Spaţii Hilbert

Probleme Sturm-Liouville - probleme de autovalori pe segment.

Rezolvaţi următoarele probleme Sturm-Liouville (găsiţi valorile propirii şi funcţiile proprii corespunzătoare):

1. $\begin{cases} -\varphi''(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (0,a); \\ \varphi(0) = \varphi(a) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\varphi''(x) + \varphi(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (0,a); \\ \varphi(0) = \varphi(a) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\varphi''(x) - \varphi(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (a,b); \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -\varphi''(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (0,a); \\ \varphi'(0) = \varphi'(a) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\varphi''(x) + \varphi(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (0,a); \\ \varphi'(0) = \varphi'(a) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\varphi''(x) - \varphi(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (a,b); \\ \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -\varphi''(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (0,a); \\ \varphi(0) = \varphi'(a) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\varphi''(x) + \varphi(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (0,a); \\ \varphi(0) = \varphi'(a) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\varphi''(x) - \varphi(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (a,b); \\ \varphi(a) = \varphi'(b) = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -\varphi''(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (0,a); \\ \varphi'(0) = \varphi(a) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\varphi''(x) + \varphi(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (0,a); \\ \varphi'(0) = \varphi(a) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\varphi''(x) - \varphi(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (a,b); \\ \varphi'(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -\varphi''(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (0,a); \\ \varphi(0) = \varphi(a) \\ \varphi'(0) = \varphi'(a) \end{cases}$

6. $\begin{cases} -\varphi''(x) = \lambda\varphi(x),\ x \in (0,a); \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi(a) + \varphi'(a) = 0 \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$.

Ortogonalitate. Proiectori ortogonali.

1. Arătaţi că familia de funcţii $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$, $\varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}$, $x \in (0,a)$ este ortogonală in $L^2(0,a;\mathbb{R})$ şi calculaţi norma elementelor sale.

2. Arătaţi că familia de funcţii $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, $\varphi_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{a}$, $x \in (0,a)$ este ortogonală in $L^2(0,a;\mathbb{R})$ şi calculaţi norma elementelor sale.

3. Arătaţi că familia de funcţii $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, $\varphi_n(x) = \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2a}$, $x \in (0,a)$ este ortogonală in $L^2(0,a;\mathbb{R})$ şi calculaţi norma elementelor sale.

4. Arătaţi că familia de funcţii $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, $\varphi_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}$, $x \in (0,a)$ este ortogonală in $L^2(0,a;\mathbb{R})$ şi calculaţi norma elementelor sale.

5. Arătaţi că familia de funcţii $\{1, \varphi_n, \psi_n\}_{n\geq 1}$, $\varphi_n(x) = \sin\frac{2n\pi x}{a}$, $\psi_n(x) = \cos\frac{2n\pi x}{a}$, $x \in (0, a)$ este ortogonală in $L^2(0, a; \mathbb{R})$ şi calculaţi norma elementelor sale.

6. Arătaţi că familiile de funcţii de mai sus sunt liniar independente în $L^2(0, a; \mathbb{R})$.

7. Arătaţi că familia de funcţii $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, $\varphi_n(x) = e^{2n\pi\frac{x}{a}}$, $x \in (0, a)$ este ortogonală in $L^2(0, a; \mathbb{C})$ şi calculaţi norma elementelor sale.

8. Calculaţi proiecţia funcţiei $f : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, pe subspaţiul $V \subset L^2(0, \pi; \mathbb{R})$, $V = span\{\varphi_1, \varphi_7\}$, $\varphi_1(x) = \cos(x), \varphi_7(x) = \cos(7x)$, $x \in (0, \pi)$.

9. Calculaţi proiecţia funcţiei $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, pe subspaţiul $V \subset L^2(0, 1; \mathbb{R})$, $V = span\{\varphi_1, \varphi_2\}$, $\varphi_1(x) = \sin(\pi x), \varphi_2(x) = \sin(2\pi x)$, $x \in (0, 1)$.

Operatorul soluţie. Funcţia Green.

