Cursul 14

(*plan de curs*)

Modele matematice descrise de ecuaţii diferenţiale

Ecuaţiile diferenţiale ordinare au apărut odată cu noţiunea de derivată, înţeleasă ca fiind viteza de schimbare a valorilor unei mărimi, şi au constituit de la bun început principalul instrument matematic pentru modelarea evoluţiei unor mărimi fizice, iniţial din mecanică şi apoi din toate ştiinţele exacte: fizică, chimie, biologie, economie şi altele.

În aceste modele matematice se consideră că mărimile care intervin sunt descrise de funcţii continue şi derivabile, chiar dacă, de exemplu, mărimea modelată reprezintă numărul de indivizi (atomi, molecule, bani sau iepuri) dintr-o anumită populaţie. Modelul este realist pentru populaţii cu un număr mare de indivizi, când unitatea de măsură poate fi luată suficient de mare, de exemplu "milionul de locuitori". În cazul populaţiilor mici sunt de preferat modelele discrete, în care derivarea $x \to x'$ este înlocuită, de exemplu, cu diferenţa finită $(x_n) \to (\Delta x_n)$, cu $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$.

§1 Dezintegrarea unei substanţe radioactive. Legea dezintegrării atomilor radioactivi afirmă că viteza instantanee de dezintegrare a unui element radioactiv este direct proporţională cu numărul de atomi radioactivi existenţi la momentul considerat. Dacă notăm cu $x(t)$ numărul de atomi nedezintegraţi la momentul t, rezultă că

$$x' = -ax$$

pentru orice $t \geq 0$, unde $a > 0$ este *constanta de dezintegrare*, specifică fiecărui element radioactiv.

Acest model foarte simplu, dat de o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordinul întâi, cu soluţia generală

$$x(t) = x(0)e^{-at}$$

pentru $t \geq 0$, cu $c \in \mathbb{R}_+$, descrie foarte precis fenomenul fizic considerat şi are numeroase aplicaţii practice.

§2 Ecuaţia logistică. Cel mai simplu model de evoluţie cantitativă a unei populaţii biologice, inspirat din modelul de mai sus, este dat de ipoteza că viteza instantanee de variaţie a numărului de indivizi la momentul t, notat cu $x(t)$, este direct proporţională cu acest număr, ipoteză care conduce la ecuaţia diferenţială

$$x' = \lambda x \tag{1}$$

cu λ o constantă dată de diferenţa dintre rata natalităţii şi cea a mortalităţii.

În consecinţă, obţinem iarăşi pentru $x(t)$ o lege de variaţie exponenţială, lege acceptabilă în practică numai pentru predicţii de scurtă durată, cât timp se poate presupune că cele două rate sunt constante.

Un model mai adecvat fenomenului studiat, deşi la fel de simplu, se obţine considerând că λ depinde de x sub forma $\lambda = \alpha - \beta x$, cu $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$. Ecuaţia (1) devine

$$x' = (\alpha - \beta x)x,$$

care, scrisă sub forma

$$x' = ax(b - x), \tag{2}$$

cu $a = \beta > 0$ şi $b = \alpha/\beta > 0$, poartă numele de *ecuaţia logistică*.

În acest model semnificaţia numărului b este evidentă, el reprezintă pentru numărul de indivizi pragul peste care resursele de subzistenţă ale populaţiei sunt atât de mici încât rata mortalităţii depăşeşte rata natalităţii, şi astfel derivata x' este negativă.

Ecuaţia (2) este autonomă, de forma

$$x' = f(x),$$

cu $f(x) = ax(b-x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, f funcţie de clasă C^1. Se observă imediat că spaţiul fazelor, $\mathbb{R}^1$, este despărţit de punctele staţionare $x_0 = 0$ şi $x_1 = b$ în trei traiectorii nestaţionare: segmentele $(-\infty, 0)$, $(0, b)$ şi $(b, +\infty)$. Prima traiectorie este parcursă în jos, de la 0 către $-\infty$, a doua în sus, de la 0 către b, iar a treia iarăşi în jos, de la $+\infty$ către b.

