Spaţii liniare

Toate spaţiile liniare sunt considerate peste $\mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$).

1. Arătaţi că $(s, +, \cdot)$, $(\ell_\infty, +, \cdot)$, $(c, +, \cdot)$, $(c_0, +, \cdot)$, $(\ell_p, +, \cdot)$, $(s^*, +, \cdot)$ sunt spaţii liniare.

2. Să se determine dimensiunea spaţiilor liniare $(s, +, \cdot)$, $(\ell_\infty, +, \cdot)$, $(c, +, \cdot)$, $(c_0, +, \cdot)$, $(\ell_p, +, \cdot)$, $(s^*, +, \cdot)$.

3. Arătaţi că $C([a, b])$, $C^k([a, b])$, $L^p(a, b)$ sunt spaţii liniare.

4. Arătaţi că mulţimea $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ este liniar independentă în $C([a, b])$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Găsiţi dim $C([a, b]), a, b \in \mathbb{R}$.

5. Arătaţi că mulţimea $\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x), ..., \sin(nx)\}$ este liniar independentă în $L^2(0, \pi)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

6. Arătaţi că mulţimea $\{\cos(x), \cos(2x), \cos(3x), ..., \cos(nx)\}$ este liniar independentă în $C^\infty(0, \pi)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

7. Arătaţi că mulţimea $\left\{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)\right\}_{k\geq 0}$ este liniar independentă în $C^\infty(0, 1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

8. Arătaţi că mulţimea $\{\sin(\mu_j x)\}_{j\in\mathbb{N}}$, cu $(\mu_j)_j$ şir strict crescător, este liniar independentă în $C^\infty(0, \pi)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

9. Fie X, Y spaţii liniare şi $T : X \longrightarrow Y$ un operator linar. Atunci $\ker T$ este subspaţiu liniar în X, $\mathrm{Im}T$ este subspaţiu liniar în Y.

   a) Arătaţi că T injectiv dacă şi numai dacă $\ker T = \{0\}$;

   a) Arătaţi că T este surjectiv dacă şi numai dacă $\mathrm{Im}T = Y$;

10. Arătaţi că imaginea unei mulţimi liniar independente printr-un izomorfism de spaţii liniare este liniar independentă.

11. Arătaţi că dacă X_1 este un subspaţiu liniar in spaţiul X, atunci există întotdeauna subspaţii complementare pentru X_1.

12. Arătaţi că subspaţiul complementar nu este unic.

13. Fie X, Y spaţii liniare, $B = \{e_i\}_{i\in I}$ bază algebrică în X şi fie $f_0 : B \longrightarrow Y$ o aplicaţie <u>oarecare</u>. Să se arate că există o uinică aplicaţie <u>liniară</u> $f : X \longrightarrow Y$ astfel încât $f|_B = f_0$(prelungirea prin liniaritate a lui f_0).

14. Fie X spaţiu liniar, $B = \{e_i\}_{i\in I}$ bază algebrică în X. Definim $e_i^* : B \longrightarrow \mathbb{R}$ prin $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Prelungind $e_i^*, i \in I$ prin liniaritate, să se arate că $\{e_i^*\}_{i\in I}$ este o bază în X', unde X' este dualul algebric al lui X ($X' = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} | f$ liniară$\}$).

15. Determinarea funcţionalelor liniare.

    i) Fie $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţională liniară neidentic nulă. Atunci $\ker f$ este subspaţiu liniar maximal în X.

    ii) Fie X_0 un subspaţiu liniar maximal în spaţiul liniar X. Atunci există o unică $f \in X'$ astfel încât $\ker f = X_0$.

    iii) Dacă $f_1, f_2 \in X'$ au acelaşi nucleu atunci există $\gamma \neq 0$ astfel încât $f_2 = \gamma f_1$.

16. Fie X spaţiu liniar şi $x \in X$. Definim $\varphi : X' \longrightarrow \mathbb{R}$ prin $\varphi(x)(x^*) = x^*(x), \forall x^* \in X'$. Să se verifice că $\varphi(x) \in X'', \forall x \in X$ şi $\varphi : X \longrightarrow X''$ astfel definită este o aplicaţie liniară şi injectivă.

Spaţii liniare normate. Spaţii Banach

1. Arătaţi că aplicaţia $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}_+, \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ este o normă.

2. Arătaţi că aplicaţia $\|\cdot\|_p : \ell^p \longrightarrow \mathbb{R}_+, \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ este o normă.