Fie $f \in C(0, a; \mathbb{R})$. Pentru fiecare problema la limită găsiţi funcţia Green corespunzătoare şi determinaţi soluţia:

1. $\begin{cases} -u''(x) = f(x),\ x \in (0, a); \\ u(0) = u(a) = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x),\ x \in (0, a); \\ u(0) = u(a) = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -u''(x) - u(x) = f(x),\ x \in (0, a); \\ u(0) = u(a) = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -u''(x) - u(x) = f(x),\ x \in (0, a); \\ u'(0) = u(a) = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x),\ x \in (0, a); \\ u'(0) = u(a) = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x),\ x \in (0, a); \\ u'(0) = u'(a) = 0. \end{cases}$

Serii Fourier. Identitatea lui Parseval

1. În $L^2(0,\pi;\mathbb{R})$ se cosideră sistemul ortogonal $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$, $\varphi_n(x) = \sin(nx)$. Scrieţi seria Fourier si identitatea lui Parseval asociată pentru următoarele funcţii:
   - $f : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1$;
   - $f : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$;
   - $f : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$;
   - $f : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\cos(x)$;
   - $f : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x(\pi - x)$;
   - $f : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = (\pi - x)^2$;
   - $f : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^x$;
2. În $L^2(0,\pi;\mathbb{R})$ se cosideră sistemul ortogonal $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, $\varphi_n(x) = \cos(nx)$. Scrieţi seria Fourier si identitatea lui Parseval asociată pentru funcţiile de mai sus.
3. În $L^2(0,1;\mathbb{R})$ se cosideră sistemul ortogonal $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, $\varphi_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}$. Scrieţi seria Fourier si identitatea lui Parseval asociată pentru următoarele funcţii:
   - $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1$;
   - $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$;
   - $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin \pi x$;
4. În $L^2(-\pi,\pi;\mathbb{C})$ se cosideră sistemul ortogonal $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{e^{nix}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Scrieţi seria Fourier si identitatea lui Parseval asociată pentru funcţia $f : (-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{C}, f(x) = e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$.
5. În $L^2(-\pi,\pi;\mathbb{C})$ se cosideră sistemul ortogonal $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{e^{nix}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Scrieţi seria Fourier si identitatea lui Parseval asociată pentru funcţia $f : (-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{C}, f(x) = |\cos x|$.
6. În $L^2(0,1;\mathbb{C})$ se cosideră sistemul ortogonal $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{e^{2n\pi ix}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Scrieţi seria Fourier si identitatea lui Parseval asociată pentru funcţia $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{C}, f(x) = xe^{ix}$.

Metoda separării variabilelor pentru rezolvarea problemelor la limită pentru EDP

Probleme mixte parabolice pe segment

Rezolvaţi, prin metoda separării variabilelor, următoarele probleme mixte parabolice:

1. $$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t, \ \text{ pentru } t > 0, x \in (0,1), \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \ t > 0, \\ u(0,x) = x^2, \ x \in (0,1). \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = \sin(t)\sin(3x/2), \ (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\pi), \\ u(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \ t > 0 \\ u(0,x) = \sin(x/2). \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u = t\sin(3\pi x), \ \text{ pentru } t > 0, x \in (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \ t > 0, \\ u(0,x) = x, \ x \in (0,1). \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t, \ \text{ pentru } t > 0, x \in (0,1), \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \ t > 0, \\ u(0,x) = \cos \pi x + \cos 2\pi x, \ x \in (0,1). \end{cases}$$

Probleme mixte hiperbolice pe segment

Rezolvaţi, prin metoda separării variabilelor, următoarele probleme mixte hiperbolice:

1. $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = \sin(t)\sin(\frac{3x}{2}), \text{ pentru } t > 0, x \in (0, \pi), \\ u(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0,\ t > 0, \\ u(0, x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right), u_t(0, x) = 0,\ x \in (0, \pi). \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin t \sin \frac{3x}{4}, \text{ pentru } t > 0, x \in (0, 2\pi) \\ u(t, 0) = u_x(t, 2\pi) = 0,\ t > 0 \\ u(0, x) = \sin \frac{x}{4},\ x \in (0, 2\pi) \\ u_t(0, x) = \sin \frac{5x}{4},\ x \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = \sin(t)\cos(x),\ (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \pi/2), \\ u_x(t, 0) = u(t, \pi/2) = 0,\ t > 0 \\ u_t(0, x) = \cos(x), x \in (0, \pi/2) \\ u(0, x) = \cos(3x), x \in (0, \pi/2) \end{cases}$$