Soluţiile care pleacă dintr-un $\xi > b$ rămân mai mari decât b şi sunt descrescătoare, prin urmare sunt mărginite. Rezultă că intervalul lor maximal de definiţie (la dreapta) este întreaga semiaxă $[0, +\infty)$ şi, mai mult, tind la b pentru $t \to +\infty$.

Analog, soluţiile care pleacă dintr-un $\xi \in (0, b)$ rămân între 0 şi b, sunt definite pentru orice $t \in [0, +\infty)$, sunt crescătoare şi tind la b pentru $t \to +\infty$.

Rezultă de aici că soluţia staţionară $x = b$ este asimptotic stabilă, şi chiar mai mult: pentru orice dată iniţială $\xi > 0$ soluţia care pleacă din ξ tinde la b pentru $t \to +\infty$. Acest comportament are, pentru sistemul modelat, următoarea interpretare: oricare ar fi valoarea sa iniţială, mărimea populaţiei se stabilizează lent şi fără oscilaţii la valoarea de prag b.

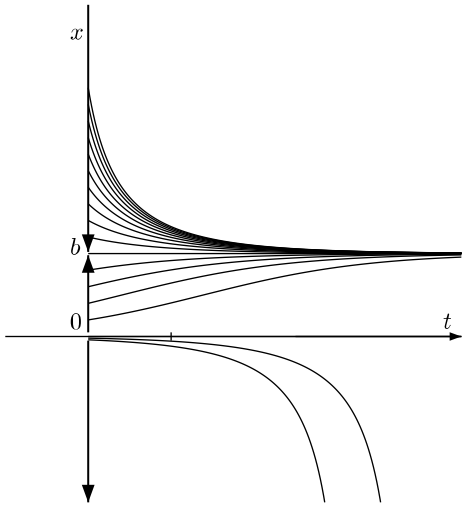

Figura 1: Ecuaţia logistică: graficele soluţiilor

Soluţia nulă este instabilă, deoarece pot fi alese date iniţiale $\xi > 0$ oricât de mici pentru care soluţiile corespunzătoare tind la $b > 0$.

Soluţiile care pleacă dintr-un $\xi < 0$ sunt descrescătoare şi au limita $-\infty$ la capătul din dreapta al intervalului maximal de existenţă, dar fiind nemărginite nu mai putem spune dacă acesta este finit sau nu.

În sfârşit, ecuaţia logistică este o ecuaţie rezolvabilă prin cuadraturi, fie ca ecuaţie cu variabile separabile, fie ca ecuaţie Bernoulli. Pentru problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = ax(b-x), \\ x(0) = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

obţinem soluţia saturată la dreapta

$$x(t) = \frac{b\xi e^{abt}}{b + \xi(e^{abt} - 1)}, \quad x : [0, T_\xi) \to \mathbb{R},$$

cu $T_\xi = +\infty$ pentru $\xi \geq 0$, şi $T_\xi = \frac{1}{ab} \ln\left(1 - \frac{b}{\xi}\right) < +\infty$, pentru $\xi < 0$. Graficele acestor funcţii sunt reprezentate în Figura 1 şi confirmă pe deplin *analiza calitativă* efectuată mai sus.

§3 Modelul pradă-răpitor. Pentru studiul evoluţiei numărului de indivizi din speciile unui ecosistem oarecare au fost propuse şi sunt analizate şi în prezent numeroase modele matematice, dintre acestea cel mai cunoscut fiind cel iniţial, *modelul pradă-răpitor* prezentat în continuare.