3. Arătaţi că $C([a,b])$ cu aplicaţia $\|\cdot\|_\infty : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ este spaţiu liniar normat, $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Arătaţi că $L^p(a,b)$ cu aplicaţia $\|\cdot\|_p : L^p([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \|f\|_p = \left(\int\limits_{[a,b]} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ este spaţiu liniar normat, $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Să se arate că pentru $p \in [1,\infty)$, $\ell^p \subset \ell^\infty$ şi pentru $p_1, p_2 \in [1,\infty)$ cu $p_1 < p_2$, $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$. Indicaţi un element din ℓ^2 care nu este în ℓ^1.

6. Să se arate că $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

7. Fie $x \in \ell_q, \forall q \geq 1$. Să se arate că $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|f\|_\infty$.

8. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu mărginit. Să se arate că pentru $p_1, p_2 \in [1, \infty)$ cu $p_1 < p_2$, avem că $L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega)$.

9. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu mărginit şi $f \in L^\infty(\Omega)$. Să se arate că $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|x\|_\infty$.

10. Determinaţi toate normele pe $\mathbb{R}$.

11. Arătaţi că $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_\infty$ sunt echivalente pe $\mathbb{R}^n$ (reprezentaţi bilele corespunzatoare în $\mathbb{R}^2$).

12. Arătaţi că pe un spaţiu liniar finit dimensional toate normele sunt echivalente.

13. Fie X spaţiu liniar şi $\| \|_1$, $\| \|_2$ norme pe X. Să se arate că dacă normele $\| \|_1$, $\| \|_2$ sunt echivalente atunci mulţimile deschise în cele două norme coincid şi, pentru orice $x \in X$, vecinătăţile lui x în cele două norme coincid.

14. Fie $C([0, 1])$. Arătaţi că $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ nu sunt norme echivalente pe acest spaţiu.

15. Arătaţi că orice spaţiu liniar normat finit dimensional $(X, \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach.

16. Arătaţi că orice subspaţiu liniar finit dimensional al unui s.l.n. este închis.

17. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $Y \subset X$.

    (a) Arătaţi că dacă $(Y, d|_Y)$ este complet atunci Y este subspaţiu închis în X.

    (b) Arătaţi că dacă(X, d) este complet şi Y este închis atunci $(Y, d|_Y)$ este spaţiu metric complet.

18. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un s.l.n.. Arătaţi că orice şir Cauchy din X este mărginit.

19. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un s.l.n.. Arătaţi că dacă un sir Cauchy din X are un subşir convergent, atunci şirul însuşi este convergent la aceeaşi limită ca subşirul convergent.

Caracterul topologic al dimensiunii

1. Arătaţi că într-un spaţiu liniar normat orice mulţime compactă este închisă şi mărginită.

2. Arătaţi că într-un spaţiu liniar normat finit-dimensional orice mulţime închisă şi mărginită este compactă.

3. Daţi exemplu de un şir din ℓ^∞ care nu are nici un subşir convergent.

4. Fie $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, unde K o mulţime compactă din s.l.n. X. Arătaţi că $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ este spaţiu Banach.

5. Arătaţi că o familie finită de funcţii din $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ este echicontinuă.

6. Fie $\mathcal{F} \subset C([0,1])$, $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\geq 1}$, $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$. Arătaţi că $\mathcal{F}$ este echicontinuă în $x = 0$ dar nu este echicontinuă în $x = 1$.

7. Fie $\mathcal{F} \subset C([0,1])$, $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\geq 1}$, $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $x \in [0,1]$. Arătaţi că $\mathcal{F}$ nu este echicontinuă în $x = 0$.

8. Fie $\mathcal{F} \subset C([0,1])$, şi $M > 0$ astfel încât $\mathcal{F} = \{f \in C^1([0,1]) \mid \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq M\}$. Arătaţi că $\mathcal{F}$ este relativ compactă în $C([0,1])$.

9. Fie $\mathcal{F} \subset C([a,1b])$, $a, b \in \mathbb{R}$ şi $k_1, k_2 > 0$ astfel încât
$$\mathcal{F} = \{f \in C^1([a,b]) \mid f(a) \leq k_1, \int_a^b |f'(x)|^2 dx \leq k_2\}.$$
Arătaţi că $\mathcal{F}$ este relativ compactă în $C([a,b])$.

