POLINOAME BERSNSTEIN. CURBE BÉZIER

Problema 1. Fie polinomul $P(t) = 1 + 2t - t$, $t \in [0, 1]$. Să se exprime P în bazele Bernstein $\{b_k^2(t)\}_{k=0,1,2}$, respectiv $\{b_k^3(t)\}_{k=0,1,2,3}$

Rezolvare:

L4_1.m

```
clear all;
syms  t a0 a1 a2 reals;
P = 1+2*t-t^2;
b0 = (1-t)^2;
b1 = 2*t*(1-t);
b2 = t*t;
x = simplify(P - a0*b0 - a1*b1 - a2*b2);
x0 = subs(x,t,0);
x1 = subs(diff(x,t),t,0);
x2 = subs(diff(x,t,2),t,0)/2;
r = solve(x0, x1, x2,a0,a1,a2);
y0 = r.a0
y1 = r.a1
y2 = r.a2
```

Rezultat:

y0 = 1
y1 = 2
y2 = 2

Problema 2. Fie punctele de control $p_0 = (0, 0)$, $p_1 = (0, 2)$, $p_2 = (2, 3)$ şi $p_3 = (5, 0)$. Să se deseneze poligonul de control şi curba Bezier asociată. Fie acum $q_1 = (0, 1/2)$ şi considerăm poligonul de control $p_0q_1p_2p_3$. Să se deseneze curba Bezier asociată.

Rezolvare:

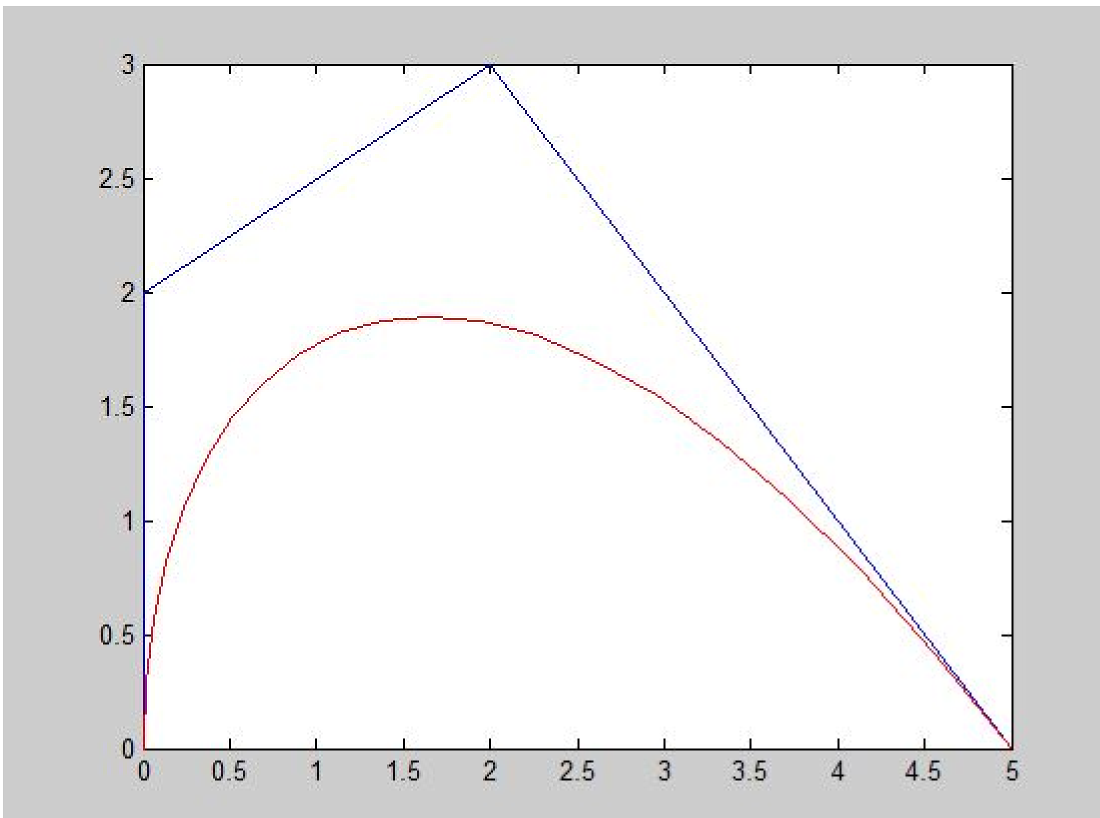
Vom rezolva numai prima parte a problemei:

L4_2.m

```
clear all;
syms t reals
b0=(1-t).^3;
b1=3.*t.*(1-t).*(1-t);
b2=3.*t.*t.*(1-t);
b3=t.^3;
x=[0 0 2 5];
y=[0 2 3 0];
```

```
xx=x(1)*b0+x(2)*b1+x(3)*b2+x(4)*b3;
yy=y(1)*b0+y(2)*b1+y(3)*b2+y(4)*b3;
plot(x,y,'b')
hold on
s=0:0.05:1;
for i=1:length(s)
    u(i)=subs(xx,t,s(i));
    v(i)=subs(yy,t,s(i));
end
plot(u,v,'r')
```

Rezultat:



Problema 4. Se consideră punctele de control: $p_0 = (0,0)$, $p_1 = (0,1)$, $p_2 = (1,1)$, $p_3 = (1,0)$ şi $p_4 = (0,0)$. (Poligonul de control este un pătrat). Să se deseneze curba Bézier asociată. Ce se observă?

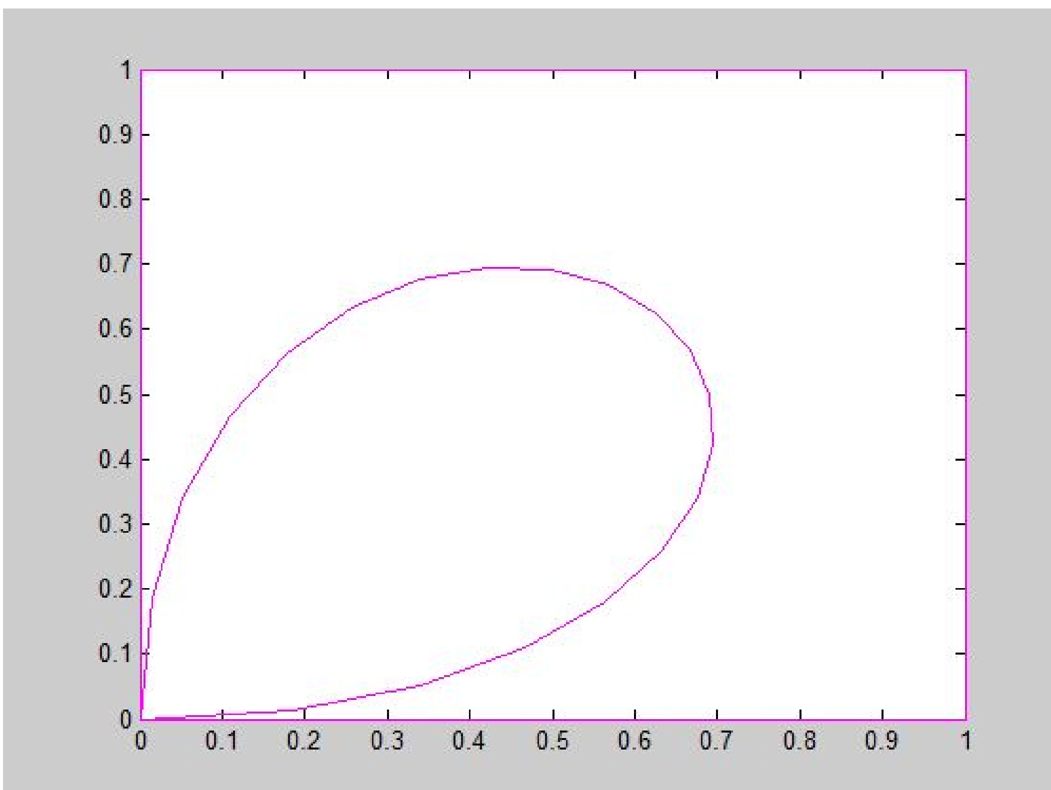
Rezolvare:

L4_4.m

```
clear all;
syms t real
b0=(1-t).^4;
```

```
b1=4.*t.*(1-t).*(1-t).*(1-t);
b2=6.*t.*t.*(1-t).*(1-t);
b3 = 4.*t.*t.*t.*(1-t);
b4=t.*t.*t.*t;
x=[0 0 1 1 0];
y=[0 1 1 0 0];
xx=x(1)*b0+x(2)*b1+x(3)*b2+x(4)*b3;
yy=y(1)*b0+y(2)*b1+y(3)*b2+y(4)*b3;
plot(x,y,'m')
hold on
s=0:0.05:1;
for i=1:length(s)\\
    u(i)=subs(xx,t,s(i));
    v(i)=subs(yy,t,s(i));
end
plot(u,v,'m')
```

Rezultat: Se poate observa că nu avem diferenţiabilitate în punctul $(0,0)$ al curbei. Explicaţia este că punctele $p_0 = p_4$, p_1 şi p_3 nu sunt coliniare; prin urmare, ţinând cont de proprietăţile de tangenţă în capete, rezultă că nu avem diferenţiabilitate în punctul $(0,0)$.



Problema 5. Vom încerca să remediem situaţia din problema precedentă, considerând un poligon de control care să satisfacă condiţia de coliniaritate.

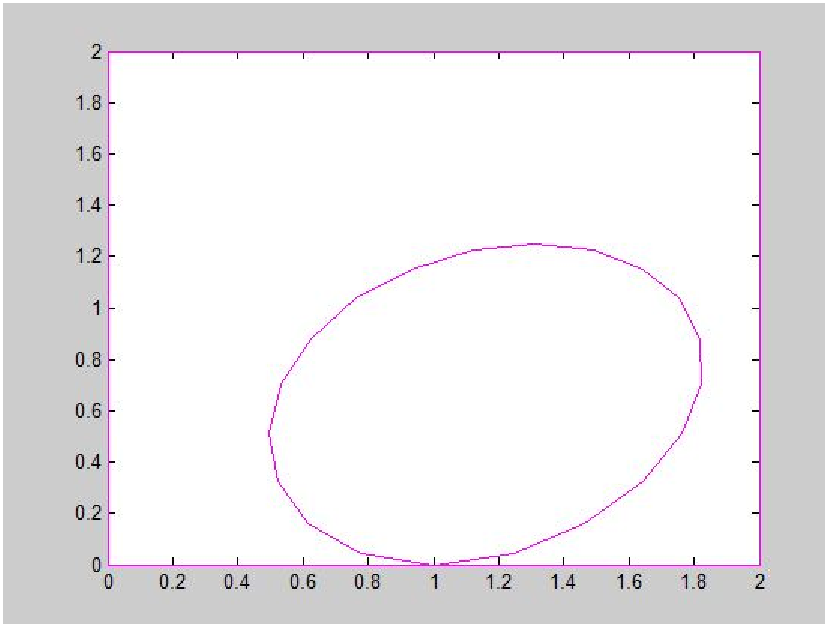
Se consideră punctele de control: $p_0 = (1, 0)$, $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (0, 2)$, $p_3 = (2, 2)$, $p_4 = (2, 0)$ şi $p_5 = (1, 0)$. (Din nou, poligonul de control este un pătrat). Să se deseneze curba Bézier asociată.

Se poate spune acum că avem diferenţiabilitate în punctul $(0, 0)$?

L4_5.m

```
clear all;
syms t real;
b0=(1-t).^5;
b1=5.*t.*(1-t).*(1-t).*(1-t).*(1-t);
b2=10.*t.*t.*(1-t).*(1-t).*(1-t);
b3 = 10.*t.*t.*t.*(1-t).*(1-t);
b4= 5.*t.*t.*t.*(1-t);
b5= t.*t.*t.*t.*t;
x=[1 0 0 2 2 1];
y=[0 0 2 2 0 0];
xx=x(1)*b0+x(2)*b1+x(3)*b2+x(4)*b3+x(5)*b4+x(6)*b5;
yy=y(1)*b0+y(2)*b1+y(3)*b2+y(4)*b3+y(5)*b4+y(6)*b5;
plot(x,y,'m')
hold on
s=0:0.05:1;
for i=1:length(s)
    u(i)=subs(xx,t,s(i));
    v(i)=subs(yy,t,s(i));
end
plot(u,v,'m')
```

Rezultat:



Nu putem spune nimic deocamdată (fără a face calcule) despre diferenţiabilitatea în punctul $(0, 0)$. Vom vedea în cursurile următoare condiţii geometrice care asigură diferenţiabilitatea.