Considerăm un ecosistem format din două specii, una "pradă" şi alta "răpitor", de exemplu o specie ierbivoră x, şi una carnivoră y, şi presupunem, prin analogie cu modelul dat de ecuaţia logistică de mai sus, că rata de creştere pentru fiecare specie este determinată de numărul de indivizi din cealaltă specie astfel încât au loc relaţiile

$$\begin{cases} \tilde{x}' = (a - \alpha\tilde{y})\tilde{x}, \\ \tilde{y}' = (\beta\tilde{x} - b)\tilde{y}, \end{cases} \tag{3}$$

cu α, β, γ şi δ coeficienţi constanţi strict pozitivi.

Prima ecuaţie arată că în absenţa carnivorelor (când y este funcţia nulă) numărul ierbivorelor creşte exponenţial, cu rata $a > 0$, iar prezenţa carnivorelor face ca această rată să scadă până la valori posibil negative. Analog, a doua ecuaţie arată că în absenţa ierbivorelor (cand $x \equiv 0$) carnivorele sunt ameninţate de extinţie, numărul lor descrescând exponenţial cu rata $-b < 0$, această rată fiind pozitivă numai dacă sunt suficient de multe ierbivore.

Pentru a uşura calculele, efectuăm schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = \frac{\beta}{b}\tilde{x} \\ y = \frac{\alpha}{a}\tilde{y}. \end{cases}$$

şi aducem acest sistem diferenţial la forma mai simplă:

$$\begin{cases} x' = ax(1-y), \\ y' = -by(1-x) \end{cases} \tag{4}$$

cu $a > 0$ şi $b > 0$.

Sistemul pradă-răpitor (4) este un sistem diferenţial autonom de forma

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y), \end{cases} \tag{5}$$

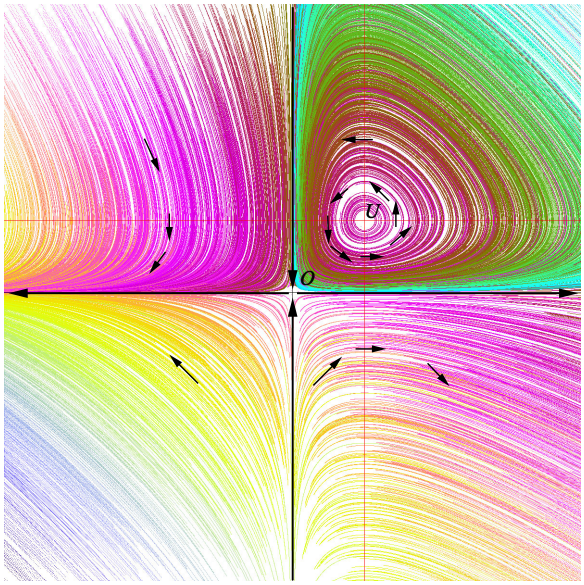

Figura 2: Sistemul pradă-răpitor: portretul fazelor

cu $f(x,y) = ax(1-y)$ şi $g(x,y) = -by(1-x)$ funcţii de clasă C^1 definite pe tot spaţiul fazelor, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Observăm că sistemul admite numai două soluţii staţionare, date de punctele $O(0,0)$ şi $U(1,1)$, a căror stabilitate încercăm să o determinăm prin metoda primei aproximaţii. Matricea jacobiană ataşată sistemului este

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1-y) & -ax \\ by & -b(1-x) \end{pmatrix},$$

astfel că în punctul $O(0,0)$ avem matricea

$$A = J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix},$$

cu rădăcinile caracteristice $\lambda_1 = a > 0$ şi $\lambda_2 = -b$, deci originea este un punct staţionar instabil.

În $U(1,1)$ metoda primei aproximaţii este în cazul de dubiu: matricea

$$A = J(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

are rădăcinile caracteristice $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ab}$. Pentru a determina stabilitatea acestui punct va trebui să aflăm mai multe despre soluţiile sistemului.