Probleme eliptice pe dreptunghi

Rezolvaţi, prin metoda separării variabilelor, următoarele probleme mixte eliptice:

1. $$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} = y\sin(x), \ \text{ pentru } x \in (0,\pi), y \in (0,\pi) \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \ y \in (0,\pi) \\ u(x,0) = x^2, \ u(x,\pi) = \sin(x), \ x \in (0,\pi). \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} = y\cos(2x), \ \text{ pentru } , x \in (0,\pi), y \in (0,\pi) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial n}u(\pi,y) = 0, \ y \in (0,\pi) \\ u(x,0) = x, \ u(x,\pi) = \cos(x), \ x \in (0,\pi). \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} = x\cos(\frac{y}{2}), \ \text{ pentru } x \in (0,\pi), y \in (0,\pi) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,0) = u(x,\pi) = 0, \ y \in (0,\pi) \\ u(x,0) = 1, \ u(x,\pi) = \cos(\frac{y}{2}), \ x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Probleme de autovalori pe dreptunghi

Rezolvaţi următoarele probleme de autovalori considerate pe domenii dreptunghiulare:

1. $$\begin{cases} -\Delta\psi = \lambda\psi, \ (x,y) \in (0,1) \times (0,2) \\ \psi(0,y) = \psi(1,y) = 0, y \in (0,2) \\ \psi(x,0) = \psi(x,2) = 0, x \in (0,1) \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} -\Delta\psi = \lambda\psi, \ (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi) \\ \psi(0,y) = \psi(\pi,y) = 0, y \in (0,\pi) \\ \frac{\partial}{\partial n}\psi(x,0) = \frac{\partial}{\partial n}\psi(x,\pi) = 0, x \in (0,\pi) \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} -\Delta\psi = \lambda\psi, \ (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi) \\ \psi(0,y) = \psi(\pi,y) = 0, y \in (0,\pi) \\ \psi(x,0) = \frac{\partial}{\partial n}\psi(x,\pi) = 0, x \in (0,\pi) \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} -\Delta\psi = \lambda\psi, \ (x,y) \in (0,1) \times (0,2) \\ \frac{\partial}{\partial n}\psi(0,y) = \psi(1,y) = 0, y \in (0,2) \\ \psi(x,0) = \psi(x,2) = 0, x \in (0,1) \end{cases}$$

Probleme mixte parabolice pe dreptunghi

1. $$\begin{cases} u_t - \Delta u = \sin\frac{y}{2}, \ \text{ pentru } t > 0, (x,y) \in (0,\pi) \times (0,2\pi) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t,0,y) = \frac{\partial u}{\partial n}(t,\pi,y) = 0, \ y \in (0,2\pi), \ t > 0, \\ u(t,x,0) = u(t,x,2\pi) = 0, \ x \in (0,\pi) \\ u(0,x,y) = \cos(x)\sin(2y), \ (x,y) \in (0,\pi) \times (0,2\pi). \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_t - \Delta u - u = 1, \ \text{ pentru } t > 0, (x,y) \in (0,\pi) \times (0,2\pi) \\ u(t,0,y) = u(t,\pi,y) = 0, \ y \in (0,2\pi), \ t > 0, \\ u(t,x,0) = u(t,x,2\pi) = 0, \ x \in (0,\pi) \\ u(0,x,y) = x\sin(2y), \ (x,y) \in (0,\pi) \times (0,2\pi). \end{cases}$$