10. Fie $\mathcal{F} \subset C([0,1])$, $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\geq 1}$, $f_n(x) = \sin(x+n)$, $x \in [0,1]$. Arătaţi că $\mathcal{F}$ este relativ compactă în $C([0,1])$.

11. Fie $\mathcal{F} \subset C([0,1])$, $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\geq 1}$, $f_n(x) = \sin(nx)$, $x \in [0,1]$. Arătaţi că $\mathcal{F}$ nu este relativ compactă în $C([0,1])$.

Operatori liniar continui între spaţii liniare normate

1. Fie $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ spaţii Banach. Arătaţi că $\forall T \in L(X,Y)$,
$$\|T\| = \sup_{x\in X, \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

2. Fie $a = (a_n)_n \in \ell^\infty$ şi $T_a : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, $T_a(x) = (a_1x_1, ..., a_nx_n, ...), \forall x = (x_n)_n \in \ell^2$.
   (a) Arătaţi că T_a este bine definit;
   (b) Arătaţi că T_a operator liniar continuu;
   (c) Calculaţi $\|T_a\|$.

3. Fie $a = (b_n)_n \in \ell^2$ şi $T_b : \ell^\infty \longrightarrow \ell^2$, $T_b(x) = (b_1x_1, ..., b_nx_n, ...), \forall x = (x_n)_n \in \ell^\infty$.
   (a) Arătaţi că T_b este bine definit;

(b) Arătaţi că T_b operator liniar continuu;

(c) Calculaţi $\|T_b\|$.

4. Fie $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, $T(x) = (x_2, ..., x_n, ...), \forall x = (x_n)_n \in \ell^2$.

   (a) Arătaţi că T este bine definit;

   (b) Arătaţi că T operator liniar continuu;

   (c) Calculaţi $\|T\|$;

   (d) Studiaţi injectivitatea, surjectivitatea operatorului.

5. Fie $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, $T(x) = (0, x_1, x_2, ..., x_n, ...), \forall x = (x_n)_n \in \ell^2$.

   (a) Arătaţi că T este bine definit;

   (b) Arătaţi că T operator liniar continuu;

   (c) Calculaţi $\|T\|$;

   (d) Studiaţi injectivitatea, surjectivitatea operatorului.

6. Fie $T : \ell^1 \longrightarrow \ell^2$, $T(x) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_n, \forall x = (x_n)_n \in \ell^1$.

   (a) Arătaţi că T este bine definit;

   (b) Arătaţi că T operator liniar continuu;

   (c) Calculaţi $\|T\|$;

   (d) Studiaţi injectivitatea, surjectivitatea operatorului.

7. Fie $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^1$, $T(x) = \left(\frac{1}{n}x_{n+1}\right)_n, \forall x = (x_n)_n \in \ell^2$.

   (a) Arătaţi că T este bine definit;

   (b) Arătaţi că T operator liniar continuu;

   (c) Arătaţi că $\|T\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$;

   (d) Studiaţi injectivitatea, surjectivitatea operatorului.

Teorema lui Hahn-Banach

1. Fie X spaţiu liniar. Să se arate că orice funcţională subliniară, în particular orice seminormă este convexă.

2. Arătaţi că dacă $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţională subliniară, atunci

i) $p(0) = 0$

ii) $-p(-x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

3. Arătaţi că dacă $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ este o seminormă pe X, atunci $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.

4. Fie X, Y spaţii liniare , $T \in L(X, Y)$ şi $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o seminormă pe Y. Atunci $q : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $q(x) = p(Tx)$ este o seminormă pe X.

5. În $C^1([0, 1])$ se consideră $p : C^1([0, 1]) \longrightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x) + f'(x)|$.

   Este p normă sau seminormă?

6. Fie X spaţiu liniar real, $x_0 \in X, x_0 \neq 0$ şi $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o <u>funcţională subliniară</u> pe X. Să se arate că există o funcţională liniară $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = p(x_0)$ şi $f(x) \leq p(x) \, \forall x \in X$.

7. Fie X spaţiu liniar real, $x_0 \in X, x_0 \neq 0$ şi $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o <u>seminormă</u> pe X. Să se arate că există o funcţională liniară $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = p(x_0)$ şi $f(x) \leq p(x) \, \forall x \in X$.

8. Fie X spaţiu liniar peste $\mathbb{C}$, $x_0 \in X, x_0 \neq 0$ şi $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o <u>seminormă</u> pe X. Să se arate că există o funcţională liniară $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = p(x_0)$ şi $|f(x)| \leq p(x) \, \forall x \in X$.