Este uşor de văzut că sistemul admite soluţii particulare cu una dintre componente funcţia nulă, mai precis soluţiile de forma

$$\begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = ce^{-bt} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x(t) = ce^{at}, \\ y(t) = 0, \end{cases}$$

cu c o constantă oarecare. Traiectoriile acestor soluţii sunt cele patru semiaxe ale sistemului de coordonate xOy, parcurse după cum urmează: cele două semiaxe verticale sunt parcurse în sensul "spre origine", iar cele orizontale în sensul

"dinspre origine". Aceste patru traiectorii nestaţionare separă spaţiul fazelor în patru domenii invariante, şi anume cele patru cadrane. O soluţie care pleacă dintr-un punct din primul cadran, de exemplu, va rămâne în acest cadran pe întreg intervalul de existenţă.

Încercăm acum să schiţăm portretul fazelor, adică familia traiectoriilor, prin *metoda izoclinelor*, specifică sistemelor diferenţiale autonome în plan. Traiectoriile sistemului (5) sunt date de graficele soluţiilor $y = y(x)$ ale ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}, \tag{6}$$

iar prin *izoclina de pantă* m se înţelege locul punctelor (x_0, y_0) în care tangenta la soluţia care trece prin (x_0, y_0) are panta m, aceste puncte fiind date aşadar de ecuaţia

$$\frac{g(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)} = m.$$

Pentru sistemul pradă-răpitor, izoclina de pantă 0, locul punctelor cu tangentă orizontală, este format din dreptele $y = 0$ şi $x = 1$, iar izoclina de pantă infinită, locul punctelor cu tangentă vericală, este dat de dreptele $x = 0$ şi $y = 1$.

Aceste patru drepte împart spaţiul fazelor în 9 domenii în care funcţiile continue $f(x, y)$ şi $g(x, y)$ nu se anulează, având, prin urmare, semn constant. Analizând semnul acestor funcţii obţinem pentru vectorul viteză orientările date prin săgeţi în Figura 2. De exemplu, în domeniul cu $x > 1$ şi $y > 1$ orientarea vitezei este "către nord-vest", deorece $x' = ax(1-y) < 0$ şi $y' = -by(1-x) > 0$.

Din aceste informaţii despre direcţia vecorului viteză, pentru cadranele II, III şi IV obţinem schiţa traiectoriilor dată de Figura 2, iar pentru cadranul I deducem numai că soluţiile se rotesc în jurul punctului staţionar $U(1, 1)$ în sens trigonometric, fără să putem decide dacă traiectoriile sunt închise sau dacă sunt spirale care se înfăşoară către U sau se desfăşoară îndepărtându-se U.

Portretul fazelor final, cel din Figura 2, va fi decis cu ajutorul unei integrale prime definite pe tot cadranul $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. În cazul sistemului pradă-răpitor ecuaţia (6) este cu variabile separabile şi, pentru $x > 0$, $y > 0$, are soluţia generală

$$b(x - \ln x) + a(y - \ln y) = C,$$

cu C o constantă oarecare. Altfel spus,

$$V(x, y) = b(x - \ln x) + a(y - \ln y)$$

este o integrală primă definită pe tot domeniul invariant $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, iar traiectoriile din acest domeniu sunt curbele de nivel constant ale lui V.

Notăm $\varphi(t) = t - \ln t$, pentru $t > 0$, şi observăm că funcţia φ are în $t_0 = 1$ o valoare minimă globală, fiind strict descrescătoare pe intervalul $(0, 1)$ şi strict crescătoare pe $(1, +\infty)$, având limitele

$$\lim_{t \searrow 0} \varphi(t) = \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty.$$

Urmează de aici că funcţia

$$V(x, y) = b\varphi(x) + a\varphi(y), \ x > 0, y > 0,$$

cu $a > 0$ şi $b > 0$, are un singur punct de minim, punctul $U(1,1)$, iar valorile ei tind la $+\infty$ când (x,y) se apropie de frontiera cadranului I sau când tinde la infinit. Deducem că, pentru orice $C > V(1,1)$, intersecţia în $\mathbb{R}^3$ dintre suprafaţa $z = V(x,y)$ şi planul orizontal de ecuaţie $z = C$ este o curbă închisă, altfel spus curbele de nivel constant ale lui V sunt curbe închise, cu U situat în domeniul interior. Pe o astfel de orbită închisă viteza punctului curent

$$v(x,y) = \sqrt{f^2(x,y) + g^2(x,y)},$$

are o valoare minimă $v(x_0, y_0) > 0$, fiind o funcţie continuă definită pe o mulţime compactă din $\mathbb{R}^2$, şi cum orbita are o lungime finită rezultă că este parcursă în întregime în timp finit, mişcarea fiind aşadar periodică.