Probleme mixte hiperbolice pe dreptunghi

1. $$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 1, \ \text{ pentru } t > 0, (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t,0,y) = \frac{\partial u}{\partial n}(t,\pi,y) = \frac{\partial u}{\partial n}(t,x,0) = \frac{\partial u}{\partial n}(t,x,\pi) = 0, \ t > 0, \\ u(0,x,y) = \cos(2x), \ (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi). \\ u_t(0,x,y) = \cos(2y), \ (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi). \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u = 1, \ \text{ pentru } t > 0, (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi) \\ u(t,0,y) = u(t,\pi,y) = 0, \ y \in (0,\pi), \ t > 0, \\ u(t,x,0) = u(t,x,2\pi) = 0, \ x \in (0,\pi) \\ u(0,x,y) = \sin(2x), \ (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi). \\ u_t(0,x,y) = \sin(y), \ (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi). \end{cases}$$

Principiul de maxim pentru operatori eliptici

În cele ce urmează $\Omega \in \mathbb{R}^n$ deschis, mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ netedă şi n este normala exterioară la $\partial\Omega$. În plus, pentru orice punct de pe frontieră, Ω are proprietatea bilei interioare.

1. Arătaţi că dacă soluţia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ a problemei

$$\Delta u(x) = u^2(x), x \in \Omega$$

   îşi atinge maximul în interiorul lui Ω, atunci $u \equiv 0$ în $\overline{\Omega}$.

2. Arătaţi că dacă $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verifică

$$\begin{aligned} &\Delta u(x) \geq 0, x \in \Omega, \quad \Delta v(x) \leq 0, x \in \Omega \\ &u(x) \leq v(x), x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

   atunci $u(x) \leq v(x), \forall x \in \overline{\Omega}$.

3. Demonstraţi că problema $\begin{cases} \Delta u = u^3, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$ admite doar soluţia banală.

4. Fie $f \in C(\Omega), g \in C(\partial\Omega)$. Demonstraţi unicitatea soluţiei clasice pentru

$$a) \begin{cases} \Delta u = f, & \Omega \\ u = g, & \partial\Omega \end{cases} \qquad b) \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \Omega \\ u = g, & \partial\Omega \end{cases} \qquad c) \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \partial\Omega \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \Delta u = f, & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g, & \partial\Omega \end{cases} \qquad e) \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g, & \partial\Omega \end{cases}$$

5. Fie $\Omega \in \mathbb{R}^n$ cu frontiera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}$ şi fie funcţiile $f \in C(\Omega)$, $g, h, k \in C(\partial\Omega)$. Demonstraţi unicitatea soluţiei clasice pentru

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \Omega \\ u = g, & \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h, & \Gamma_2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = k, & \Gamma_3. \end{cases}$$

6. Fie $f \in C(\Omega)$, $h \in C(\partial\Omega)$ şi $u, v, w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ soluţii pentru

$$\begin{cases} \Delta u - u = f, & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = h, & \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v - v \geq f, & \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} + v \leq h, & \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta w - w \leq f, & \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} + w \geq h, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Arătaţi că $v \leq u \leq w$ în Ω.

7. Fie $\Omega = (0,1) \times (0,1) \in \mathbb{R}^2$. Demonstraţi că soluţia clasică $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ a problemei

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 1, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = 1, & x \in [0,1] \\ u(x,1) = 0, & x \in [0,1] \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \{(x,y) \in \Omega | x = 0, y \in (0,1)\} \cup \{(x,y) \in \Omega | x = 1, y \in (0,1)\} \end{cases}$$

verifică inegalitatea $u(x,y) \leq 1, \forall (x,y) \in \Omega$.

8. Fie $\Omega = (0,1) \times (0,1) \in \mathbb{R}^2$. Demonstraţi că soluţia clasică $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ a problemei

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = u(0,y) = 1, & x, y \in [0,1] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) + u(1,y) = 0, & y \in [0,1] \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0, & x \in [0,1] \end{cases}$$

verifică inegalitatea $e^{-x} \leq u(x,y) \leq 1, \forall (x,y) \in \Omega$.

9. Fie $\Omega = (-1,1) \times (-1,1) \in \mathbb{R}^2$ şi $u \in C^2(\omega) \cap C(\overline{\Omega})$ o soluţie a clasică a problemei $\begin{cases} \Delta u = -1, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$

Arătaţi că $\frac{1}{4} < u(0,0) < \frac{1}{2}$.