Problema 6. Fie punctele de control $p_0 = (2, 0)$, $p_1 = (a, 0)$, $p_2 = (0, b)$ şi $p_3 = (0, 2)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b < 2$. Să se reprezinte, pentru diferite valori ale parametrilor a şi b, curba Bézier asociată. De exemplu pentru următoarele valori $(a, b) \in \{(1, 1); (0, 1); (-1, 0); (-4, -3)\}$.

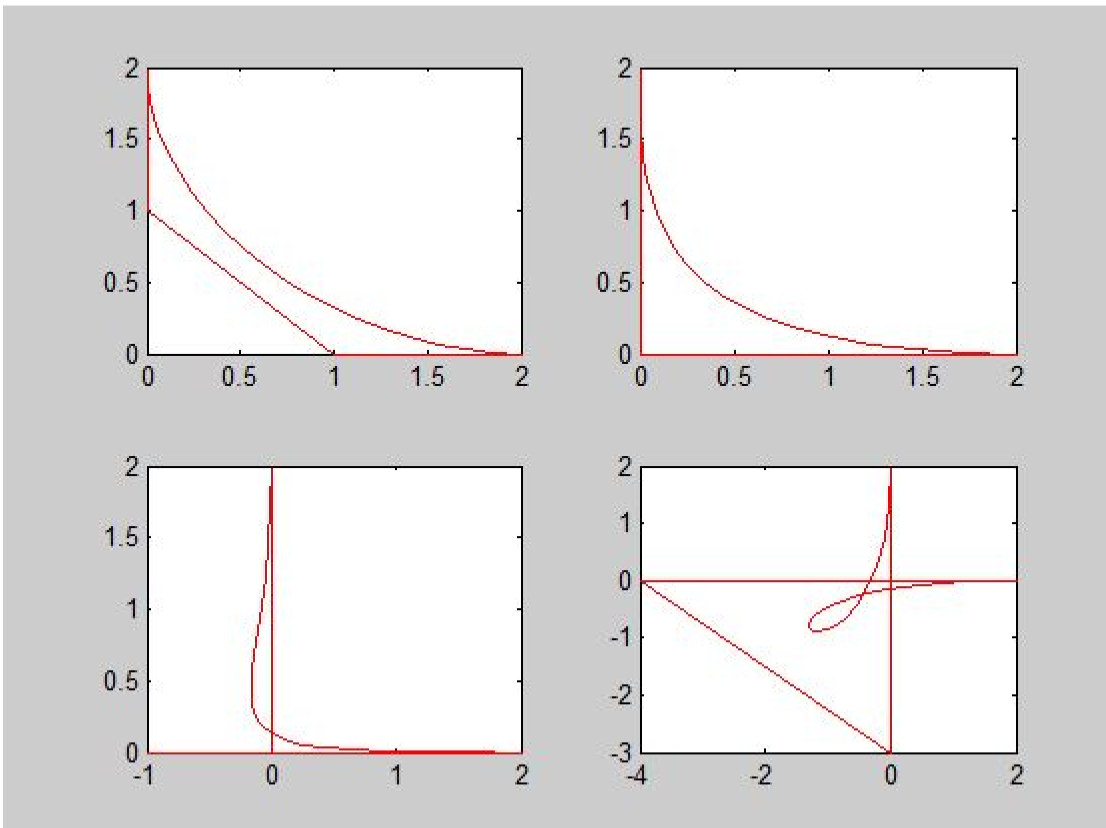
Rezolvare.

L4_6.m

```
clear all;
syms t real;
b0=(1-t).^3;
b1=3.*t.*(1-t).*(1-t);
b2=3.*t.*t.*(1-t);
b3 = t.*t.*t;
a=[1 0 -1 -4];
b=[1 1 0 -3];$
for j=1:4
    subplot(2,2,j)
    x=[2 a(j) 0 0];
    y=[0 0 b(j) 2];
    plot(x,y)
    hold on
xx=x(1)*b0+x(2)*b1+x(3)*b2+x(4)*b3;
yy=y(1)*b0+y(2)*b1+y(3)*b2+y(4)*b3;
```

```
plot(x,y,'r')
hold on
s=0:0.05:1;
for i=1:length(s)
    u(i)=subs(xx,t,s(i));
    v(i)=subs(yy,t,s(i));
end
plot(u,v,'r')
end
```

Rezultat:



Se poate observa că pentru ultima situaţie, curba Bézier are o autointersecţie.