Pentru modelul nostru iniţial, dat de sistemul (3), obţinem următorul comportament numeric: dacă populaţiile celor două specii au la momentul iniţial valorile de echilibru

$$\tilde{x}(t_0) = \frac{b}{\beta} \text{ şi } \tilde{y}(t_0) = \frac{a}{\alpha},$$

atunci populaţiile rămân constante în timp, altfel ele oscilează în mod periodic în jurul valorilor de echilibru.

În final, să arătăm că valorile medii ale celor două populaţii sunt constante. Pentru o soluţie cu perioada $T > 0$ avem

$$\int_t^{t+T} \frac{\tilde{x}'(s)}{\tilde{x}(s)} ds = \ln \tilde{x}(t+T) - \ln \tilde{x}(t) = 0,$$

pentru orice t. Dar

$$\int_t^{t+T} \frac{\tilde{x}'(s)}{\tilde{x}(s)} ds = \int_t^{t+T} (a - \alpha \tilde{y}(s)) ds = aT - \alpha \int_t^{t+T} \tilde{y}(s) ds,$$

prin urmare

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \tilde{y}(s) ds = \frac{a}{\alpha},$$

pentru orice t, deci valoarea medie a populaţiei $y = \tilde{y}(t)$ pe orice interval de timp de durată T este constantă, egală cu valoarea de echilibru, comportament valabil şi pentru $x = \tilde{x}(t)$.

§4 Problema traiectoriilor balistice constă, în esenţă, în determinarea mişcării unui bolovan catapultat de către o balistă romană. Problema a devenit importantă în Evul Mediu, odată cu apariţia armelor de foc, în special pentru tragerile de artilerie.

Până la Newton se considera că traiectoriile sunt parabole, fapt uşor de explicat acum deoarece pe distanţe scurte forţa de greutate poate fi considerată constantă, de forma $\vec{G} = m\vec{g}$, iar la viteze mici rezistenţa întâmpinată de proiectil din partea aerului este neglijabilă, aşa că în acest caz *ecuaţia fundamentală a mecanicii*, numită şi *ecuaţia lui Newton*,

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

are forma

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g},$$

şi conduce după două integrări succesive la o lege de mişcare dată de funcţia polinomială de gradul doi:

$$\dot{\vec{r}}(t) = t\vec{g} + \vec{v}_0$$

$$\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{g} + t\vec{v}_0 + \vec{r}_0.$$

Aici am luat timpul iniţial $t_0 = 0$ şi am notat cu $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ poziţia iniţială şi cu $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0)$ viteza iniţială.

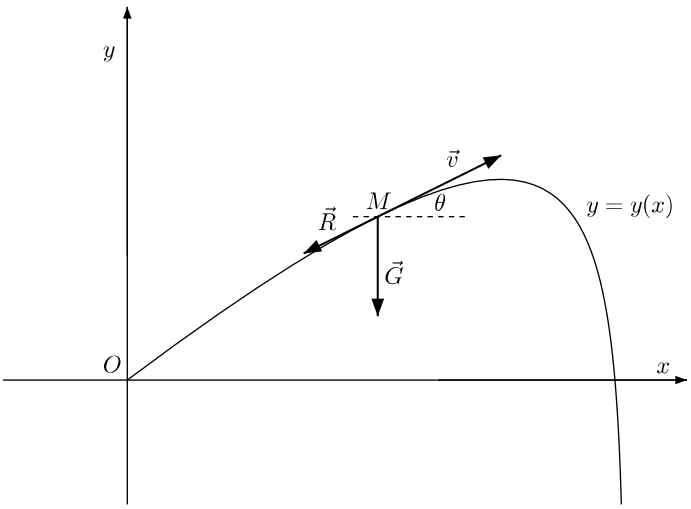

Figura 3: Traiectorii balistice

Primul model matematic în care a fost luată în calcul şi rezistenţa mediului a fost formulat şi rezolvat chiar de către Newton în *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687).

