \in (\mathbb{R}^{2k})^*$ este interpretarea corectă!

Mai precis, $t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q(t), p(t))$ este o curbă în $(\mathbb{R}^{2k})^*$ sau încă $(q,p) \in (\mathbb{R}^{2k})^*$. Pentru $q \in \mathbb{R}^k$ fixat mulţimea $T_q^*\mathbb{R}^k = \{(q,p) \in (\mathbb{R}^{2k})^*; p \in \mathbb{R}^k\}$ o numim *spaţiul cotangent* în q la $\mathbb{R}^k$. Din modul de construcţie $T_q^*\mathbb{R}^k$ este spaţiu vectorial real izomorf cu $\mathbb{R}^k$; deci $\dim T_q^*\mathbb{R}^k = k$. Mulţimea $T^*\mathbb{R}^k = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{R}^k} T_q^*\mathbb{R}^k$ o numim *fibratul cotangent al lui* $\mathbb{R}^k$. $T^*\mathbb{R}^k = \{(q,p) \in (\mathbb{R}^{2k})^*; q \in \mathbb{R}^k, p \in \mathbb{R}^k\} = (\mathbb{R}^{2k})^*$; deci $T^*\mathbb{R}^k$ este spaţiu vectorial real izomorf cu $\mathbb{R}^{2k}$. Prin urmare $\dim T^*\mathbb{R}^k = 2k$.

Seminar

S 12.1 (1-forme diferenţiale)

Fie $\mathcal{X}(\mathbb{R}^{2k})$ mulţimea câmpurilor vectoriale pe $\mathbb{R}^{2k}$, care este spaţiu vectorial $2k$-dimensional cu baza $\left(\dfrac{\partial}{\partial q^i}, \dfrac{\partial}{\partial p_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant k}$. Dualul acestui spaţiu vectorial îl notăm $\Lambda^1(\mathbb{R}^{2k})$ şi un element din acest dual îl numim 1-*formă* (*diferenţială*). În $\Lambda^1(\mathbb{R}^{2k})$ avem baza duală celei precedente $\mathrm{d}q^i, \mathrm{d}p_i$; deci

$$\begin{cases} \mathrm{d}q^i\left(\dfrac{\partial}{\partial q^j}\right) = \delta^i_j, \ \mathrm{d}q^i\left(\dfrac{\partial}{\partial p_j}\right) = 0 \\ \mathrm{d}p_i\left(\dfrac{\partial}{\partial q^j}\right) = 0, \ \mathrm{d}p_i\left(\dfrac{\partial}{\partial p_j}\right) = \delta^i_j \end{cases}$$

Fie $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2k})$. Dual câmpului gradient $\nabla H = \left(\dfrac{\partial H}{\partial q^i}, \dfrac{\partial H}{\partial p_i}\right)$ avem $\mathrm{d}H \in \Lambda^1(\mathbb{R}^{2k})$ dată de $\mathrm{d}H = \dfrac{\partial H}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i + \dfrac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i$ numită *diferenţiala lui* H. Să se scrie ecuaţiile Hamilton în termeni de $\mathrm{d}H$.

Rezolvare: Avem $\Omega^b_{can}(q,p) = \mathrm{d}H(q,p)$. Această relaţie ne conduce la următoarea definiţie:

Câmpul vectorial $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^{2k})$ îl numim Hamiltonian dacă $\exists H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2k})$ a.î. $\Omega^b_{can}(X) = \mathrm{d}H$. În acest caz notăm $X = X_H$ şi H o numim *funcţia Hamilton*. ■

S 12.2 (Câmpuri Hamiltoniene liniare)

Fie $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^{2k})$ câmp vectorial liniar definit de $A \in M_{2k}(\mathbb{R})$. Atunci X este Hamiltonian dacă şi numai dacă A este matrice Ω^b_{can}-antisimetrică i.e. $\Omega_{can}(Au, v) = -\Omega(u, Av)$. Cine este H?

Rezolvare: Presupunem:

$$A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$$

şi atunci

$$\begin{aligned} A(q,p) &= (Mq+Np, Pq+Qp) = X(q,p) = J_k \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\dfrac{\partial H}{\partial p}, -\dfrac{\partial H}{\partial q}\right) \end{aligned}$$

şi deci: $\dfrac{\partial H}{\partial q} = -Pq - Qp$, $\dfrac{\partial H}{\partial p} = Mq + Np$. Cum $\dfrac{\partial}{\partial q}\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right) = \dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{\partial H}{\partial q}\right)$ avem $-Q = M$ şi deci

$$A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & -M \end{pmatrix}$$

Avem $A(q,p) = (Mq + Np, Pq - Mp)$ şi:

$$\begin{cases} \Omega(A(q,p),(q,p)) = (Mq+Np, Pq-Mp)\begin{pmatrix} P \\ -q \end{pmatrix} = Mpq + Np^2 - Pq^2 + Mpq = \\ \qquad = 2Mpq + Np^2 - Pq^2 \\ \Omega((q,p), A(q,p)) = (-p, q)\begin{pmatrix} Mq+Np \\ Pq-Mp \end{pmatrix} = -Mpq - Np^2 + Pq^2 - Mpq = \\ \qquad = -2Mpq - Np^2 + Pq^2 \end{cases}$$

ceea ce arată că A este Ω_{can}-antisimetrică. Avem:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= \frac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial H}{\partial p}\mathrm{d}p = (-Pq + Mp)\mathrm{d}q + (Mq + Np)\mathrm{d}p = \\
&= M(p\mathrm{d}q + q\mathrm{d}p) - Pq\mathrm{d}q + Np\mathrm{d}p = M\mathrm{d}(pq) - P\mathrm{d}(\frac{1}{2}q^2) + N\mathrm{d}(\frac{1}{2}p^2) = \\
&= \mathrm{d}(Mpq - \frac{P}{2}q^2 + \frac{N}{2}p^2)
\end{aligned}$$

adică:

$$H = Mpq - \frac{P}{2}q^2 + \frac{N}{2}p^2$$

ce este un Hamiltonian pătratic. Comparând cu prima relaţie din acolada de mai sus rezultă că:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\Omega_{can}(A(q,p),(q,p)).$$