10. Fie $u : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $u(x,y) = x^2 - y^2$. Arătaţi că u este armonică în B_1, găsiţi punctele de minim, de maxim şi calculaţi $\frac{\partial u}{\partial n}$ în punctele de minim şi maxim.

11. Fie $u : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + 9xy$.

    (a) Arătaţi că u este funcţie armonică în B_1 şi găsiţi punctele de maxim ale lui u.

    (b) Calculaţi $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ în punctul/punctele de maxim.

12. Fie $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$, $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy^2$.

    (a) Arătaţi că u este funcţie subarmonică în Ω şi găsiţi punctele de maxim ale lui u.

    (b) Calculaţi $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ în punctul/punctele de maxim.

13. Fie $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$, $u(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$.

    (a) Arătaţi că u este funcţie armonică în Ω şi găsiţi punctele de minim şi maxim ale lui u.

    (b) Calculaţi $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ în punctul/punctele de minim/ maxim.

14. Fie $u : \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 4, x > 1, y > 1\} \to \mathbb{R}$,

$$u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}.$$

    (a) Arătaţi că u este funcţie armonică în Ω şi găsiţi punctele de maxim ale lui u.

    (b) Calculaţi $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ în punctul/punctele de maxim.

15. Fie $u : \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}$,

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy.$$

    (a) Arătaţi că u este funcţie subarmonică în Ω şi găsiţi punctele de maxim ale lui u.

    (b) Calculaţi $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ în punctul/punctele de maxim.

16. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \Omega = B_3(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ cu frontiera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \partial B_1(0)$, $\Gamma_2 = \partial B_3(0)$. Demonstraţi, folosind principiul de maxim, unicitatea soluţiei clasice pentru problema eliptică la limită

$$\begin{cases} -\Delta u + 2u = -1, \text{ în } \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + 4u = 1 \text{ pe } \Gamma_1, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \Gamma_2. \end{cases}$$

De asemenea, deduceţi că $u(x) < 1, x \in \overline{\Omega}$.

17. Fie $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \|x\| < 1, x_1 > \frac{1}{2}\}$, $u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\|x\|}x^2 - y^2 + xy^2$. Găsiţi extremele lui u.

18. Fie $\Omega \in \mathbb{R}^n$ simplu conex şi $u \in C^3(\overline{\Omega})$ soluţie a problemei

$$\begin{cases} \Delta u = c, \quad \Omega, \quad c \in \mathbb{R} \\ u = 0, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Arătaţi că $\|\nabla u\|$ îşi atinge maximul pe $\partial\Omega$.

19. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \Omega = B_3(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ cu frontiera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \partial B_1(0)$, $\Gamma_2 = \partial B_3(0)$. Demonstraţi, folosind principiul de maxim, unicitatea soluţiei clasice pentru problema eliptică la limită

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, \text{ în } \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + u = 1 \text{ pe } \Gamma_1, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \Gamma_2. \end{cases}$$

De asemenea, deduceţi că $u(x) < 1, x \in \overline{\Omega}$.

2 Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = B_3(0) \setminus \bar{B_1}(0)$ cu frontiera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \partial B_1(0)$, $\Gamma_2 = \partial B_3(0)$. Demonstraţi, folosind principiul de maxim, unicitatea soluţiei clasice pentru problema eliptică la limită

$$\begin{cases} -\Delta u + \|x\|^2 u = -2, \text{ în } \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + u = -1 \text{ pe } \Gamma_1, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -2 \text{ pe } \Gamma_2. \end{cases}$$

De asemenea, deduceţi că $u(x) < -1, x \in \overline{\Omega}$.

20. Fie $\Omega = (0,1) \times (0,2)$ şi u soluţia problemei

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) - 3u = 1, (x,y) \in \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,0) + 2u(x,0) = -1, \ x \in (0,1) \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,2) = 0, \ x \in (0,1) \\ \\ u(0,y) = 2, \ y \in (0,2) \\ \\ u(1,y) = 1, \ y \in (0,2) \end{cases}$$

Aplicând principiul de maxim, să se arate că $u(x,y) \leq 2, \forall (x,y) \in \Omega$.