9. Fie X spaţiu liniar real.Atunci mulţimea $H \subset X$ este un hiperplan în X dacă şi numai dacă există $X_0 \subset X$ subspaţiu maximal şi $x_0 \in X$ astfel încât $H = X_0 + x_0$.

10. Fie X spaţiu liniar real, $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţională subliniară. Atunci pentru orice $\mu > 0$, mulţimea $A = \{x \in X | p(x) \leq \mu\}$ este convexă şi are ca frontieră mulţimea $A = \{x \in X | p(x) = \mu\}$.

11. Fie X spaţiu liniar real, $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţională <u>convexă</u> pe X, $X_0 \subset X$ subspaţiu liniar şi $f_0 \in X_0'$ astfel încât $f_0(x) \leq p(x) \, \forall x \in X_0$. Să se arate că există o funcţională liniară $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = p(x_0)$ şi $f(x) \leq p(x) \, \forall x \in X$.

    În continuare X^* este dualul topologic, adică spaţiul liniar al funţionalelor liniare şi continue pe X, cu norma
    $$\|f\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

12. Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu liniar normat, $X_0 \subset X$ subspaţiu liniar şi $f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţionară liniară şi continuă pe X_0. Să se arate că există o funcţională liniară şi continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = f_0(x) \, \forall x \in X_0$ şi $\|f\| = \|f_0\|$.

13. Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu liniar normat, $x \in X$. Să se arate că

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*, \|f\| \leq 1} |f(x)| = \max_{f \in X^*, \|f\| \leq 1} |f(x)|,$$

adică acest supremum se atinge.

14. Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu liniar normat, $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Să se arate că există o funcţională liniară şi continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = \|x_0\|$ şi $\|f\| = 1$.

15. Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu liniar normat, $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Să se arate că există o funcţională liniară şi continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = \|x_0\|^2$ şi $\|f\| = \|x_0\|$.

16. Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu liniar normat, $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Să se arate că există o funcţională liniară şi continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = \|x_0\|^3$ şi $\|f\| = \|x_0\|^2$.

17. Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu liniar normat, $x_0 \in X$, cu $\|x_0\| = 1$. Să se arate că există o funcţională liniară şi continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = 1$ şi $\|f\| = 1$.

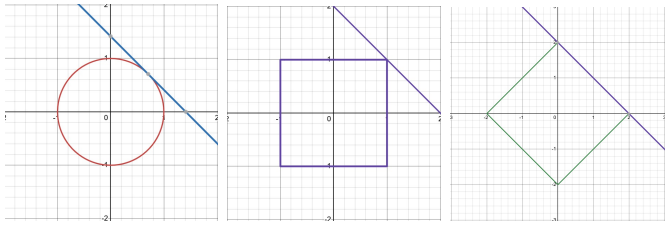
18. Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu liniar normat, $x_1, x_2 \in X$, astfel încât $x_1 \neq x_2$. Să se arate că există o funcţională liniară şi continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1) \neq f(x_2)$.

19. Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu liniar normat, $x_0, y_0 \in X$, $x_0, y_0 \neq 0$. Să se arate că există o funcţională liniară şi continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0 + y_0) = \|x_0\| + \|y_0\|$ şi $\|f\| \leq 2$.

20. Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu liniar normat, $X_0 \subset X$ subspaţiu liniar şi $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ cu $d(x_0, X_0) = d > 0$. Să se arate că există o funcţională liniară şi continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = 1$ $f(X_0) = \{0\}$ şi $\|f\| = \frac{1}{d}$.

21. Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu liniar normat, $\{x_1, ...x_n\} \subset X$ o mulţime liniar independentă şi $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Arătaţi că există o funcţională liniară şi continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_i) = c_i$, $i = \overline{1, n}$.

22. Fie $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $X_0 = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\} \subset X$ subspaţiu liniar în X şi fie $f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, x) = 2x, \forall (x, x) \in X_0$. Găsiţi funţionala liniară şi continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ care o prelungeste pe f_0.



23. Fie $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $X_0 = \{(x,x) | x \in \mathbb{R}\} \subset X$ subspaţiu liniar în X şi fie $f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,x) = 2x, \forall (x,x) \in X_0$. Găsiţi funţionala liniară şi continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ care o prelungeste pe f_0.