■

S 12.3 (Transformări canonice)

Fie (V,Ω) şi (W,ω) spaţii simplectice şi $f : V \to W$ o aplicaţie (nu neapărat liniară). Spunem că f este *simplectomorfism* (sau *transformare canonică*) dacă este bijecţie şi $\forall v_1, v_2 \in V$ avem:

$$\Omega(v_1,v_2) = \omega(f(v_1), f(v_2)).$$

Să se arate că $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformare liniară definită de matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ este simplectomorfism relativ la Ω_{can} dacă şi numai dacă $\det A = 1$ i.e. $A \in SL(2,\mathbb{R})$.

Rezolvare: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este simplectomorfism relativ la Ω_{can} dacă şi numai dacă

$${}^t v_1 \cdot J_k \cdot v_2 = \omega(Av_1, Av_2) = {}^t(Av_1) \cdot J_k \cdot Av_2 = {}^t v_1 \cdot {}^t A J_k \cdot Av_2$$

ceea ce revine la $J_k = {}^t A \cdot J_k \cdot A$. Să studiem cazul $k = 1$ când:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Avem:

$$\begin{aligned}
{}^t A \cdot J_1 \cdot A &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ bc - ad & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ceea ce revine la $ad - bc = \det A = 1$. ■

S 12.4

Care sunt valorile proprii ale lui J_1? Este J_1 diagonalizabilă?

REZOLVARE: $\det(J_1 - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{\pm i\}$. J_1 nu este diagonalizabilă deoarece $\lambda_{1,2} \notin \mathbb{R}$. ■

S 12.5

Se cere expresia parantezei Poisson induse de J_1.

REZOLVARE:

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= {}^t(\nabla F) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \nabla G = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial F}{\partial p}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial q} \\ \dfrac{\partial G}{\partial p} \end{pmatrix} = \\ &= \left(-\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial q}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial q} \\ \dfrac{\partial G}{\partial p} \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}. \end{aligned}$$

Avem: $\{q^n, p\} = nq^{n-1}$, $\{q, p^m\} = mp^{m-1}$, $\{q^\alpha, p^\beta\} = \alpha q^{\alpha-1}\beta p^{\beta-1} = \alpha\beta q^{\alpha-1}p^{\beta-1}$. ■

Bibliografie

[1] **Anastasiei, M., Crâşmăreanu, M.**, *Lecţii de geometrie (Curbe şi suprafeţe)*, Ed. Ţehnopress, Iaşi, 2005.

[2] **Arnold, V.**, *Metodele matematice ale mecanicii clasice*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.

[3] **Arnold, V.**, *Ecuaţii diferenţiale ordinare*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1978.

[4] **Barbu, V.**, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Junimea, Iaşi, 1985.

[5] **Cruceanu, V.**, *Elemente de algebră liniară şi geometrie*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

[6] **Landau, L., Lifchitz , E.**, *Physique théoretique 1:Mécanique*, Ed. Mir, Moscou, 1981 (ed. 4).

[7] **Marsden, J.E., Raţiu, T.S.**, *An introduction to mechanics and symmetry*, Springer, 1994.

[8] **Miron, R., Anastasiei, M.**, *The geometry of Lagrange spaces: theory and applications*, Kluwer, 1994.

[9] **Miron, R., Bucătaru, I.**, *Finsler-Lagrange geometry*, in press.

[10] **Munteanu, Gh., Bălan, V.**, *Lecţii de teoria relativităţii*, Ed. Bren, Bucureşti, 2000.

[11] **Obădeanu, V., Groşanu, I.**, *Sisteme dinamice cu aplicaţii în biologie şi economie*, Ed. Mirton, Timişoara, 1996.

[12] **Oproiu, V.**, *Geometrie diferenţială*, Ed. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi, 2002.

[13] **Opriş, D., Butulescu, I.**, *Metode geometrice în studiul sistemelor de ecuaţii diferenţiale*, Ed. Mirton, Timişoara, 1997.

[14] **Pitiş, Gh.**, *Topologie diferenţială*, Ed. Univ. Transilvania, Braşov, 1997.

[15] **Pop, I.**, *Curs de geometrie analitică*, Ed. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi, 1992.

[16] **Puta, M.**, *Hamiltonian mechanical systems and geometric quantization*, Kluwer, 1993.

[17] **Răileanu, L., Miron, R.**, *Geometrie diferenţială*, Ed. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi, 1987.

[18] **Udrişte, C.**, *Linii de câmp*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1988.

[19] **Zet, Gh.**, *Simetrii unitare şi teorii gauge*, Ed. Gh. Asachi, Iaşi, 1998.

[20] **Zet, Gh.**, *Supersimetrii şi teoria stringurilor*, Ed. Cermi, Iaşi, 2001.