Newton a modelat frecarea cu aerul printr-o *forţă de rezistenţă* proporţională cu vectorul viteză, având sensul opus acestuia, caz care, după cum vom vedea, conduce la ecuaţii diferenţiale liniare. În cazul general, pentru problema traiectoriilor balistice, se consideră că mărimea R a forţei de rezistenţa $\vec{R}$ depinde numai de mărimea v a vectorului viteză $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ după o lege de forma $R = mg\varphi(v)$, unde φ este o funcţie netedă strict crescătoare, cu $\varphi(0) = 0$ şi $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$. Mai precis, forţa de rezistenţă are forma

$$\vec{R} = -mg\varphi(v)\vec{\tau},$$

unde $\vec{\tau} = \frac{1}{v}\vec{v}$ este versorul vectorului viteză. Cele două constante, $m > 0$, masa, şi $g = |\vec{g}|$, acceleraţia gravitaţională, apar în expresia lui $\vec{R}$ numai pentru simplificarea calculelor.

Funcţia φ depinde în principal de aerodinamicitatea proiectilului, problema de modelare constând de fapt în determinarea funcţiei φ pentru care soluţiile modelului matematic se potrivesc cât mai bine cu măsurătorile din teren. De regulă sunt luate în considerare funcţii de forma $\varphi(v) = v^{1+\gamma}$, cu $\gamma > 0$, care aproximează destul de bine fenomenul studiat şi au avantajul că ecuaţiile diferenţiale la care conduc sunt integrabile prin cuadraturi.

În concluzie, modelul nostru este dat de mişcarea unui punct material M de masă m sub acţiunea câmpului de forţe

$$\vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) = m\vec{g} - mg\frac{\varphi(v)}{v}\vec{v},$$

model pentru care ecuaţia $m\vec{a} = \vec{F}$ are forma

$$\vec{a} = \vec{g} - g\frac{\varphi(v)}{v}\vec{v}, \tag{7}$$

cu $\vec{g}$ un vector constant nenul.

Vom considera cazul general în care viteza iniţială v_0 este nenulă şi nu este dirijată pe verticala locului de lansare M_0, caz în care traiectoria mobilului M este situată în planul în definit de verticala locului şi de vectorul vitezei iniţiale $\vec{v}_0$. Considerăm acest plan ca plan Oxy, alegând ca axă Oy verticala ascendentă. Notăm cu θ_0 *unghiul de tragere*, unghiul lui $\vec{v}_0$ cu axa Ox; vom nota în general prin θ unghiul lui $\vec{v}$ cu această axă orizontală.

Ecuaţia vectorială de mişcare (7), proiectată pe axele de coordonate, conduce la sistemul diferenţial

$$\begin{cases} \ddot{x} = -g\dfrac{\varphi(v)}{v}\dot{x} \\ \ddot{y} = -g - g\dfrac{\varphi(v)}{v}\dot{y}, \end{cases} \tag{8}$$

unde $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

Derivăm relaţiile

$$\dot{x} = v\cos\theta, \quad \dot{y} = v\sin\theta,$$

care dau proiecţiile vectorului viteză pe cele două axe de coordonate şi, din (8), avem

$$\dot{v}\cos\theta - v\sin\theta\cdot\dot{\theta} = -g\varphi(v)\cos\theta,$$

$$\dot{v}\sin\theta + v\cos\theta\cdot\dot{\theta} = -g - g\varphi(v)\sin\theta,$$