24. Fie $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $X_0 = \{(x,x) | x \in \mathbb{R}\} \subset X$ subspaţiu liniar în X şi fie $f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,x) = 2x, \forall (x,x) \in X_0$. Găsiţi funţionala liniară şi continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ care o prelungeste pe f_0.

25. Arătaţi că dacă X este un spaţiu Banach finit dimensional, atunci orice funcţională liniară pe X este continuă.

26. Arătaţi că dacă X este un spaţiu Banach infinit dimensional, atunci X admite o funcţională liniară discontinuă.

Spaţii Hilbert. Serii Fourier

1. Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu cu produs scalar. Arătaţi că au loc:
   (a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, $\forall x, y \in X$;
   (b) $4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$, $\forall x, y \in X$ dacă X este spaţiu vectorial real;
   (c) $4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$, $\forall x, y \in X$ dacă X este spaţiu vectorial complex;

2. Fie H un spaţiu Hilbert şi H_1, H_2 subspaţii liniare în H. Arătaţi că $(H_1 + H_2)^\perp = H_1^\perp \cap H_2^\perp$.

3. (a) Fie H un spaţiu Hilbert şi $A \subset H, A \neq \emptyset$. Arătaţi că complementul său ortogonal este subspaţiu liniar închis al lui H.
   (b) Este $M = \left\{ x = (x_n)_n \in \ell^2 | \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n = 0 \right\}$ subspaţiu liniar închis în ℓ^2?
   (c) Este $M = \left\{ x = (x_n)_n \in \ell^2 | \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x_n = 0 \right\}$ subspaţiu liniar închis în ℓ^2?
   (d) Este $M = \left\{ f \in L^2(0,1) | \int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt = 0 \right\}$ subspaţiu liniar închis în $L^2(0,1)$?
   (e) Este $M = \left\{ f \in L^2(1,\infty) | \int_1^\infty \frac{f(t)}{t} dt = 0 \right\}$ subspaţiu liniar închis în $L^2(1,\infty)$?

4. Fie $E = C([-1,1]; \mathbb{R})$. Arăraţi că aplicaţia $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} f(x) g(x) dx$$

este un produs scalar pe E.

5. Fie $E = C^1([0,1];\mathbb{R})$. Arăraţi că aplicaţia $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$$

este un produs scalar pe E.

6. Fie $E = C([-1,1];\mathbb{R})$ cu produsul scalar $(f,g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ şi fie subspaţiile $F = \{f \in E | f(x) = 0, x \in [-1,0]\}$ şi $G = \{f \in E | g(x) = 0, x \in [0,1]\}$. Arătaţi că cele două subspaţii sunt ortogonale.

7. În spaţiul Hilbert $L^2(0,\pi)$ se consideră subspaţiul

$$V = \{f \in L^2(0,\pi) \mid f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}\} \text{ şi } g(x) = x^3.$$

Determinaţi proiecţia lui g pe subspaţiul V.

8. În spaţiul Hilbert $L^2(0,\pi)$ se consideră subspaţiul

$$V = \{f \in L^2(0,\pi) | f(x) = ax^2 + b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

şi $g : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos x$. Determinaţi proiecţia lui g pe subspaţiul V.

9. În spaţiul Hilbert $L^2(0,\pi)$ se consideră subspaţiul

$$V = \{f \in L^2(0,\pi) \mid f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}\} \text{ şi } g(x) = x^3.$$

Determinaţi proiecţia lui g pe subspaţiul V.

10. Arătaţi că familia de funcţii $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, $\varphi_n(x) = e^{2n\pi i \frac{x}{a}}$, $x \in (0,a)$ este ortogonală in $L^2(0,a;\mathbb{C})$ şi calculaţi norma elementelor sale.

11. În $L^2(-\pi,\pi;\mathbb{C})$ se cosideră sistemul ortogonal $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{e^{nix}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Scrieţi seria Fourier si identitatea lui Parseval asociată pentru funcţia $f : (-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{C}, f(x) = e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$.

12. În $L^2(-\pi,\pi;\mathbb{C})$ se cosideră sistemul ortogonal $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{e^{nix}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Scrieţi seria Fourier si identitatea lui Parseval asociată pentru funcţia $f : (-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{C}, f(x) = |\cos x|$.

13. În $L^2(0,1;\mathbb{C})$ se cosideră sistemul ortogonal $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{e^{2n\pi ix}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Scrieţi seria Fourier si identitatea lui Parseval asociată pentru funcţia $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{C}, f(x) = xe^{ix}$.