Soluţii variaţionale

1. Fie $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un domeniu mărginit şi deschis, cu frontiera netedă, şi fie $f \in C(\Omega), g \in C(\partial\Omega)$. Scrieţi formularea variaţională a problemelor şi arătaţi unicitatea soluţiei variaţionale pentru

$$a) \begin{cases} \Delta u = f, & \Omega \\ u = g, & \partial\Omega \end{cases} \qquad b) \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \Omega \\ u = g, & \partial\Omega \end{cases} \qquad c) \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \partial\Omega \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \Delta u = f, & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g, & \partial\Omega \end{cases} \qquad e) \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g, & \partial\Omega \end{cases}$$

2. Fie $\Omega \in \mathbb{R}^n$ cu frontiera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}$ şi fie funcţiile $f \in C(\Omega)$, $g, h, k \in C(\partial\Omega)$. Scrieţi formularea variaţională şi arătaţi unicitatea soluţiei variaţionale pentru

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \Omega \\ u = g, & \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h, & \Gamma_2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = k, & \Gamma_3. \end{cases}$$

3. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domeniu mărginit şi deschis, cu frontiera netedă. Considerăm problema la limită

$$\begin{cases} -\Delta u + 7u = 2, \text{ în } \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + 5u = -1, \text{ pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Scrieţi formularea variaţională şi arătaţi unicitatea soluţiei variaţionale.

4. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 2\}$ şi $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \{y > 0\}$, $\Gamma_2 = \partial\Omega \cap \{y < 0\}$.

Considerăm problema la limită

$$\begin{cases} -\Delta u = 3, \text{ în } \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + 4u = 5, \text{ pe } \Gamma_1, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 6 \text{ pe } \Gamma_2. \end{cases}$$

Scrieţi formularea variaţională şi arătaţi unicitatea soluţiei variaţionale.

Transformata Fourier pe $\mathbb{R}$

Fie $f \in L^1(\mathbb{R})$ şi

$$\hat{f}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

Arăraţi că:

- pentru $u \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ cu $u' \in L^1(\mathbb{R})$, are loc $\widehat{u'}(\lambda) = i\lambda\hat{u}(\lambda)$
- pentru $u, xu \in L^1(\mathbb{R})$ atunci $u' \in C^1(\mathbb{R})$ şi are loc $\widehat{u}'(\lambda) = (\widehat{-ix)u(x})(\lambda)$
- fie $a \in \mathbb{R}$. Se consideră operatorii de translaţie, omotetie, simetrie: $\tau_a, h_a, \sigma : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R})$
  $\tau_a u(x) := u(x-a), \quad h_a u(x) := u(ax), \quad \sigma u(x) := u(-x), \quad x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\widehat{\tau_a u}(\lambda) = e^{-i\lambda a}\hat{u}(\lambda), \quad \widehat{h_a u}(\lambda) = \frac{1}{|a|}\widehat{u}\left(\frac{1}{a}\lambda\right), \quad \hat{u}(-\lambda) = \widehat{u(-x)}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$$

- pentru $u, v \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}v d\mu = \int_{\mathbb{R}} u\widehat{v} d\mu$$

  dacă $u * v(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)dy$, atunci

$$\widehat{u * v}(\lambda) = \widehat{u}(\lambda) \cdot \widehat{v}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\widehat{u \cdot v}(\lambda) = \widehat{u}(\lambda) * \widehat{v}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = x\cos(x)\chi_{(0,1)}(x)$. Calculaţi

$$f * \chi_{(-1,1)}(x),\ \widehat{f}(\lambda),\ f * \widehat{\chi_{(-1,1)}}(\lambda).$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = x\sin(x)\chi_{(0,2\pi)}(x), g(x) = x^2\chi_{(0,2\pi)}(x)$. Calculaţi

$$f * g,\ \widehat{f}(\lambda),\ \widehat{g}(\lambda),\ f * \widehat{\chi_{(-\pi,\pi)}}(\lambda).$$