de unde obţinem sistemul diferenţial în necunoscutele $v = v(t)$ şi $\theta = \theta(t)$

$$\begin{cases} \dot{v} &= -g\sin\theta - g\varphi(v) \\ v\dot{\theta} &= -g\cos\theta \end{cases} \tag{9}$$

care, prin eliminarea variabilei t, conduce la ecuaţia diferenţială

$$\frac{dv}{d\theta} = v\left(tg\theta + \frac{\varphi(v)}{\cos\theta}\right), \ \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \tag{10}$$

numită *ecuaţia fundamentală a balisticii exterioare*[1].

Această ecuaţie, scrisă de cele mai multe ori sub forma

$$d(v\cos\theta) = v\varphi(v)d\theta,$$

a fost studiată de matematicieni de talia lui Euler, Jean Bernoulli, D'Alambert şi mulţi alţii, studiile lor conducând, pe de o parte, la apariţia şi dezvoltarea *teoriei calitative* a ecuaţiilor diferenţiale, care constă în stabilirea proprietăţilor soluţiilor fără rezolvarea ecuaţiei, şi, pe de altă parte, la apariţia şi dezvoltarea *metodelor numerice* de aproximare a soluţiilor.

[1] *Balistica interioară* studiază fenomenele legate de explozia din interiorul camerei de ardere.

Să presupunem acum că am reuşit să integrăm ecuaţia (10) şi am găsit funcţia $v = v(\theta)$. Să observăm că din a doua ecuaţie din (9) rezultă că $\theta = \theta(t)$ este strict descrescătoare pe traiectorie şi, prin urmare, inversabilă cu

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{v}{g\cos\theta},$$

de unde îl putem afla pe t ca funcţie de θ

$$t = -\frac{1}{g}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{vd\theta}{\cos\theta}.$$

Revenind la proiecţiile vitezei pe axe vom exprima pe x şi pe y ca funcţii de θ. Avem în continuare

$$\frac{dx}{d\theta} = \dot{x}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{v^2}{g},$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \dot{y}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{v^2}{g}tg\theta,$$

de unde urmează că

$$x = x_0 - \frac{1}{g}\int_{\theta_0}^{\theta} v^2 d\theta$$

şi

$$y = y_0 - \frac{1}{g}\int_{\theta_0}^{\theta} v^2 tg\theta d\theta.$$

Să observăm că în cazul $\varphi(v) = v^{1+\gamma}$, cu $\gamma > 0$, ecuaţia (10) este integrabilă prin cuadraturi, fiind o ecuaţie de tip Bernoulli, caz pe care îl lăsăm spre studiu cititorului.

Ca exemplu de studiu calitativ, ne propunem să arătăm că dacă

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(v)}{v} = +\infty, \tag{11}$$

cum se întâmplă în cazul Bernoulli de mai sus, atunci viteza este mărginită şi are limită finită.

Vom reduce ordinul sistemului (8) notând $p = \dot{x}$ şi $q = \dot{y}$. Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dot{p} = -g\frac{\varphi(v)}{v}p \\ \dot{q} = -g\left(1 + \frac{\varphi(v)}{v}q\right), \end{cases} \tag{12}$$

unde $v = \sqrt{p^2 + q^2}$.

Sistemul (12) este un sistem diferenţial de ordinul întâi autonom cu spaţiul fazelor $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ în care nu are puncte staţionare. Mai mult, $\dot{p} < 0$ în orice punct (p, q) şi $\dot{q} < 0$ pentru orice punct cu $q \geq 0$.

Vom arăta că din (11) rezultă că există $L < 0$ astfel încât, pentru orice p, $q < L$ implică $\dot{q} > 0$.

Într-adevăr, fie $\tilde{q} < 0$ fixat arbitrar. Din (11) rezultă că există $\tilde{v} > 0$ astfel încât

$$\frac{\varphi(v)}{v} > -\frac{1}{\tilde{q}}, \tag{13}$$

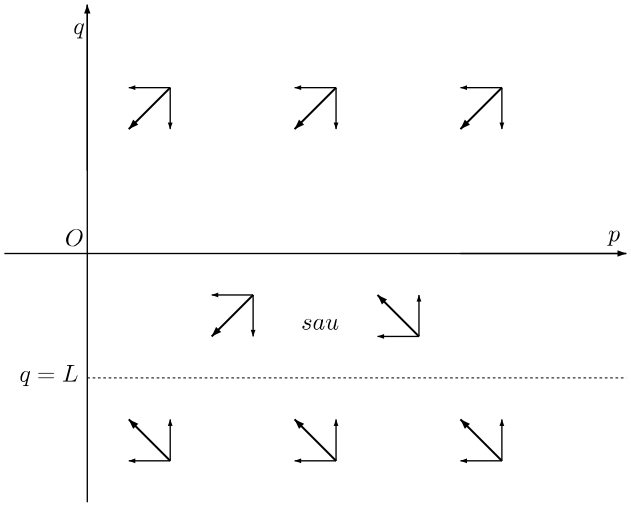

Figura 4: Vectorii $(\dot{p}, \dot{q})$

pentru orice $v > \tilde{v}$. Definim $L = \min\{\tilde{q}, -\tilde{v}\} < 0$. Pentru orice $(p, q) \in (0, +\infty) \times (-\infty, L)$ avem $v = \sqrt{p^2 + q^2} > |q| = -q \geq \tilde{v}$, prin urmare are loc (13), de unde obţinem

$$\frac{\varphi(v)}{v} q < -\frac{q}{\tilde{q}},$$

şi, în continuare,

$$1 + \frac{\varphi(v)}{v} q < \frac{\tilde{q} - q}{\tilde{q}} < 0,$$

de unde rezultă $\dot{q} > 0$, ţinând cont de a doua ecuaţie a sistemului studiat.

Obţinem pentru câmpul vitezelor în spaţiul fazelor $(p, q) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ orientările date de săgeţile din Figura 4, de unde rezultă că traiectoriile sunt mărginite, iar orice soluţie tinde la un punct finit situat pe axa Oq, prin urmare viteza proiectilului pe traiectorie tinde la o valoare finită.

Rezolvăm acum cazul lui Newton, care a considerat $\varphi(v) = \lambda v$, cu $\lambda > 0$. Observăm că sistemul (8) se decuplează în două ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\lambda g \dot{x} \\ \ddot{y} = -g - \lambda g \dot{y}, \end{cases} \tag{14}$$

pe care le integrăm separat alegând $t_0 = 0$. Obţinem pentru început componentele vitezei

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\lambda g t} \\ \dot{y} = (\dot{y}_0 + \frac{1}{\lambda}) e^{-\lambda g t} - \frac{1}{\lambda}, \end{cases}$$

şi apoi, din

$$\begin{cases} x = x_0 + \dot{x}_0 \int_0^t e^{-\lambda g s} ds \\ y = y_0 + (\dot{y}_0 + \frac{1}{\lambda}) \int_0^t e^{-\lambda g s} ds - \frac{1}{\lambda} \int_0^t ds, \end{cases}$$

obţinem în final componentele vectorului de poziţie

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\lambda g} \left(1 - e^{-\lambda g t}\right) \\ y = y_0 + \frac{\dot{y}_0 + \frac{1}{\lambda}}{\lambda g} \left(1 - e^{-\lambda g t}\right) - \frac{t}{\lambda}, \end{cases}$$

pentru orice t.

Să observăm că graficele $y = y(x)$ au asimptotă verticală, deoarece limita

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\lambda g}$$

este finită iar

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty.$$

Mai mult, şi în acest model rezultă că viteza mobilului pe traiectorie are limită finită

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \frac{1}{\lambda},$$

în concordanţă cu experimentele efectuate asupra căderii corpurilor în aer de la înălţimi suficient de mari.